1.zadatak

Jednačine kretanja tačke u ravni su: $x = -1 - 3\sin 2t, \quad y = 1 + 2\cos 2t.$ Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=\pi/4$? Vektore dobijenih brzina i ubrzanja skicirati na putanji. Odrediti i poluprečnik krivine putanje u trenutku $t_1=\pi/4$?

Preuređene jednačine kretanja, pripremljene za kvadriranje pa sabiranje, odnosno, eliminaciju vremena t

$$\frac{x-(-1)}{3} = -\sin 2t$$

$$\frac{y-1}{2} = \cos 2t$$

Dobijena linija putanje (i putanja) je elipsa čija se jednačina može zapisati ovako

$$\frac{[x-(-1)]^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$$

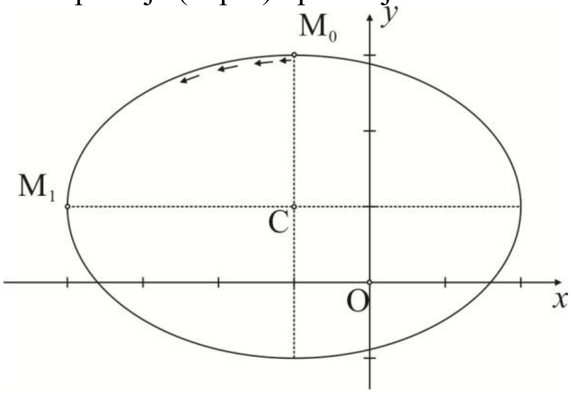
Položaji tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=\pi/4$

$$x(0) = -1;\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4;$$

$$y(0) = 3;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$M_0(-1,3);\ M_1(-4,1);$$

Slica putanje (elipse) i položaja tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=\pi/4$



Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena

$$\dot{x}(t) = -6\cos 2t$$

$$\dot{y}(t) = -4\sin 2t$$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena

$$\ddot{x}(t) = 12\sin 2t$$

$$\ddot{y}(t) = -8\cos 2t$$

Brzina tačke u trenutku $t_0=0$

$$\dot{x}(0) = -6$$

$$\dot{y}(0) = 0;\quad \vec{V}(0) = -6\vec{i};\quad V(0) = 6\ m/s$$

Brzina tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4;\quad \vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\vec{j};\quad V\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\,m/s$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_0=0$

$$\ddot{x}(0)=0$$

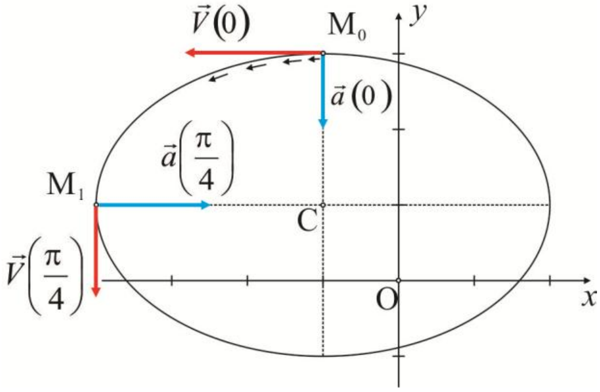
$$\ddot{y}(0)=-8;\quad \vec{a}(0)=-8\vec{j};\quad a(0)=8\,m/s^2$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)=12$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right)=12\vec{i};\quad a\left(\frac{\pi}{4}\right)=12\,m/s^2$$

