Primer 1.1 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = t$ i $y = t^2$ (t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu u trenutku $t=1s$? Odrediti ubrzanje u proizvoljnom trenutku?

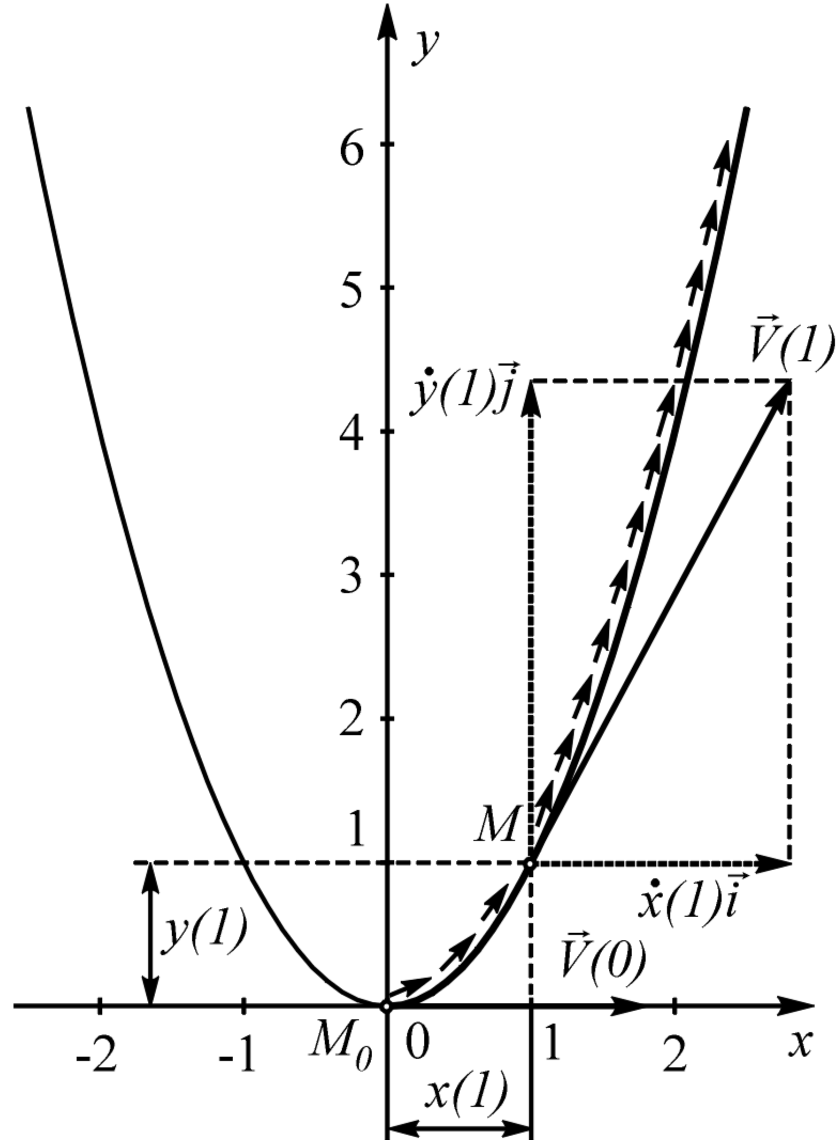
Eliminacijom vremena t iz jednačina kretanja dobija se da je jednačina linije putanje parabola $y = x^2$

Početni položaj:

$$x(0) = 0, y(0) = 0 \Rightarrow M_0(0,0)$$

Putanja (trajektorija) je samo desna grana parabole.

Oblast kretanja: $x \geq 0,\ y \geq 0$



Projekcije brzine i ubrzania u funkciji vremena dobijaju se preko izvoda od jednačina kretanja: $x = t,\ y = t^2$

$\dot{x}(t) = 1,\ \dot{y}(t) = 2t,\ \ddot{x}(t) = 0,\ \ddot{y}(t) = 2$

Brzina u trenutku *t=1s* (prikazana je na slici sa prethodnog slajda) :

$$\dot{x}(1) = 1,\ \dot{y}(1) = 2 \ \Rightarrow \vec{V}(1) = 1\vec{i} + 2\vec{j},\quad V(1) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\ m/s$$

Položaj u trenutku *t=1s* :

$$x(1) = 1,\ y(1) = 1 \Rightarrow \ M(1,1)$$

Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$$\vec{a}(t) = 2\vec{j},\ a(t) = 2\ m/s^2$$

Vektor ubrzanja je konstantan, paralelan sa *y* osom i usmeren naviše.

