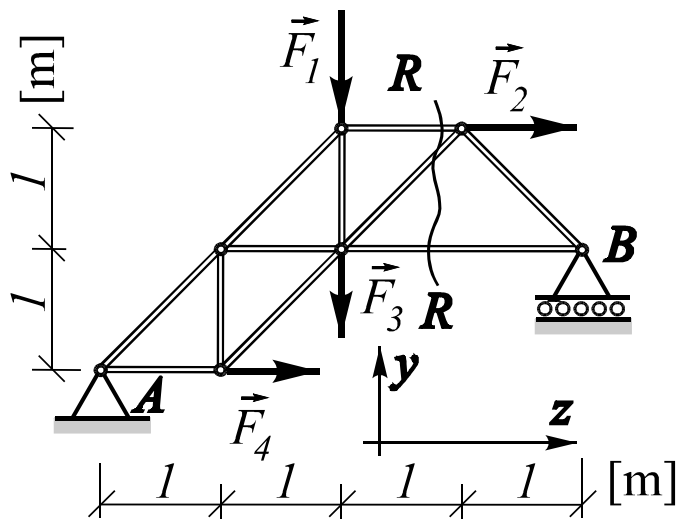


Ravanska rešetka. Rešavanje prikazano na primeru



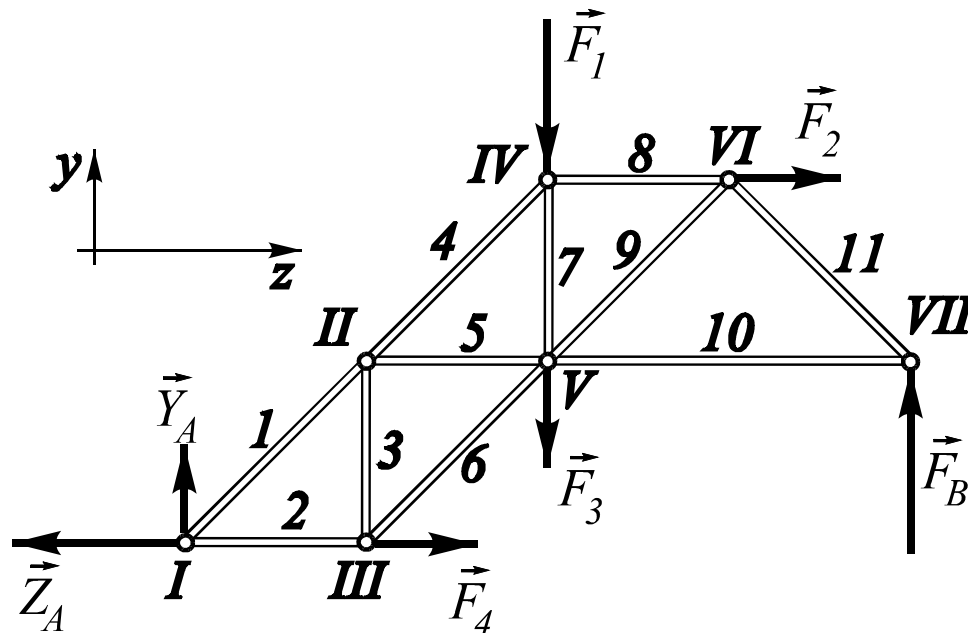
$$F_1 = 2 \text{ kN}$$

$$F_2 = 1 \text{ kN}$$

$$F_3 = 1 \text{ kN}$$

$$F_4 = 1 \text{ kN}$$

Dok se u nepokretnom osloncu A javljaju reakcije u oba upravna pravca (y i z) u pokretnom osloncu B nema reakcije u horizontalnom pravcu (tački B je omogućeno kretanje u tom pravcu bez otpora) već samo u vertikalnom. Rešavanje rešetke podrazumeva određivanje otpora oslonaca i sila u štapovima.



Štapovi su označeni arapskim brojevima a čvorovi rimskim.

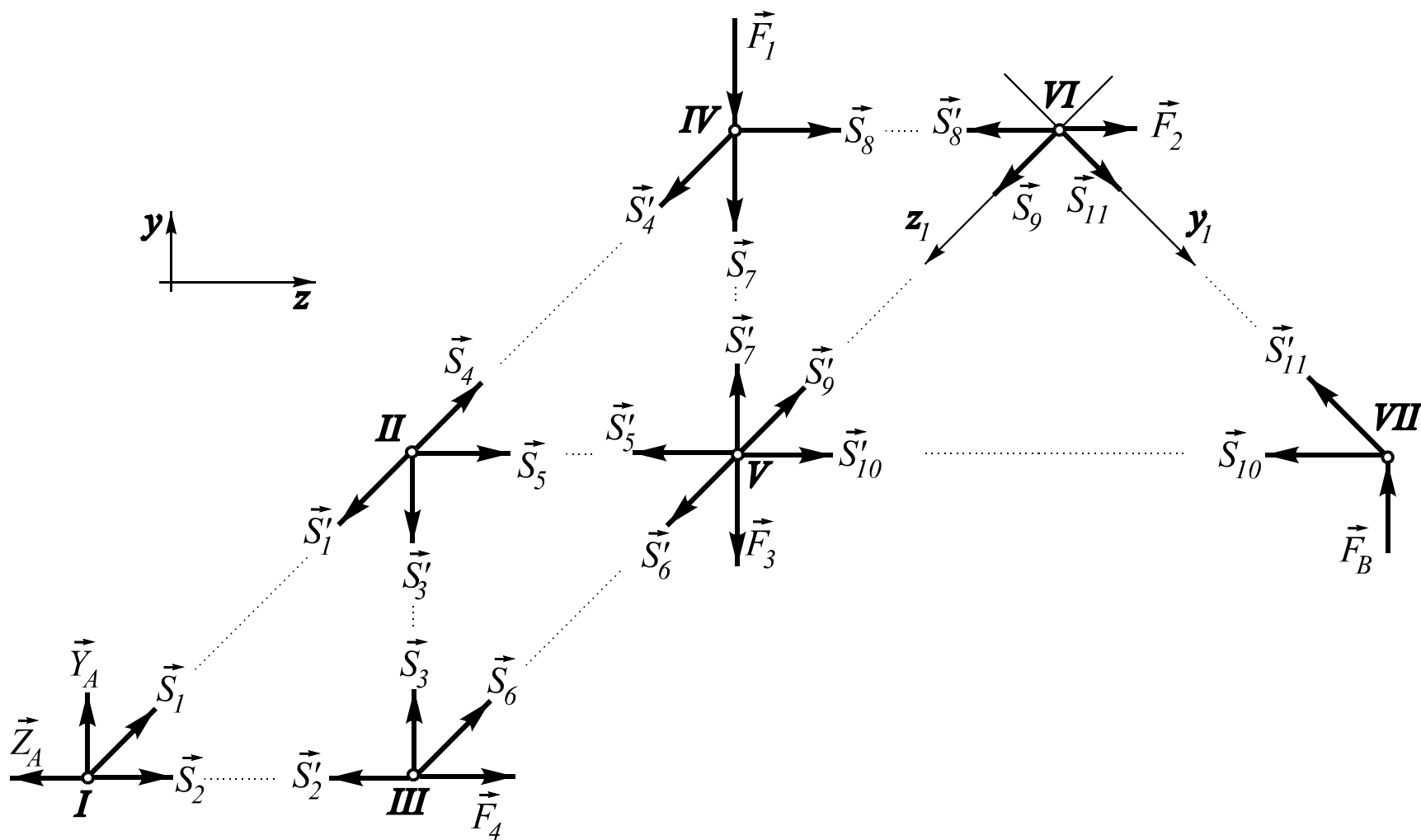
Određivanje otpora oslonaca

$$\sum M_{Ii} = -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 2 + F_B \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 2 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = Y_A - F_1 - F_3 + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 1 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + F_2 + F_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = 2 \text{ kN}$$

I metoda: Analitičko određivanje sila u štapovima izdvajanjem čvorova



Svi čvorovi rešetke i sile koje na njih dejstvuju

Određivanje sila u čvoru I:

$$\sum Y_i = Y_A + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_1 = -\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 = 0 \Rightarrow S_2 = 3 \text{ kN}$$

Određivanje sila u čvoru III:

$$\sum Z_i = -S_2 + S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0 \Rightarrow S_6 = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = S_3 + S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_3 = -2 \text{ kN}$$

Određivanje sila u čvoru II:

$$\sum Y_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 = 0 \Rightarrow S_4 = -3\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0 \Rightarrow S_5 = 2 \text{ kN}$$

Određivanje sila u čvoru IV:

$$\sum Z_i = -S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_8 = 0 \Rightarrow S_8 = -3 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = -F_1 - S_7 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_7 = 1 \text{ kN}$$