Skica brzina i ubrzanja na putanji



Određivanje poluprečnika krivine putanje u trenutku $t_1=\pi/4$ (sve napisane veličine se odnose na trenutak vremena $t_1=\pi/4$)

$$|a_t|=0;\quad |a_t|=\left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right|=\left|\frac{0\cdot 12+(-4)\cdot 0}{4}\right|=0$$

$$a_n=\sqrt{a^2-|a_t|^2}=\sqrt{12^2-0^2}=12\,m/s^2$$

$$R_k=\frac{V^2}{a_n}=\frac{4^2}{12}=\frac{4}{3}\,m\approx 1{,}33\,m$$

2.zadatak

$$x=-t^2$$

$$y=-t^4+2$$

Kvadriranjem prve jednačine imamo da je

$$t^4=x^2$$

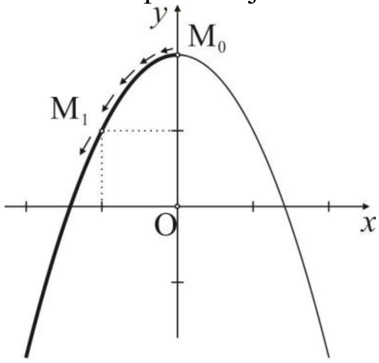
Uvrštavanjem dobijenog u drugu jednačinu dobija se da je linija putanje parabola čija je jednačina

$$y=-x^2+2$$

Položaji tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=1$ s

$x(0)=0;\ x(1)=-1;$
$y(0)=2;\ y(1)=1;$
$M_0(0,2);\ M_1(-1,1);$

Slika linije putanje (parabole), putanje (podebljanog dela parabole) i položaja tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=1$ s. Tačka je započela kretanje u levu stranu, i stalno se kreće na levo, jer prva jedenačina kretanja kaže da se povećanjem vremena t x koordinata tačke smanjuje zbog predznaka -.



Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena
$\dot{x}(t)=-2t$
$\dot{y}(t)=-4t^3$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena
$\ddot{x}(t)=-2$
$\ddot{y}(t)=-12t^2$
Primetimo da se projekcija ubrzanja na osu x ne menja sa vremenom

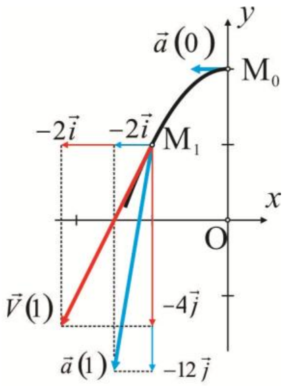
Brzina tačke u trenutku $t_0=0$
$\dot{x}(0)=0$
$\dot{y}(0)=0;\quad \vec{V}(0)=\vec{0};\quad V(0)=0$
Primetimo da je tačka započela kretanje bez početne brzine

Brzina tačke u trenutku $t_1=1$ s
$\dot{x}(1)=-2$
$\dot{y}(1)=-4;\quad \vec{V}(1)=-2\vec{i}-4\vec{j};\quad V(1)=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ m/s$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_0=0$
$\ddot{x}(0)=-2$
$\ddot{y}(0)=0;\quad \vec{a}(0)=-2\vec{i};\quad a(0)=2\ m/s^2$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_1=1$ s
$\ddot{x}(1)=-2$
$\ddot{y}(1)=-12;\quad \vec{a}(1)=-2\vec{i}-12\vec{j};\quad a(1)=\sqrt{(-2)^2+(-12)^2}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}\ m/s^2$

Skica brzina i ubrzanja na putanji



Određivanje poluprečnika krivine putanje u trenutku t_1=1 s (sve napisane veličine se odnose na trenutak vremena t_1=1 s)

$$|a_t| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = \left|\frac{(-2)\cdot(-2)+(-4)\cdot(-12)}{2\sqrt{5}}\right| = \frac{26}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2-|a_t|^2} = \sqrt{148-\left(\frac{26}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{148-135{,}2} = \sqrt{12{,}8} = 3{,}5777\,m/s^2$$

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{20}{3{,}5777}\,m \approx 5{,}59\,m$$