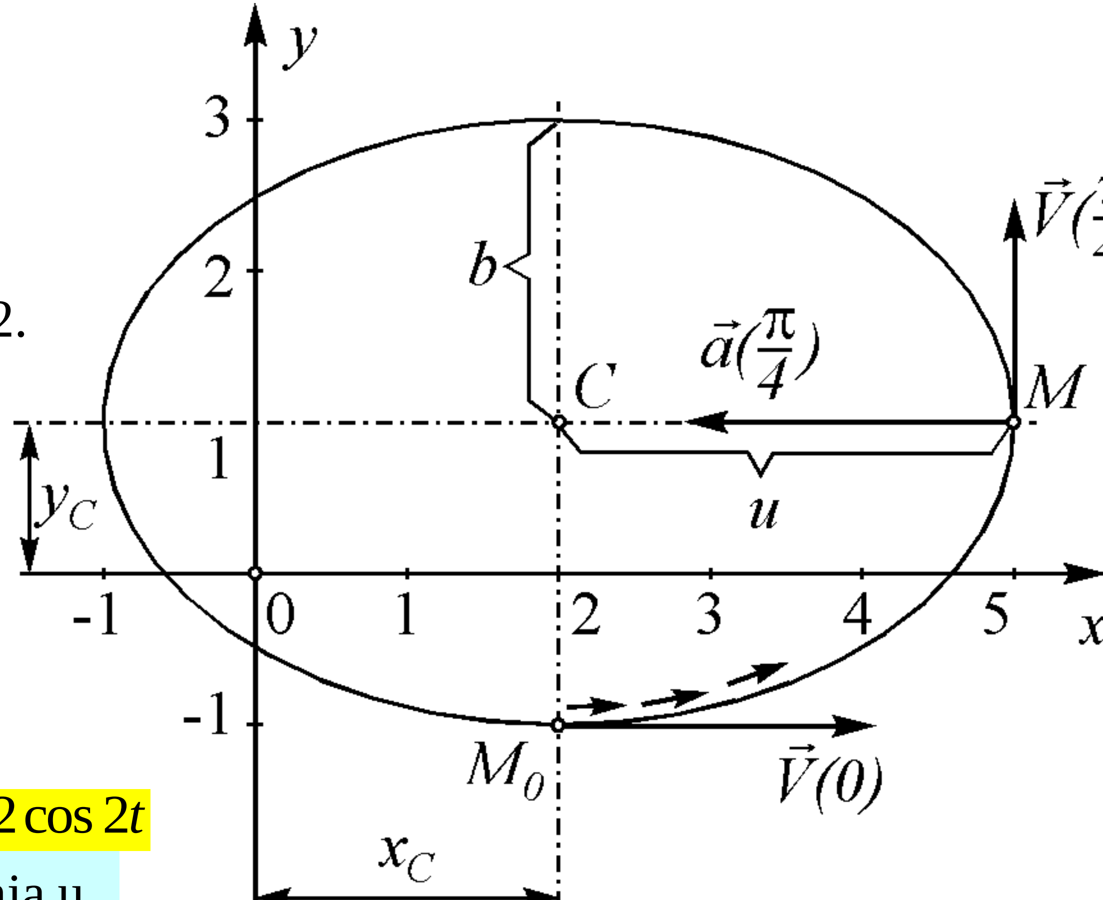
Primer 1.2 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = 2 + 3\sin 2t$ i $y = 1 - 2\cos 2t$ (*t* je u sekundama a *x* i *y* su u metrima). Odrediti trajektoriju i skicirati je? Odrediti oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t = (\pi/4)$ *s*?