Određivanje sile u čvoru VI:

$$\sum Z_{1i} = S_9 + S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_9 = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum Y_{1i} = S_{11} - S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{11} = -2\sqrt{2} \text{ kN}$$

Određivanje preostale sile u čvoru VII i provera drugog uslova ravnoteže:

$$\sum Z_i = -S_{10} - S_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow S_{10} = 2 \text{ kN}$$

Prva provera

$$\sum Y_{1i} = F_B + S_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 + (-2\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Provera uslova ravnoteže u čvoru V:

Druga provera

$$\sum Z_i = -S_5 - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{10} + S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Treća provera

$$\sum Y_i = S_7 + S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

II metoda: Grafičko određivanje sila u štapovima Kremoninim planom sila

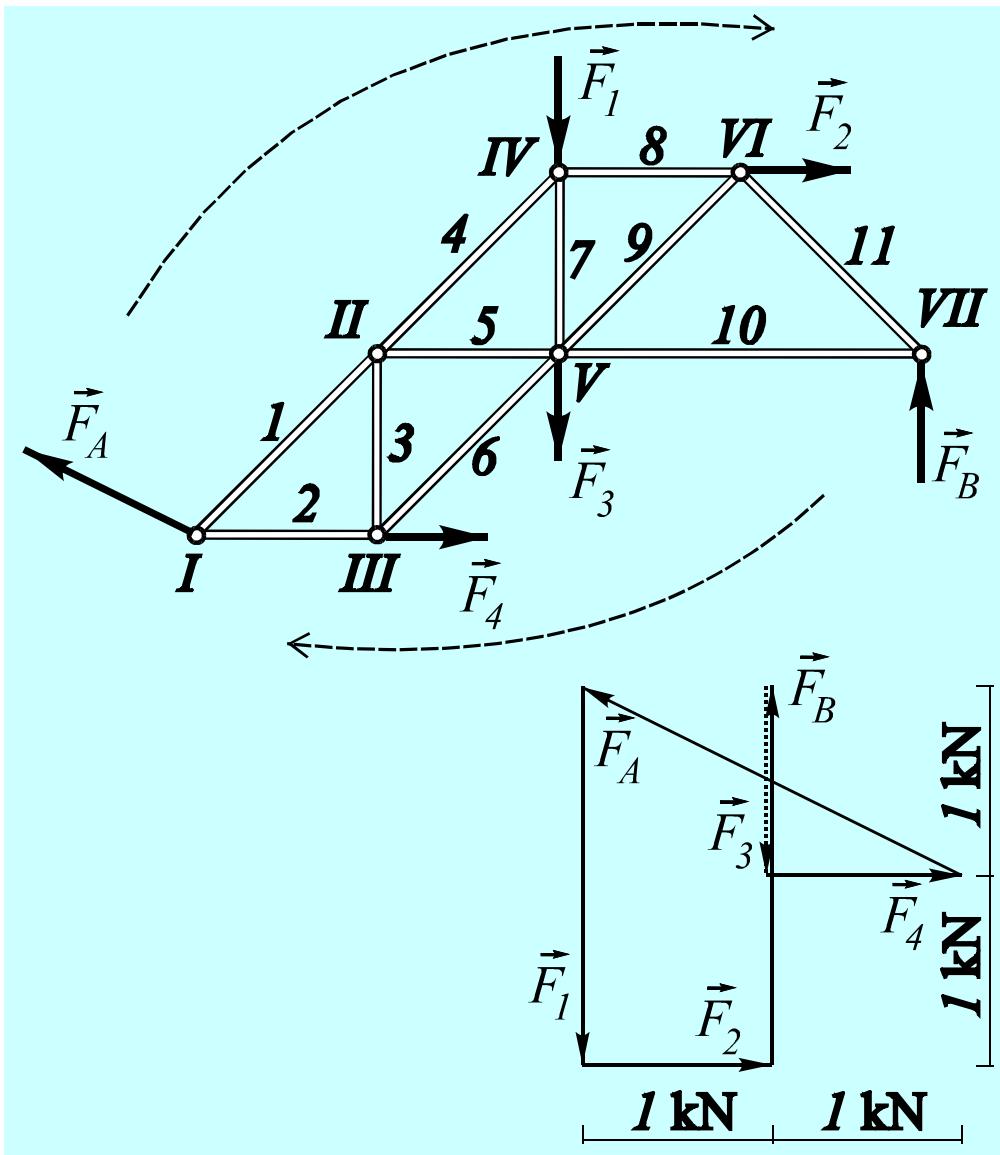
Crtanje Kremoninog plana sila je grafička metoda određivanja sila u svim štapovima koja je takođe bazirana na zadovoljavanju uslova ravnoteže svakog čvora posebno. Setimo se da je grafički uslov ravnoteže sučelnog sistema sila “zatvoren poligon sila”. Isto tako, jedan od uslova ravnoteže rešetke kao celine je “zatvoren poligon spoljašnjih sila”

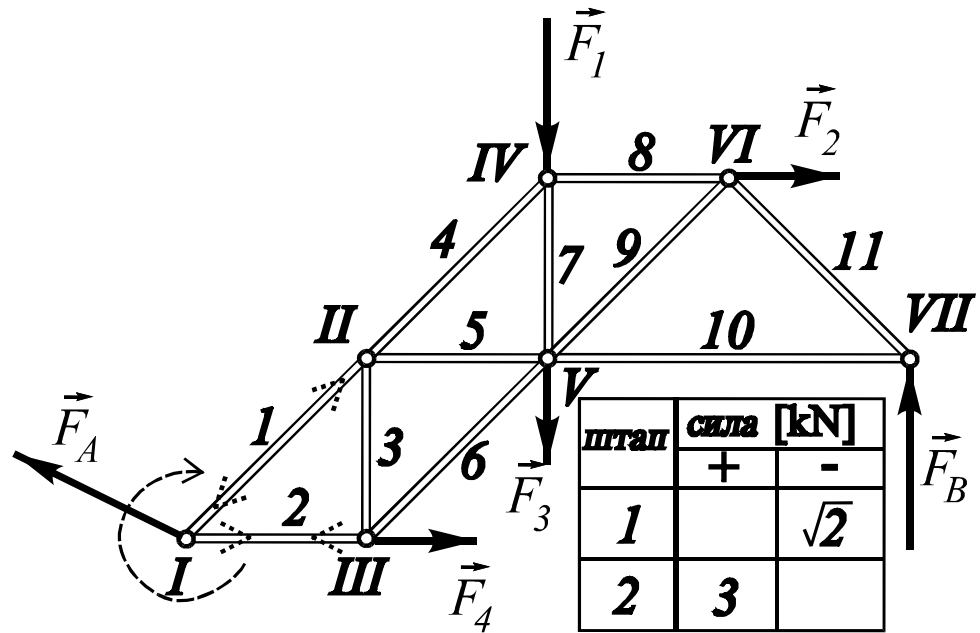
Da bi se u potpunosti nacrtao Kremonin plan sila moraju se poštovati sledeća pravila:

- Prvo se odrede otpori oslonaca (to je ovde već učinjeno).
- Sve spoljašnje sile koje dejstvuju na rešetku kao celinu crtaju se van konture rešetke
- Nacrta se u razmeri zatvoren poligon spoljašnjih sila, ali tako što se one nadovezuju redosledom, kakvim se na njih nailazi pri obilasku oko rešetke u smeru kazaljke na satu. Tako dobijen zatvoren poligon spoljašnjih sila predstavlja osnovu (kostur) Kremoninog plana sila.
- Zatim se grafički rešava jedan po jedan čvor (crta se zatvoreni poligon sila za svaki čvor). Mogu se rešavati samo oni čvorovi koji u datom trenutku nemaju više od dve nepoznate.

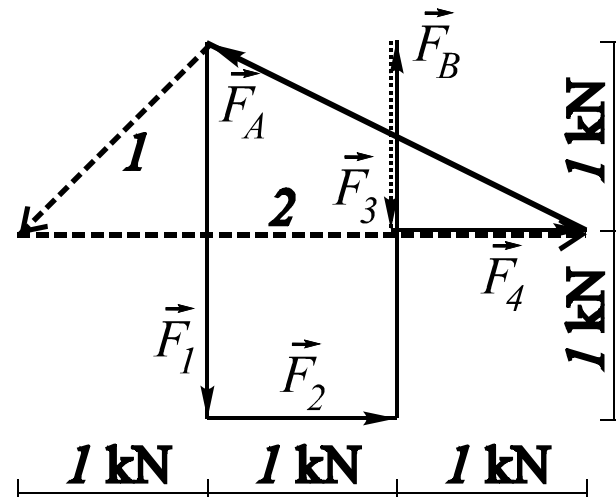
Pri rešavanju nekog čvora (crtanju zatvorenog poligona za taj čvor) moraju se sile koje na njega dejstvuju nadovezivati takvim redosledom, kakvim se na njih nailazi pri obilasku oko tog čvora u smeru kazaljke na satu.