3.zadatak

$$x = \sin t$$

$$y = \cos^2 t - 1$$

S obzirom da je $\sin t = x$ i $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$, odnosno, eliminacijom vremena t, imamo

$$y = 1-\sin^2 t - 1 = -\sin^2 t = -x^2$$

Dakle, dobijena linija putanje je parabola čija je jednačina

$$y = -x^2$$

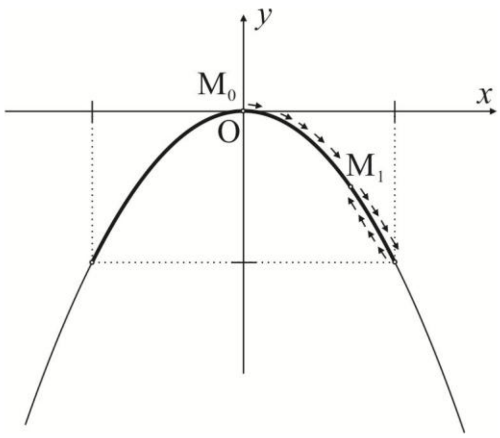
Položaji tačke u trenucima t_0=0 i t_1=π/4

$$x(0) = 0;\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$y(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$M_0(0{,}0);\ M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right);$$

Slika linije putanje (parabole), zatim same putanje (podebljani deo parabole) i položaja tačke u trenucima t_0=0 i t_1=π/4



Ovde tačka osciluje duž putanje. Započinje kretanje u desnu stranu jer je $x = \sin t$ pošto u početku sa porastom vremena t raste $\sin t$ pa tada mora i x koordinata da raste. Inače, ovde je dobro primetiti da zbog $x = \sin t$ oblast kretanja po x-u je $-1 \le x \le 1$ jer je $-1 \le \sin t \le 1$. Slično tome, oblast kretanja po y-u je $-1 \le y \le 0$ jer je $0 \le \cos^2 t \le 1$. To znači da se ovde događa i zaustavljanje pa promena smera kretanja. Zbog toga ovo kretanje i nazivamo oscilatornim.

Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena su

$$\dot{x}(t) = \cos t$$

$$\dot{y}(t) = 2\cos t \cdot (-\sin t) = -2\sin t \cos t = -\sin 2t$$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena su

$$\ddot{x}(t) = -\sin t$$

$$\ddot{y}(t) = -2\cos 2t$$

Brzina tačke u trenutku $t_0=0$ (to se može reći i "Brzina tačke u početnom trenutku")

$$\dot{x}(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 0; \quad \vec{V}(0) = 1\vec{i}; \quad V(0) = 1\, m/s$$

Brzina tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1; \quad \vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 1\vec{j}; \quad V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\, m/s$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_0=0$

$$\ddot{x}(0) = 0$$

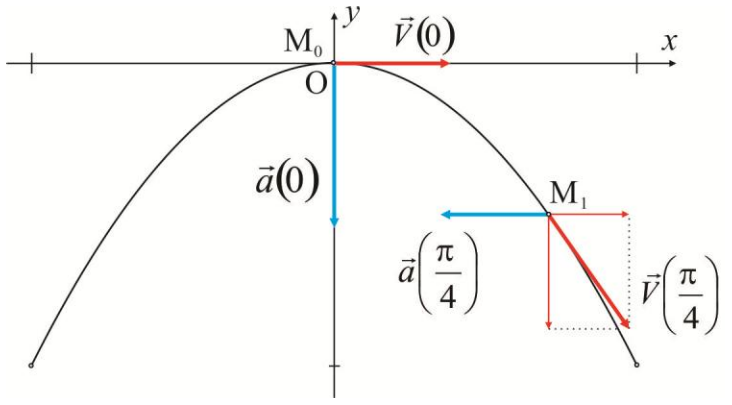
$$\ddot{y}(0) = -2; \quad \vec{a}(0) = -2\vec{j}; \quad a(0) = 2\, m/s^2$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}; \quad a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, m/s^2$$

Skica brzina i ubrzanja na putanji



Određivanje poluprečnika krivine putanje u trenutku $t_1=\pi/4$ (sve napisane veličine se odnose na trenutak vremena $t_1=\pi/4$)

$$|a_t| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-1)\cdot 0}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right| == \left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$a_n = \sqrt{a^2-|a_t|^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, m/s^2$$