Jednačinu putanje dobićemo preuređenjem, kvadriranjem pa sabiranjem jednačina kretanja: $\dfrac{x-2}{3} = \sin 2t,\quad \dfrac{y-1}{2} = -\cos 2t \quad \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(x-1)^2}{2^2} = 1$

Jednačina elipse

$$\frac{(x-x_C)^2}{u^2}+\frac{(x-y_C)^2}{b^2}=1$$

$x_C=2,\ y_C=1,$ u=3 i b=2.



Oblast kretanja:

$-1\le x\le 5,$ $-1\le y\le 3$

Početni položaj:

$x(0)=2,\ y(0)=-1\Rightarrow$

$M_0(2,-1)$

$x=2+3\sin 2t$ $y=1-2\cos 2t$

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$\dot{x}(t)=6\cos 2t$

$\dot{y}(t)=4\sin 2t$

$\ddot{x}(t)=-12\sin 2t$

$\ddot{y}(t)=8\cos 2t$

Položaj, brzina i ubrzanje u trenutku $t=(\pi/4)$

$x(\pi/4)=5,\ y(\pi/4)=1$

$\dot{x}(\pi/4)=0$

$\dot{y}(\pi/4)=4$

$\vec{V}(\pi/4)=4\vec{j}$ $V(\pi/4)=4\ m/s$

$\ddot{x}(\pi/4)=-12$

$\ddot{y}(\pi/4)=0$

$\vec{a}(\pi/4)=-12\vec{i}$ $a(\pi/4)=12\ m/s^2$

Primer 1.3 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = 2t^2 - 1$ i $y = t^2 + 2$ (*t* je u sekundama a *x* i *y* su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku *t=1s*?

Eliminacije vremena *t* (određivanje jednačine linije putanje)

$y = t^2 + 2 \Rightarrow t^2 = y - 2,$ $x = 2t^2 - 1 = 2(y-2) - 1 \Rightarrow x = 2y - 5$

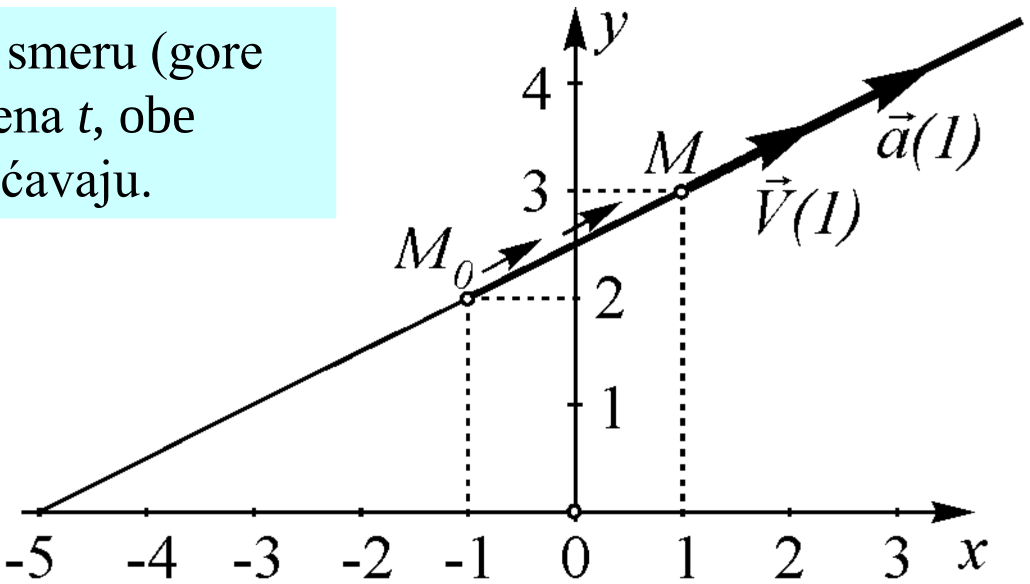
y	0	3
x	-5	1

Početni položaj:

$x(0) = -1,\ y(0) = 2 \Rightarrow M_0(-1,2)$

Tačka se kreće stalno u jednom smeru (gore desno) pošto sa porastom vremena *t*, obe koordinate i *x* i *y* se stalno povećavaju.