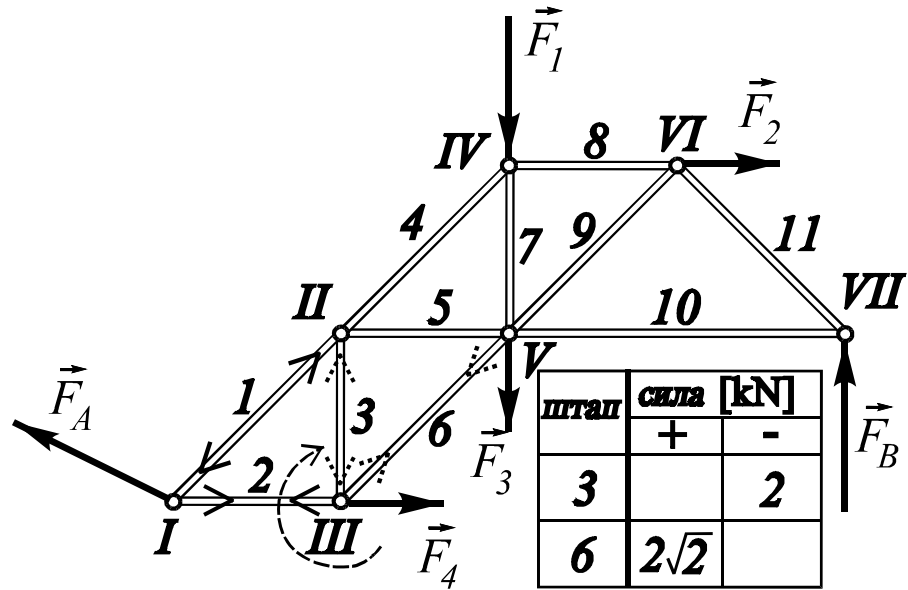
*Osnova (kostur) za crtanje
Kremoninog plana sila*



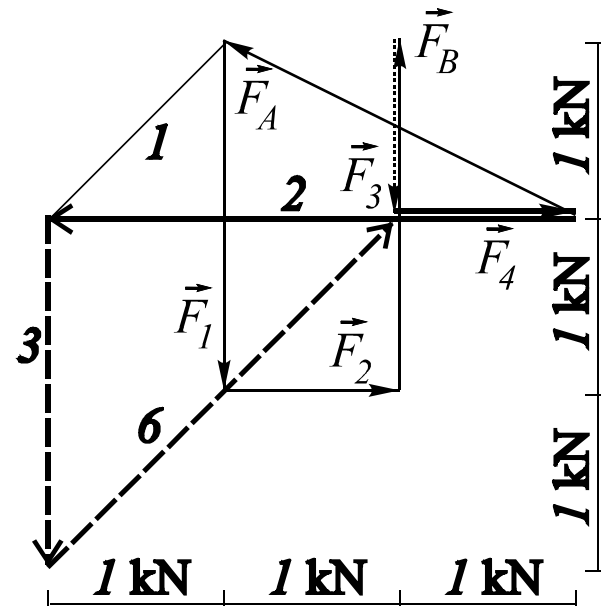


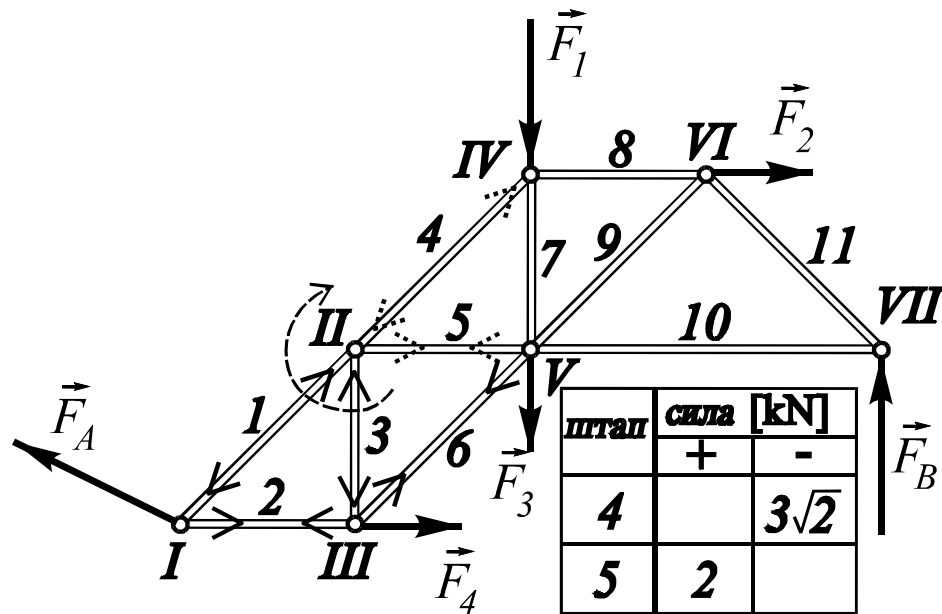
Rešavanje čvora I:



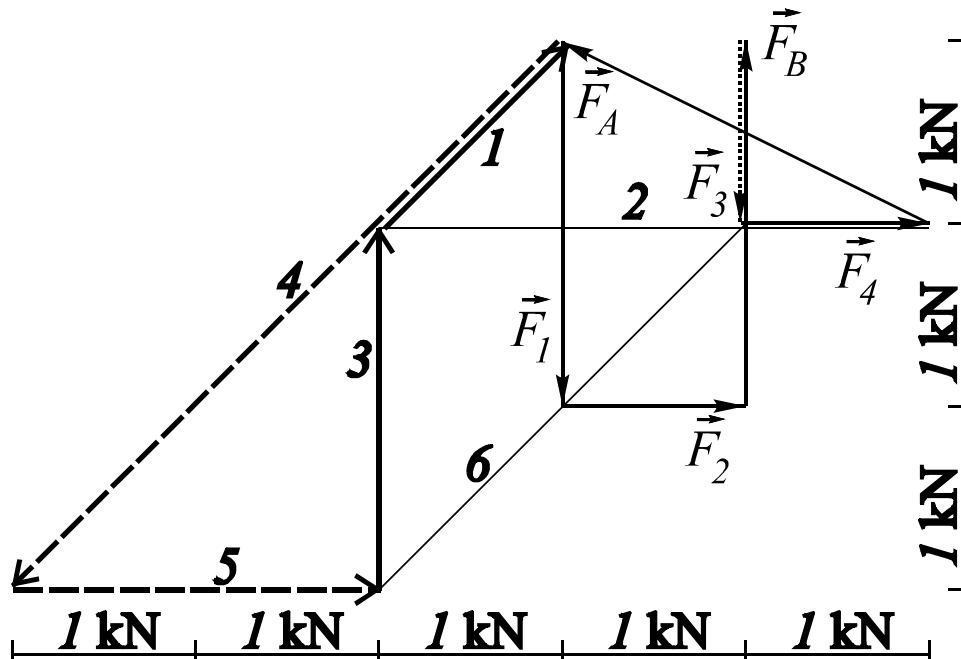


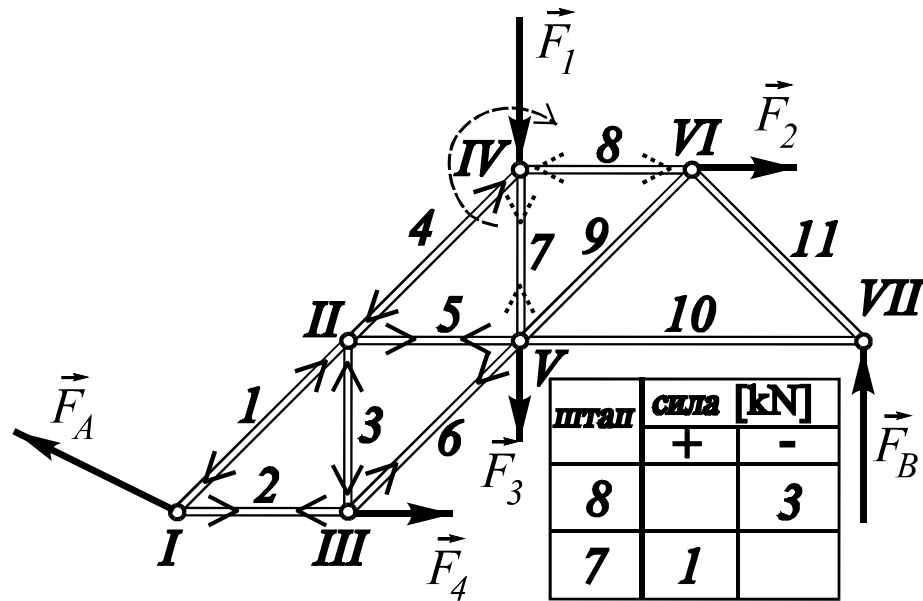
Rešavanje čvora III:



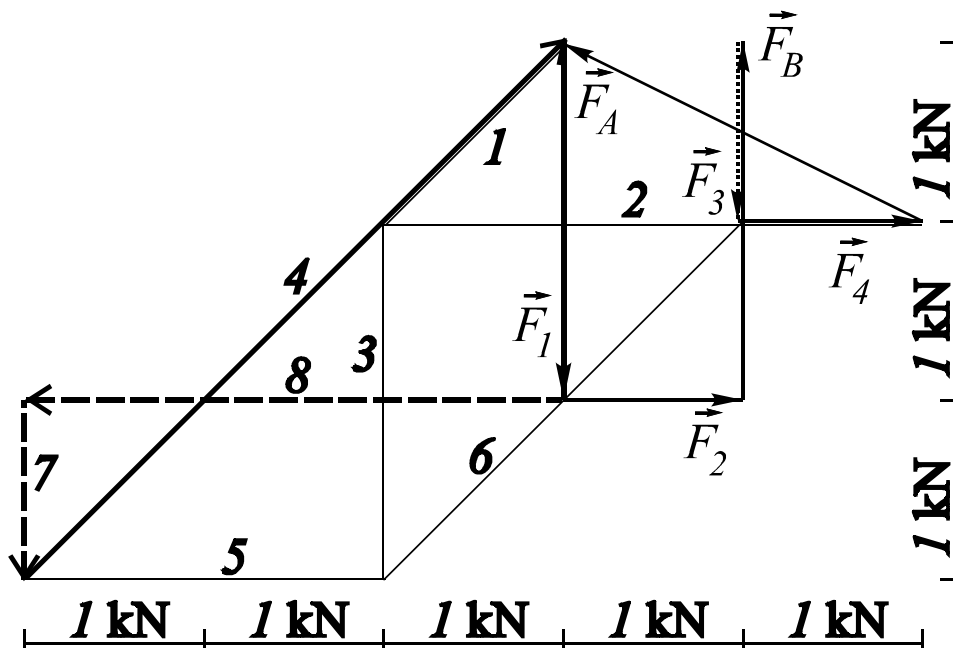


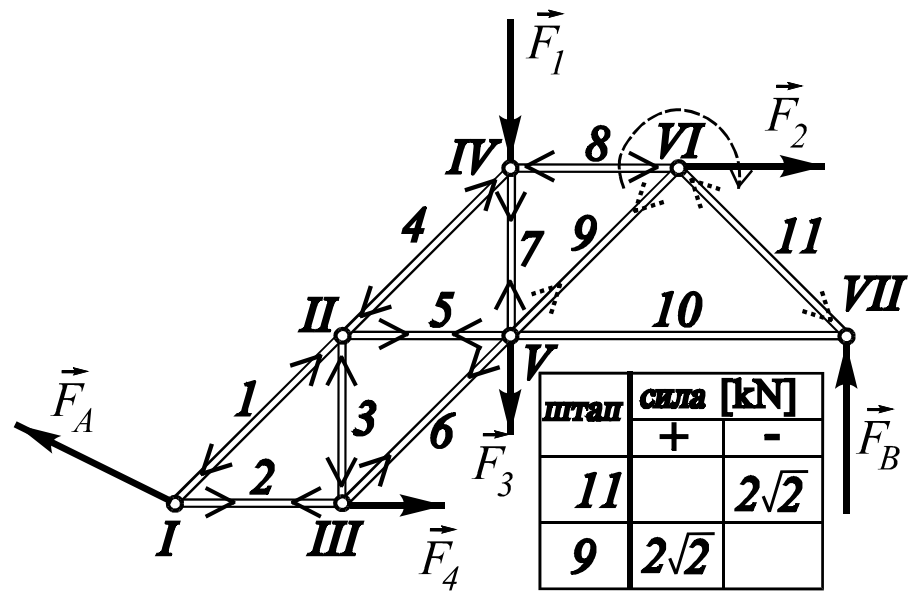
Rešavanje čvora II:



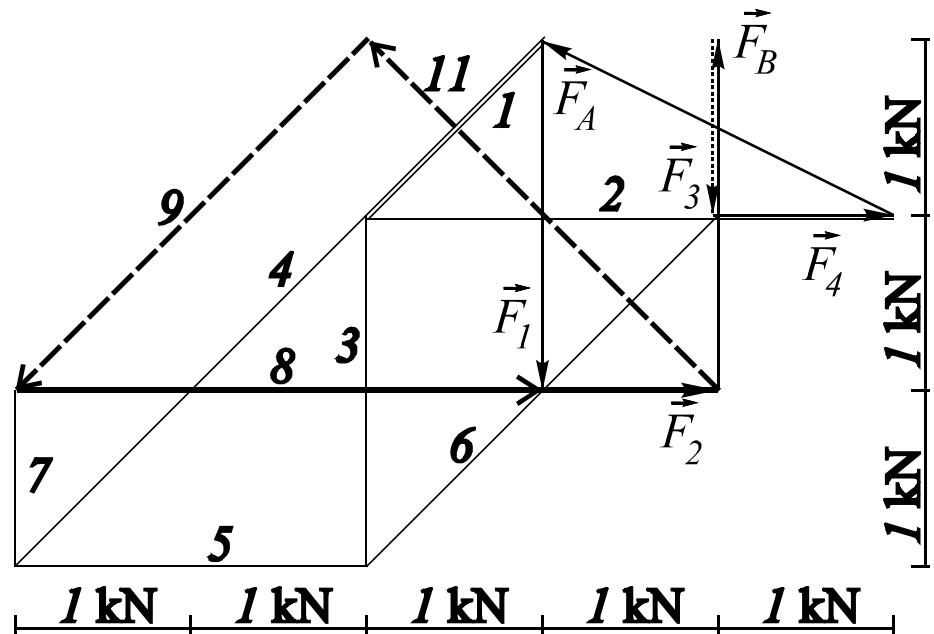


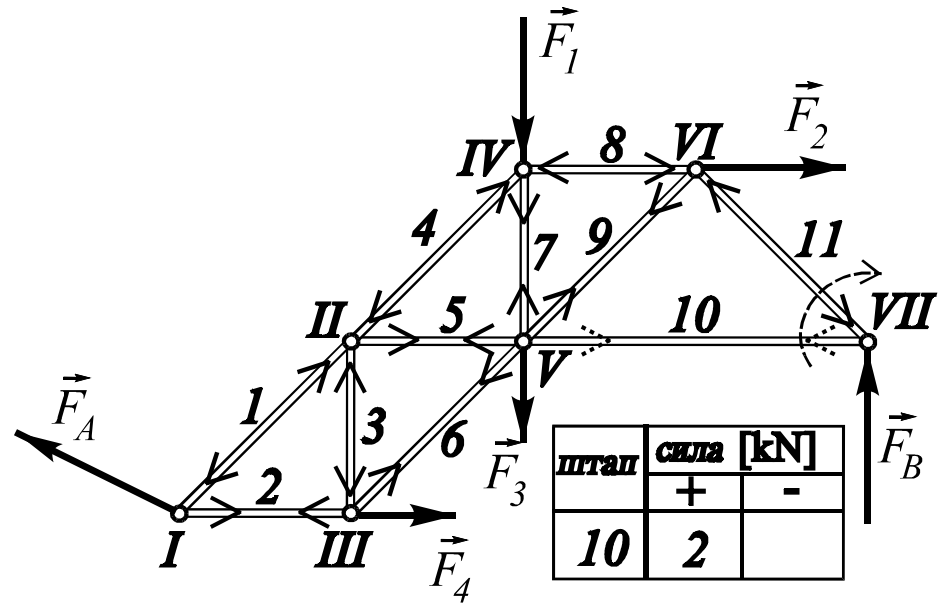
Rešavanje čvora IV:



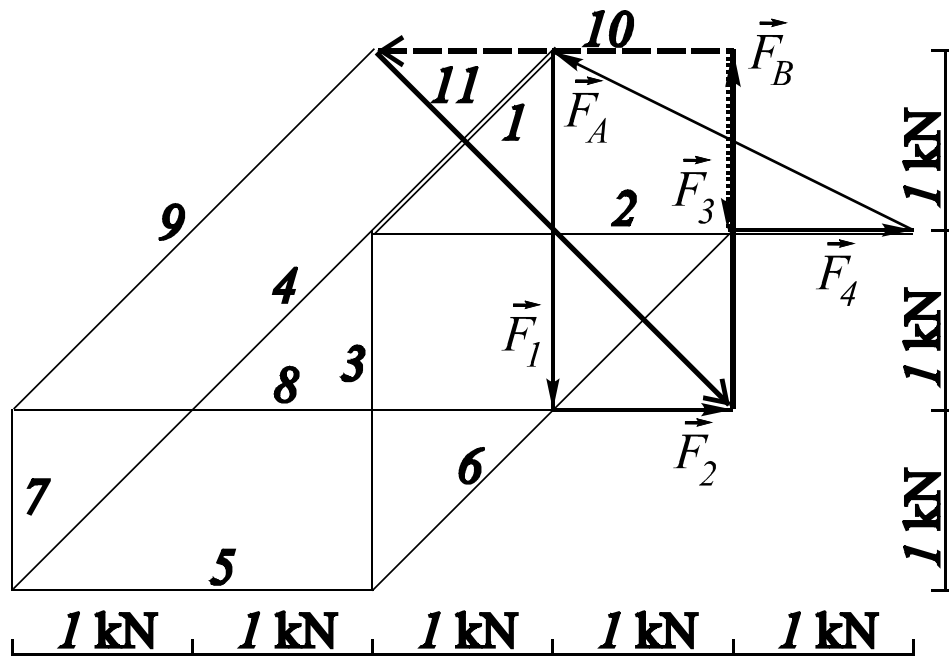


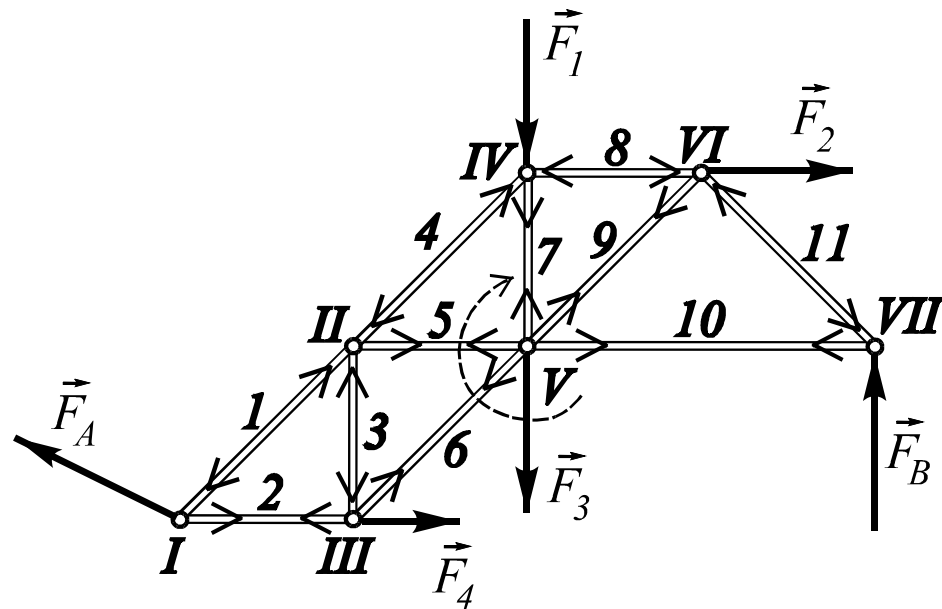
Rešavanje čvora VI:



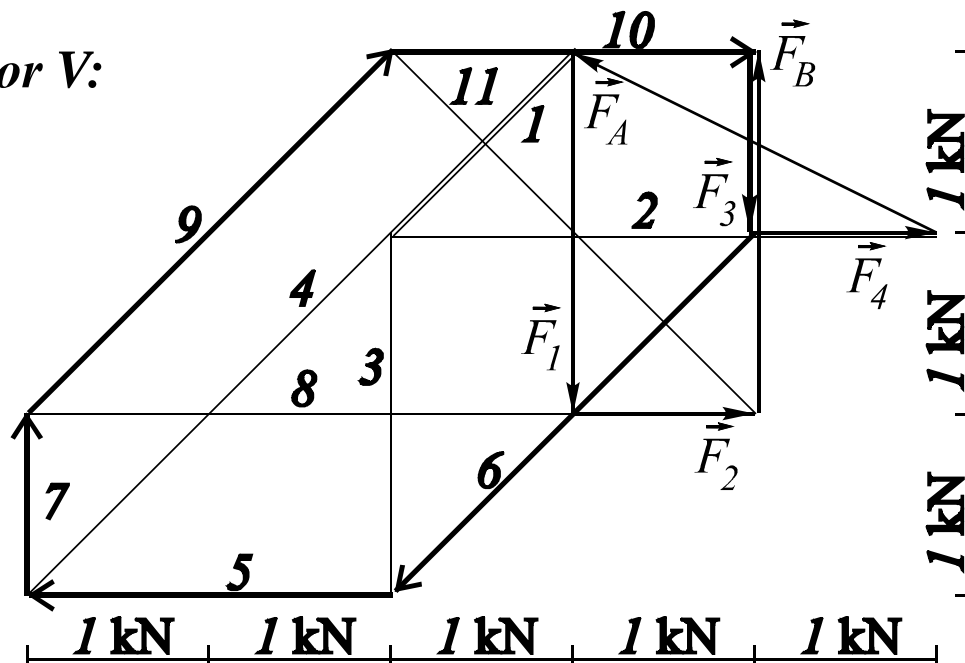


Rešavanje čvora VII:



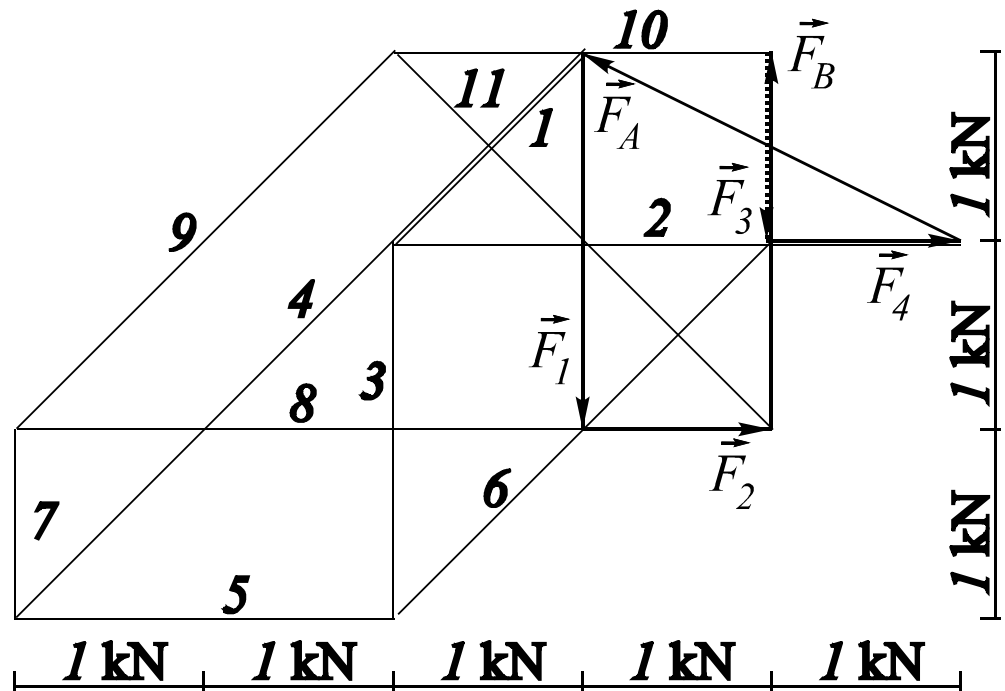


Provera poligona sila za čvor V:



Konačni oblik Kremoninog plana sila kao i tabelarni prikaz sila u štapovima

штап	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
сила [kN]	+		3		2	$2\sqrt{2}$	1		$2\sqrt{2}$	2	
	-	$\sqrt{2}$	2	$3\sqrt{2}$				3			$2\sqrt{2}$



III metoda: Riterov postupak

Riterov postupak je analitički metod za određivanje sila u onim štapovima preko kojih se zamišlja da je rešetka presečena na dva dela (levi i desni, donji i gornji itd.). Ovaj metod, kojim se određuju sile u presečenim štapovima, zasnovan je na pisanju analitičkih uslova ravnoteže za jedan (teorijski, ma koji) od tih delova rešetke. Rešetka se seče preko ona tri štapa za koje se želi da se odrede sile. Ne sme rešetka da bude presečena preko više od tri štapa jer bi takav problem bio statički neodređen pošto bi bilo više nepoznatih od nezavisnih uslova ravnoteže.