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, m \approx 2{,}598\, m$$

4.zadatak

$$x = 3t-2$$

$$y = 2t$$

Množenjem prve jednačine sa -2 a druge sa 3 pa njihovim sabiranjem, postižemo da je vreme t eliminisano i dobijamo

$$3y-2x=4$$

Ovo je jednačina linije putanje. To je prava koju ćemo skicirati nakon određivanja koordinata dve njene proizvoljne tačke, s obzirom da dve tačke određuju pravu. Izaberimo da prva tačka ima y koordinatu jednaku nuli i iz jednačine linije putanje izračunajmo da x koordinata te tačke iznosi -2. Izaberimo da druga tačka te prave ima x koordinatu jednaku 1 i iz jednačine linije putanje izračunajmo da y koordinata te tačke iznosi 2.

x	-2	1
y	0	2

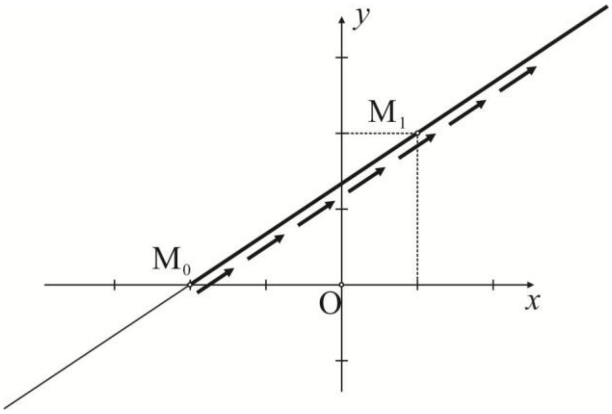
Položaji tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=1$ s

$$x(0)=-2;\; x(1)=1;$$

$$y(0)=0;\; y(1)=2;$$

$$M_0(-2{,}0);\; M_1(1{,}2);$$

Slica linije putanje (prave), putanje (polupravе, podebljani deo prave) i položaja tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=1$ s. Tačka se sve vreme kreće nadesno i naviše jer sa porastom vremena t stalno rastu i x i y koordinata.



Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena

$\dot{x}(t)=3$

$\dot{y}(t)=2$

Primetimo da se projekcije brzine na obe ose ne menjaju sa vremenom. Zbog toga je brzina tokom kretanja konstantna i njeni vektor i intenzitet su

$\vec{V}(t)=3\vec{i}+2\vec{j}; \quad V(t)=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\ m/s$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena su

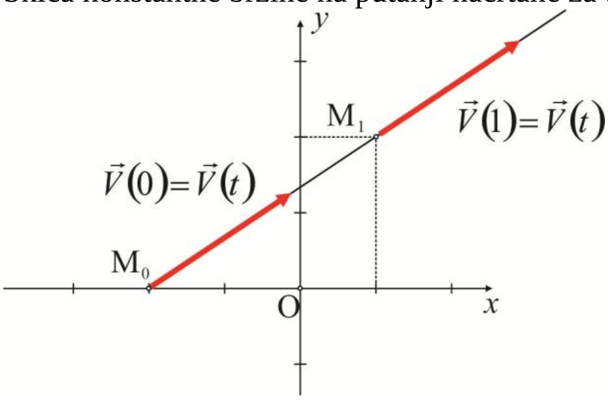
$\ddot{x}(t)=0$

$\ddot{y}(t)=0$

Zapravo, ubrzanje ne postoji pošto imamo jednoliko pravolinijsko kretanje. Vektor ubrzanja mora biti jednak nula vektoru, pa se može napisati

$\vec{a}(t)=\vec{0}; \quad a(t)=0$

Skica konstantne brzine na putanji nacrtane za $t_0=0$ i $t_1=1$ s



Vektor brzine, naravno, ima pravac pravolinijske putanje, što potvrđuje da verovatno nije učinjena greška.