Zbog toga je trajektorija poluprava (podebljani deo linije putanje) a oblast kretanja je $x \geq -1,\ \ y \geq 2$



Položaj tačke u trenutku *t=1s*

$x(1) = 1,\ y(1) = 3 \Rightarrow M(1,3)$

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$\dot{x}(t) = 4t,\ \ \dot{y}(t) = 2t,\ \ \ddot{x}(t) = 4,\ \ \ddot{y}(t) = 2$

odakle se vidi da je vektor ubrzanja tokom kretanja konstantan

$\vec{a}(t) = 4\vec{i} + 2\vec{j} = \overrightarrow{const.} \Rightarrow a(t) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\ m/s^2$

Brzina u trenutku *t=1s*

$\dot{x}(1) = 4,\ \dot{y}(1) = 2 \Rightarrow \vec{V}(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j},\ V(1) = 2\sqrt{5}\ m/s^2$

Primer 1.4 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = \sin t$ i $y = \cos 2t$ (t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku? Odrediti trenutak vremena $\bar{t}$ u kojem tačka prvi put menja smer kretanja?

Za dobijanje jednačine linije putanje (odnosno, za eliminaciju vremena *t* iz jednačina kretanja) iskoristimo trigonometrijske identitete prema kojima dobijamo da je linija putanje parabola:

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t,\quad \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \Rightarrow \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \ \Rightarrow\ y = 1 - 2x^2$

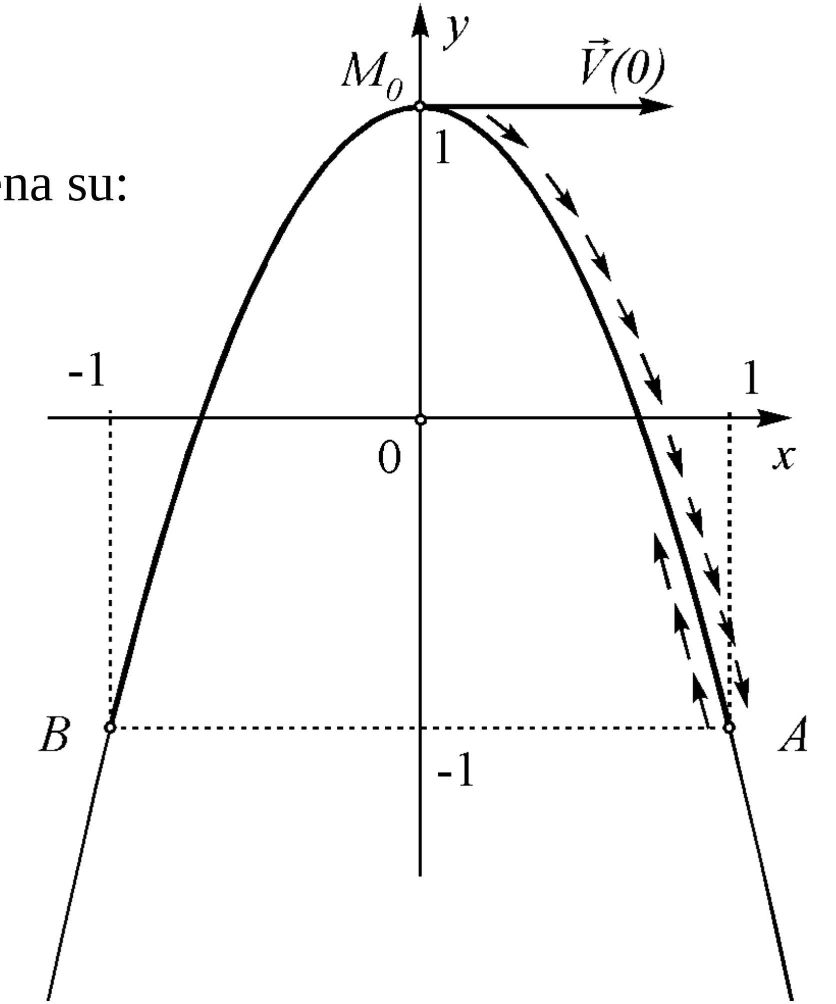
Zbog $-1 \le \sin t \le 1, -1 \le \cos 2t \le 1$ oblast kretanja je $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$

Tačka osciluje duž parabole a na mestima A i B menja smer kretanja.