Sl.2

$$\sum M_{VI} = -S_{10} \cdot 1 + F_B \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow S_{10} = 2 \text{ kN}$$

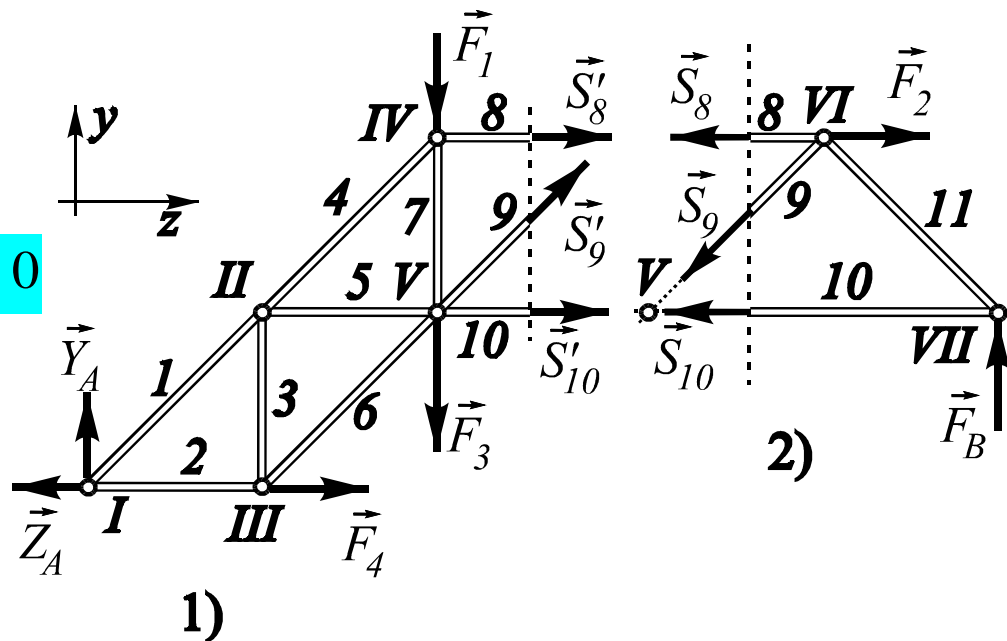
$$\sum M_{VI} = S_8 \cdot 1 - F_2 \cdot 1 + F_B \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow S_8 = -3 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = -S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_B = 0$$

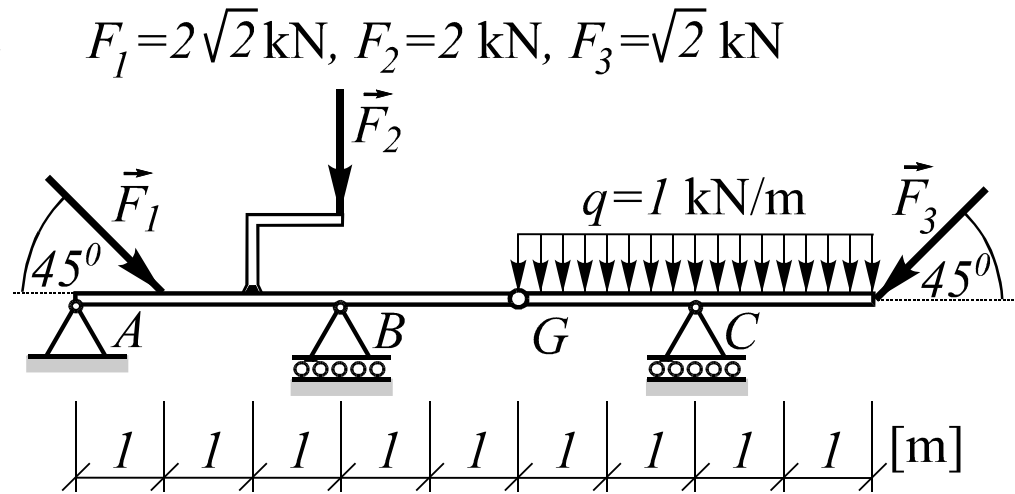
$$\Rightarrow S_9 = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

Primer 7.1



Prvi primer Gerberovog nosača

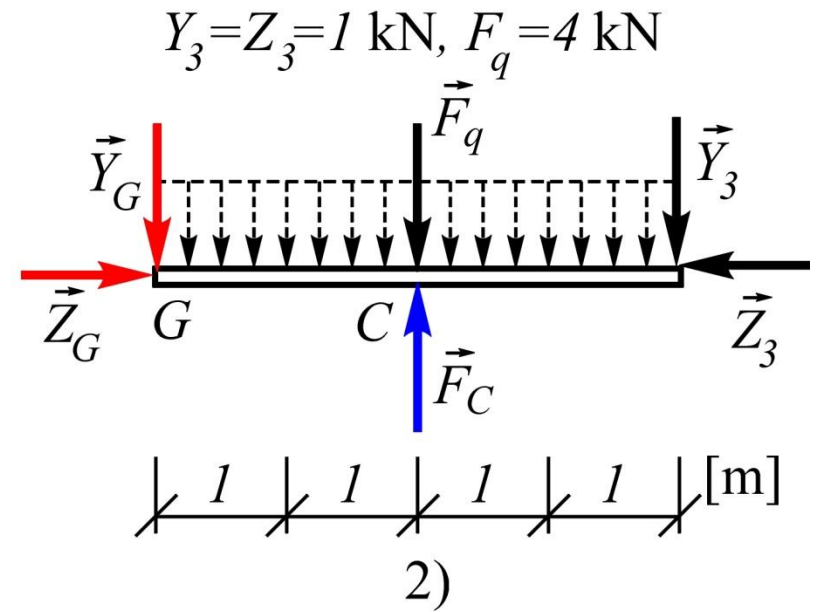
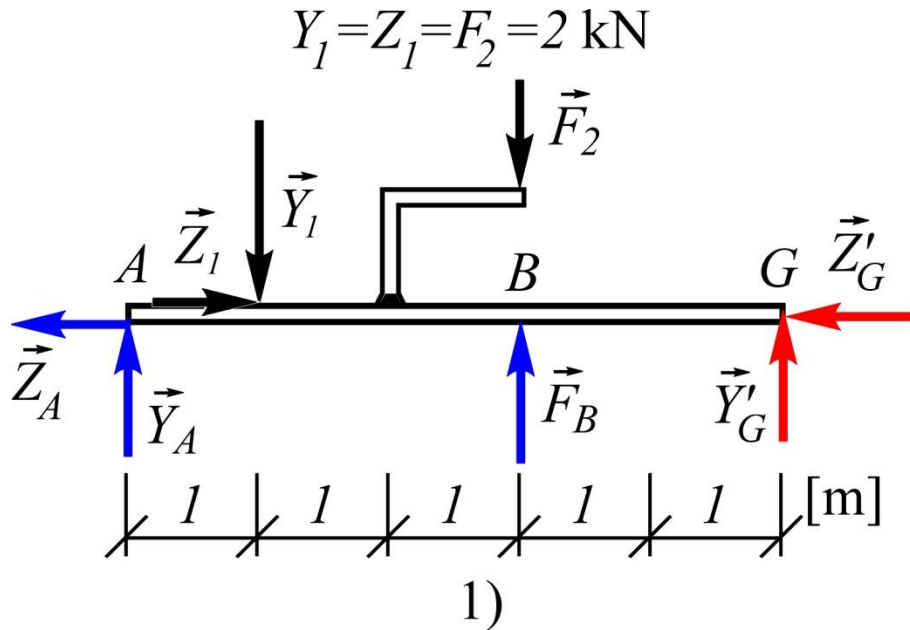
Za dati Gerberov nosač,
rastavljanjem na mestu zgloba,
analitičkim putem odrediti
otrore oslonaca i sile u zglobu a
zatim nacrtati dijagrame
presečnih sila.



Prvo se rastavljanjem na mestu zgloba (dekompozicijom), kao što se to radi kod sistema krutih tela, određuju otpori oslonaca i reakcije u zglobu. Nakon toga se u karakterističnim tačkama određuju napadni momenti kako bi se dijagram napadnog momenta mogao što bolje nacrtati. Za što bolje crtanje dijagrama napadnog momenta korisno je i to što se prvo crta dijagram transverzalnih sila zbog njihove povezanosti formulom:

$$F_T = \frac{dM}{dz}$$

Razmera za sve dijagrame, koja se upisuje na crtežu, usvaja se proizvoljno



Sl.2

$$\sum M_{Gi} = F_C \cdot 2 - F_q \cdot 2 - Y_3 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_C = 6 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = -Y_G - F_q + F_C - Y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_G = 1 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = Z_G - Z_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_G = 1 \text{ kN}$$