5.zadatak

$x=2t-t^2$

$y=4t-2t^2-1$

Množenjem prve jednačine sa -2 pa njenim sabiranjem sa drugom jednačinom, postižemo da je vreme t eliminisano i dobijamo

$y-2x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=2x-1$

Ovo je jednačina linije putanje. To je prava koju ćemo skicirati nakon određivanja koordinata dve njene proizvoljne tačke, s obzirom da dve tačke određuju pravu. Izaberimo da prva tačka ima x koordinatu jednaku nuli i iz jednačine linije putanje izračunajmo da y koordinata te tačke iznosi -1. Izaberimo da druga tačka te prave ima x koordinatu jednaku 2 i iz jednačine linije putanje izračunajmo da y koordinata te tačke iznosi 3.

x	0	2
y	-1	3

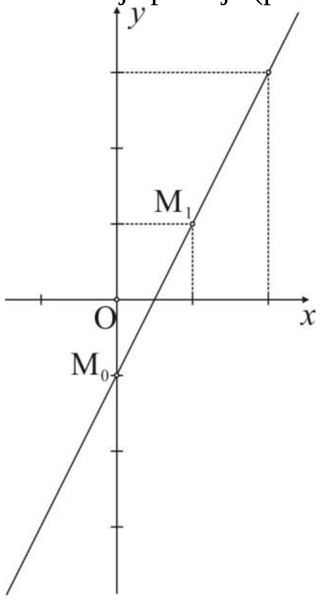
Položaji tačke u trenucima t_0=0 i t_1=1 s

$x(0)=0;\ x(1)=1;$

$y(0)=-1;\ y(1)=1;$

$M_0(0,-1);\ M_1(1,1);$

Slica linije putanje (prave) i položaja tačke u trenucima t_0=0 i t_1=1 s



Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena

$\dot{x}(t)=2-2t$

$\dot{y}(t)=4-4t$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena su

$\ddot{x}(t)=-2$

$\ddot{y}(t)=-4$

Primetimo da se projekcije ubrzanja na obe ose ne menjaju sa vremenom. Zbog toga je ubrzanje tokom kretanja konstantno i njegov vektor i intenzitet su

$\vec{a}(t)=-2\,\vec{i}-4\vec{j};\quad a(t)=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\ m/s^2$

Brzina tačke u trenutku t_0=0

$\dot{x}(0)=2$

$\dot{y}(0)=4;\quad \vec{V}(0)=2\,\vec{i}+4\vec{j};\quad V(0)=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}\ \ m/s$

Brzina tačke u trenutku t_1=1 s

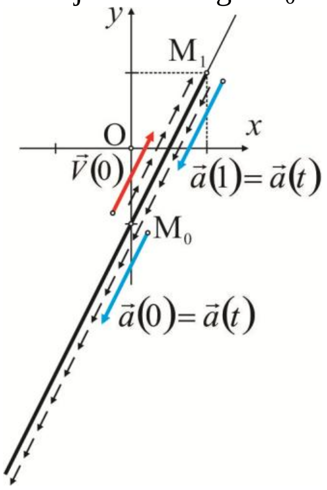
$\dot{x}(1)=0$

$\dot{y}(1)=0;\quad \vec{V}(0)=0\,\vec{i}+0\vec{j}=\vec{0};\quad V(0)=0$

Primetimo da, zbog $\dot{x}(t)=2-2t,\ \ \dot{y}(t)=4-4t$, u intervalu $0\le t<1$ tačka se kreće gore desno jer su u tom intervalu i $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ veći od nule. U intervalu $t>1$ tačka se kreće dole levo jer su u tom intervalu i $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ manji od nule. U trenutku vremena $t=1$s dolazi do trenutnog zaustavljanja tačke nakon čega se menja smer kretanja. Dakle, matematički se to može ovako zapisati

$$\dot{x}(t), \dot{y}(t)\begin{cases} >0, & za \quad 0\le t<1 \\ =0, & za \quad t=1 \\ <0, & za \quad t>1 \end{cases}$$

Slica putanje (poluprave, podebljani deo linije putanje), brzine u početnom trenutku i konstantnog vektora ubrzanja nacrtanog za $t_0=0$ i $t_1=1$ s



Vektori brzine i ubrzanja, naravno, imaju pravac pravolinijske putanje, što potvrđuje da verovatno nije učinjena greška.