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$\dot{x}(t) = \cos t,\ \ \dot{y}(t) = -2\sin 2t$

$\ddot{x}(t) = -\sin t,\ \ddot{y}(t) = -4\cos 2t$



Brzina u proizvoljnom trenutku:

$\vec{V}(t) = \cos t\,\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}$

$V(t) = \sqrt{\cos^2 t + (2\sin 2t)^2}$

Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$\vec{a}(t) = -\sin t\,\vec{i} - 4\cos 2t\,\vec{j}$

$a(t) = \sqrt{\sin^2 t + (4\cos 2t)^2}$

Početni položaj:

$x(0) = 0,\ y(0) = 1 \Rightarrow M_0(0,1)$

Zbog $\dot{x}(0) = 1 \geq 0$ tačka je započela kretanje u desnu stranu.

Na mestu prve promene smera kretanja (A) brzina tačke jednaka je nuli:

$\dot{x}(\bar{t}) = \cos\bar{t} = 0,\ \ \dot{y}(\bar{t}) = -2\sin 2\bar{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = (\pi/2)\ s$

Primer 1.5 U primeru 1.1 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku vremena t=1 s.

S obzirom da je u tom trenutku vremena

$$\dot{x}=1\, m/s,\ \dot{y}=2\, m/s,\ V=\sqrt{5}\, m/s,$$

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=2\, m/s^2$$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t=\left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right|=\frac{4}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2}$$

S obzirom da je u tom trenutku

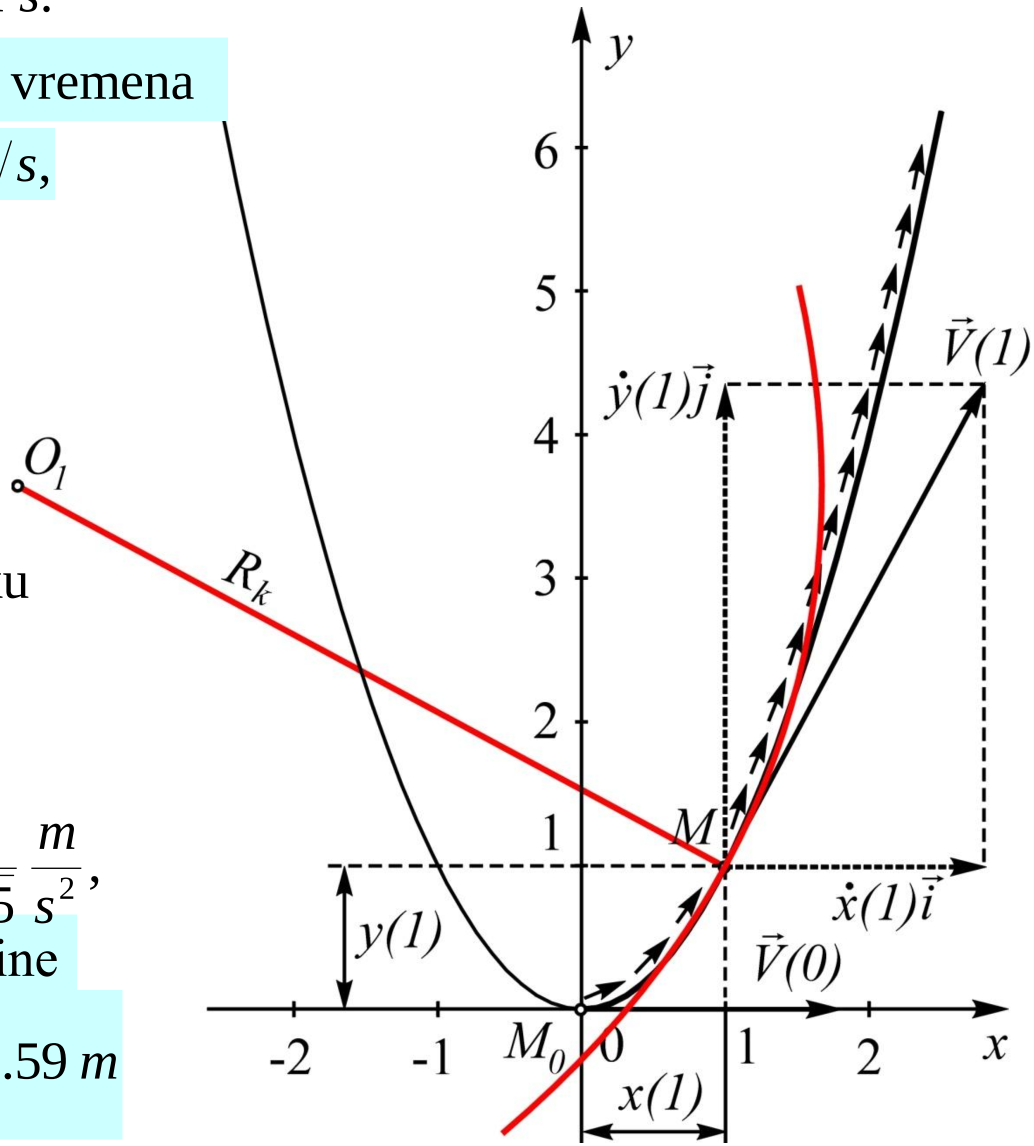
$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=2\, m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