Sl.1

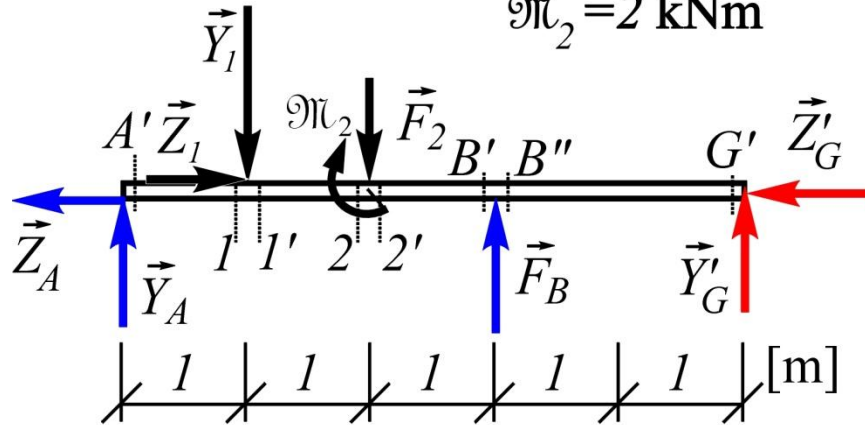
$$\sum M_{Ai} = -Y_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 3 + F_B \cdot 3 + Y_G \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 1 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = Y_A - Y_1 - F_2 + F_B + Y_G = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 2 \text{ kN}$$

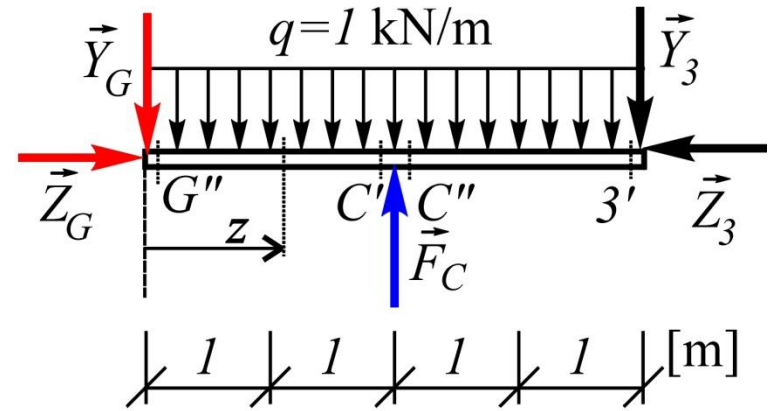
$$\sum Z_i = -Z_A + Z_1 - Z_G = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = 1 \text{ kN}$$

$$Y_1 = Z_1 = F_2 = Y_A = 2 \text{ kN}, \quad Z_A = F_B = 1 \text{ kN}$$

$$\mathfrak{M}_2 = 2 \text{ kNm}$$



$$Y_3 = Z_3 = Y_G = Z_G = 1 \text{ kN}, \quad F_C = 6 \text{ kN}$$



$$M_{A'} = \sum M_{A'i}^l = 0$$

1)

NAPADNI MOMENTI

2)

$$M_1 = M_{1'} = \sum M_{1i}^l = Y_A \cdot 1 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_2 = \sum M_{2i}^l = Y_A \cdot 2 - Y_1 \cdot 1 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_{2'} = \sum M_{2'i}^l = Y_A \cdot 2 - Y_1 \cdot 1 + \mathfrak{M}_2 = 4 \text{ kNm}$$

$$M_{G'} = \sum M_{G'i}^d = 0$$

$$M_{B'} = M_{B''} = \sum M_{B'i}^d = Y_G \cdot 2 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_{G''} = \sum M_{G''i}^l = 0$$

$$M_{C'} = M_{C''} = \sum M_{C'i}^l = -Y_G \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -4 \text{ kNm}$$

$$M_{3'} = \sum M_{3'i}^d = 0$$

$$M = \begin{cases} -Y_G \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ -Y_G \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + F_C \cdot (z - 2), & 2 < z < 4 \end{cases}$$

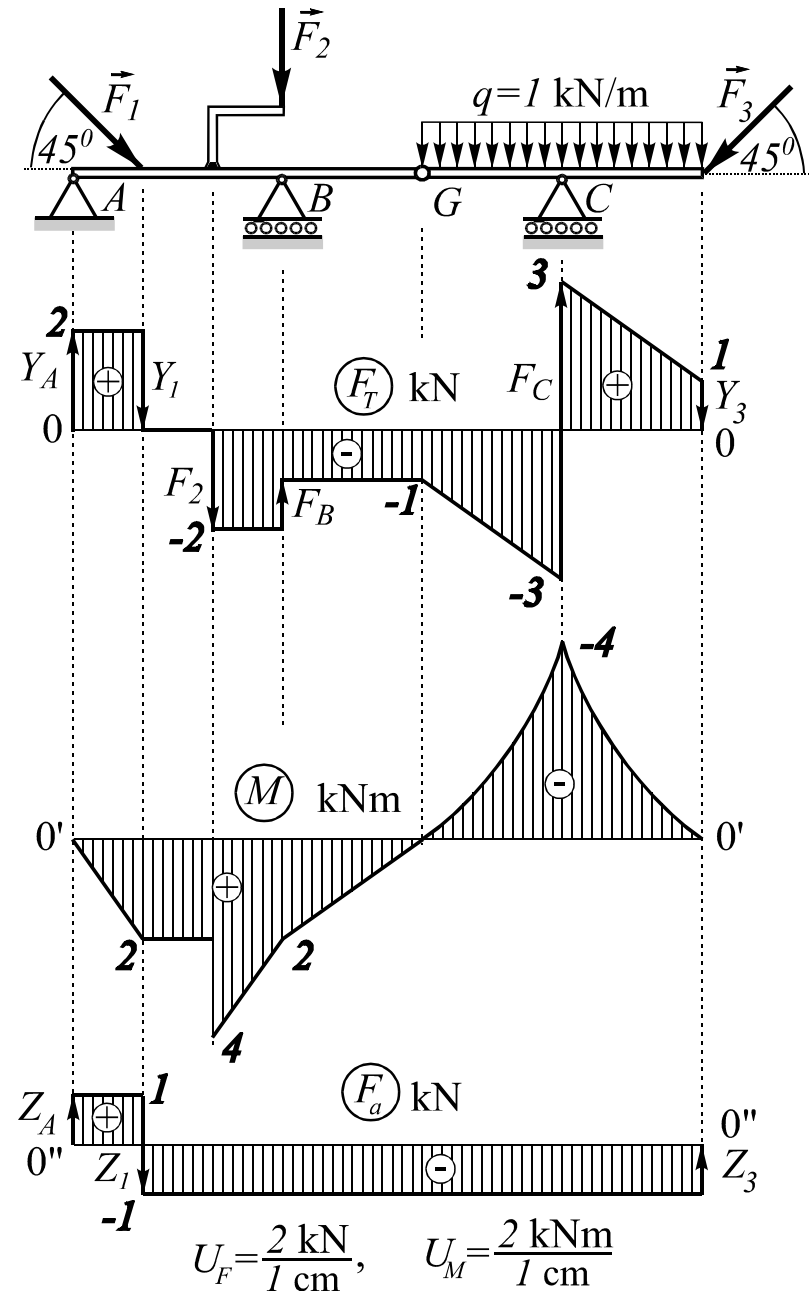
$$\Rightarrow M(z) = \begin{cases} -\frac{z^2}{2} - z, & \text{za } 0 < z < 2 \\ -\frac{z^2}{2} + 5z - 12, & \text{za } 2 < z < 4 \end{cases}$$

TRANSVERZALNE SILE

Za drugi deo grede (opterećen
ravnomernim kontinualnim
opterećenjem), funkcija transverzalne
sile, u skladu sa izvedenim formulama,
ima oblik:

$$F_T(z) = \begin{cases} -z - 1, & \text{za } 0 < z < 2 \\ -z + 5, & \text{za } 2 < z < 4 \end{cases}$$

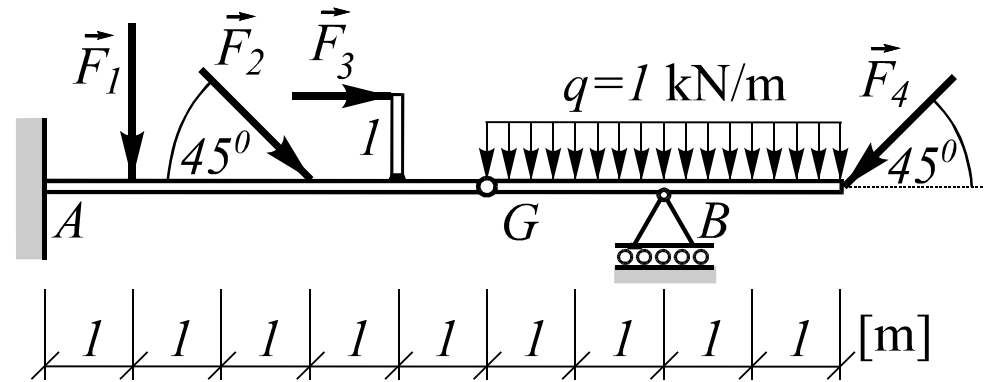
Dijagrami presečnih sila za ceo nosač



Drugi primer Gerberovog nosača

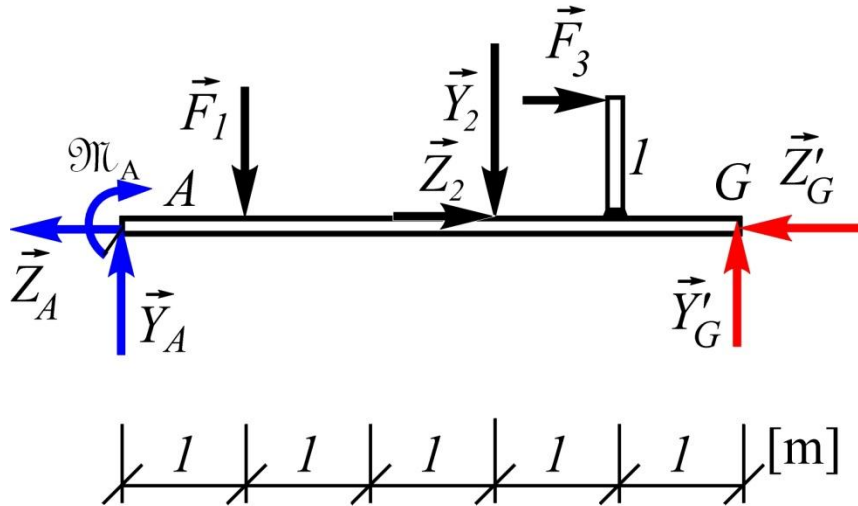
Za dati Gerberov nosač,
rastavljanjem na mestu
zgloba, analitičkim putem
odrediti reakcije spoljašnjih
veza i sile u zglobu a zatim
nacrtati dijagrame presečnih
sila.

$$F_1 = 2 \text{ kN}, F_2 = 2\sqrt{2} \text{ kN}, F_3 = 1 \text{ kN}, F_4 = 2\sqrt{2} \text{ kN}$$

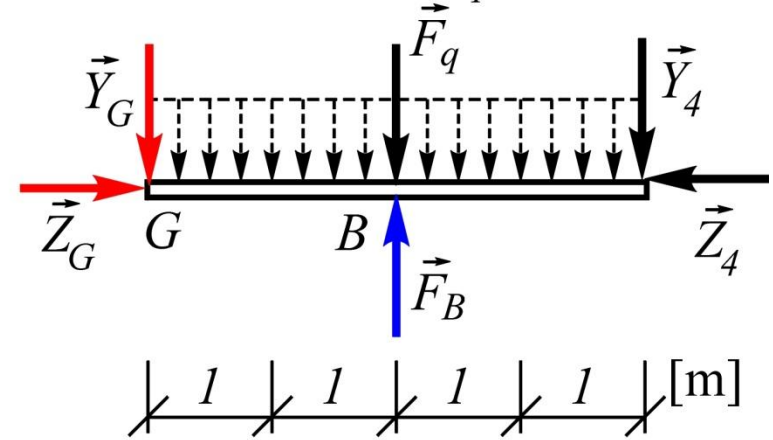


$$F_1 = Y_2 = Z_2 = 2 \text{ kN}, F_3 = 1 \text{ kN}$$

$$Y_4 = Z_4 = 2 \text{ kN}, F_q = 4 \text{ kN}$$



1)



2)

$$\sum M_{Gi} = F_B \cdot 2 - F_q \cdot 2 - Y_4 \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_B = 8 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = -Y_G - F_q + F_B - Y_4 = 0 \Rightarrow Y_G = 2 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = Z_G - Z_4 = 0 \Rightarrow Z_G = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_{Ai} = -F_1 \cdot 1 - Y_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 1 + Y_G \cdot 5 - M_A = 0$$

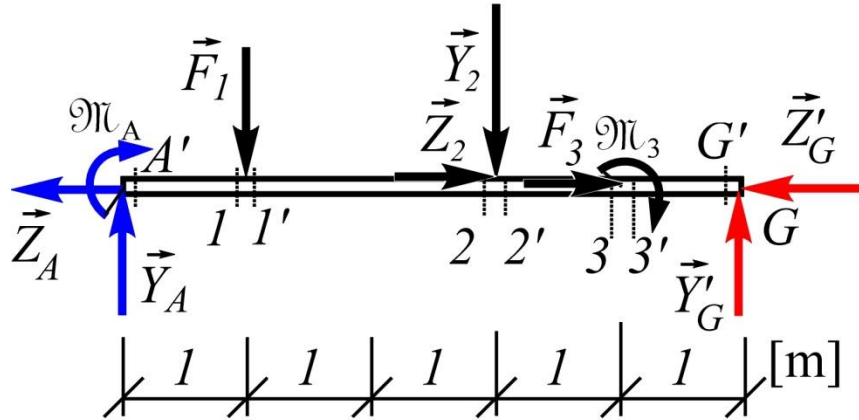
$$\Rightarrow \mathfrak{M}_A = 1 \text{ kNm}$$

$$\sum Y_i = Y_A - F_1 - Y_2 + Y_G = 0 \Rightarrow Y_A = 2 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + Z_2 + F_3 - Z_G = 0 \Rightarrow Z_A = 1 \text{ kN}$$

$$F_1 = Y_2 = Z_2 = Y_A = 2 \text{ kN}, F_3 = Z_A = 1 \text{ kN}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_A = 1 \text{ kNm}$$



1)

$$M_{A'} = \sum M_{A'i}^l = \mathfrak{M}_A = 1 \text{ kNm}$$

$$M_1 = M_{1'} = \sum M_{1i}^l = Y_A \cdot 1 + \mathfrak{M}_A = 3 \text{ kNm}$$

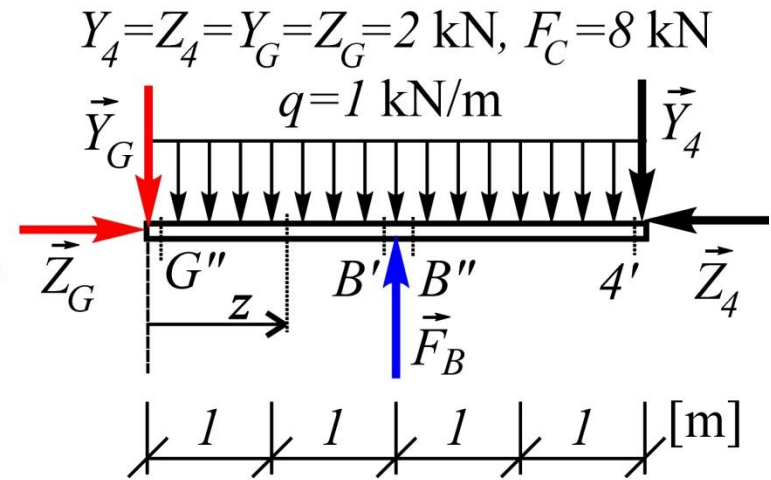
$$M_{G'} = \sum M_{G'i}^d = 0$$

$$M_{3'} = \sum M_{3'i}^d = Y_G \cdot 1 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_3 = \sum M_{3i}^d = Y_G \cdot 1 - \mathfrak{M}_3 = 1 \text{ kNm}$$

$$M_2 = M_{2'} = \sum M_{2i}^d = Y_G \cdot 2 - \mathfrak{M}_3 = 3 \text{ kNm}$$

$$M = \begin{cases} -Y_G \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ -Y_G \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + F_B \cdot (z - 2), & 2 < z < 4 \end{cases}$$



2)

$$M_{G''} = \sum M_{G''i}^l = 0$$

$$M_{B'} = M_{B''} = \sum M_{B'i}^l = -Y_G \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ kNm}$$

$$M_{4'} = \sum M_{4'i}^d = 0$$

$$\Rightarrow M(z) = \begin{cases} -\frac{z^2}{2} - 2z, & \text{za } 0 < z < 2 \\ -\frac{z^2}{2} + 6z - 16, & \text{za } 2 < z < 4 \end{cases}$$

Provera usklađenosti dijagrama napadnog momenta sa dijagramom transverzalnih sila

Na prvom metru transverzalna sila je pozitivna a moment idući s leva na desno (u smeru porasta koordinate z) raste što je OK.

Naredna dva metra transverzalna sila je nula a moment je konstantan što je OK.

Sledeći metar transverzalna sila je negativna a moment opada što je OK.

Još jedan metar transverzalna sila je negativna sa istom vrednošću kako kod prethodnog metra a moment takođe opada sa istim nagibom što je OK.

Zatim je transverzalna sila negativna i promenljiva a moment opada sa promenljivim nagibom što je OK.

Na kraju transverzalna sila je pozitivna i promenljiva a moment raste sa promenljivim nagibom što je OK.