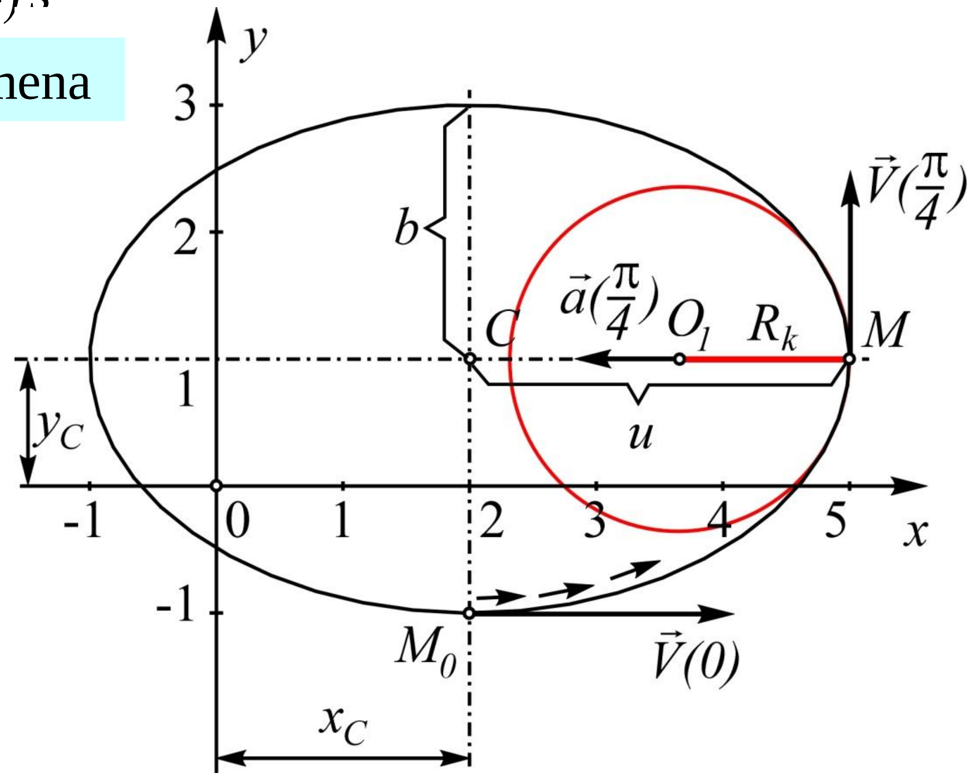
$$a_n=\sqrt{a^2-|a_t|^2}=\sqrt{4-\frac{16}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k=\frac{V^2}{a_n}=\frac{5}{\left(2/\sqrt{5}\right)}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\, m\cong 5.59\, m$$



Primer 1.6 U primeru 1.2 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku vremena $t = (\pi/4)\, s$



S obzirom da je u tom trenutku vremena

$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 4\, m/s,\quad V = 4\, m/s,$

$\ddot{x} = -12\, m/s^2,\ \ddot{y} = 0,$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = 0$$

S obzirom da je u tom trenutku

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{12^2 + 0^2} = 12\, m/s^2$$

normalno ubrzanje iznosi

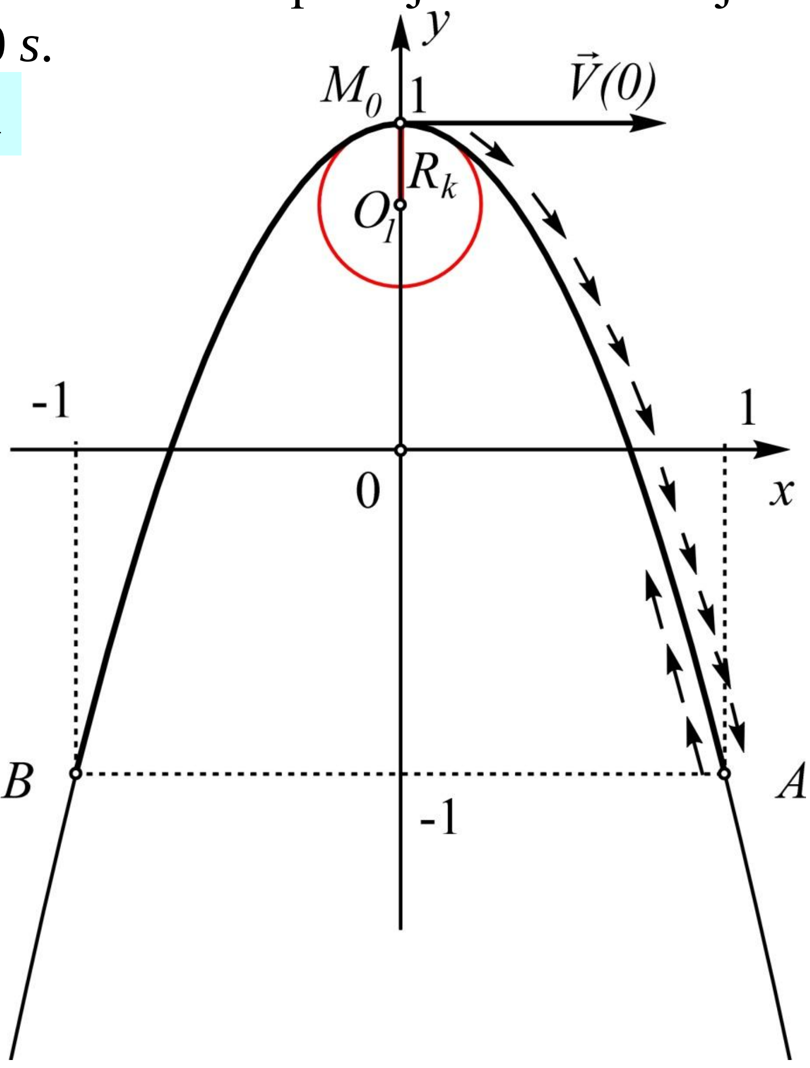
$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{12^2 - 0^2} = 12\, \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}\, m \cong 1.33\, m$$

Do zaključka da je $a_t = 0,\ a = a_n = 12\, m/s^2$ itd. moglo se doći i na osnovu same slike

Primer 1.7 U primeru 1.4 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara početnom trenutku vremena t=0 s.



S obzirom da je u tom trenutku vremena

$$\dot{x} = 1\ m/s,\ \dot{y} = 0,\ V = 1\ m/s,$$

$$\ddot{x} = 0,\ \ \ddot{y} = -4\ m/s^2,$$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = 0.$$

S obzirom da je u tom trenutku

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4\ m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{4^2 - 0} = 4\ \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}\ m.$$

I ovde se moglo doći do zaključka da je $a_t = 0$ itd. na osnovu same slike