6.zadatak

$x = 2+\sin^2 t$

$y = -1+\cos^2 t$

S obzirom da je $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, sabiranjem jednačina kretanja, odnosno, eliminacijom vremena t, imamo

$x+y=2 \quad \Rightarrow \quad y=2-x$

Ovo je jednačina linije putanje. To je prava koju ćemo skicirati nakon određivanja koordinata dve njene proizvoljne tačke, s obzirom da dve tačke određuju pravu. Izaberimo da prva tačka ima x koordinatu jednaku nuli i iz jednačine linije putanje izračunajmo da y koordinata te tačke iznosi 2. Izaberimo da druga tačka te prave ima y koordinatu jednaku nuli i iz jednačine linije putanje izračunajmo da x koordinata te tačke iznosi 2.

x	0	2
y	2	0

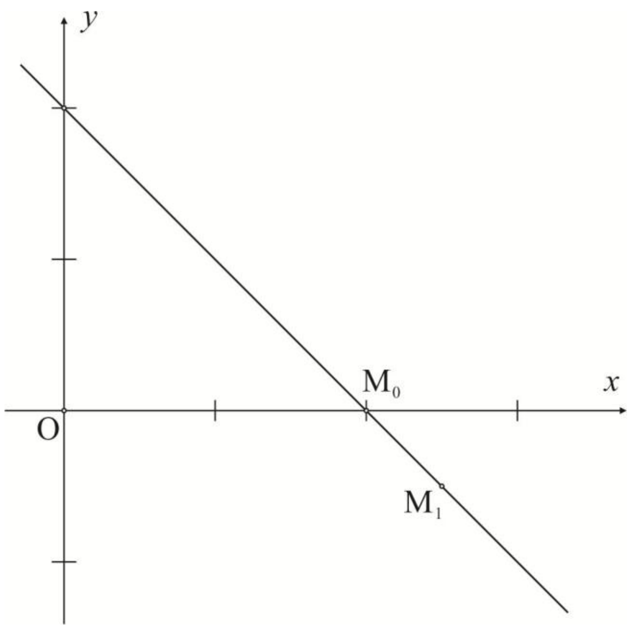
Položaji tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=\pi/4$

$x(0)=2;\ x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2};$

$y(0)=0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2};$

$M_0(2,0);\ M_1\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right);$

Slica linije putanje (prave) i položaja tačke u trenucima $t_0=0$ i $t_1=\pi/4$



Ovde je iz prve jednačine kretanja dobro primetiti da je oblast kretanja po x-u $2 \le x \le 3$ jer je $0 \le \sin^2 t \le 1$. Slično tome, oblast kretanja po y-u je $-1/2 \le y \le 0$ jer je $0 \le \cos^2 t \le 1$. Zbog ovih oblasti kretanja putanja je podebljana duž prikazana na narednoj slici

Projekcije brzine na koordinatne ose u funkciji vremena su

$$\dot{x}(t) = 2\sin t(\cos t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$$

$$\dot{y}(t) = 2\cos t \cdot (-\sin t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t$$

Projekcije ubrzanja na koordinatne ose u funkciji vremena su

$$\ddot{x}(t) = 2\cos 2t$$

$$\ddot{y}(t) = -2\cos 2t$$

Brzina tačke u trenutku $t_0=0$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0; \quad \vec{V}(0) = \vec{0}; \quad V(0) = 0$$

Brzina tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1; \quad \vec{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\vec{i} - 1\vec{j}; \quad V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\ m/s$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_0=0$

$$\ddot{x}(0) = 2$$

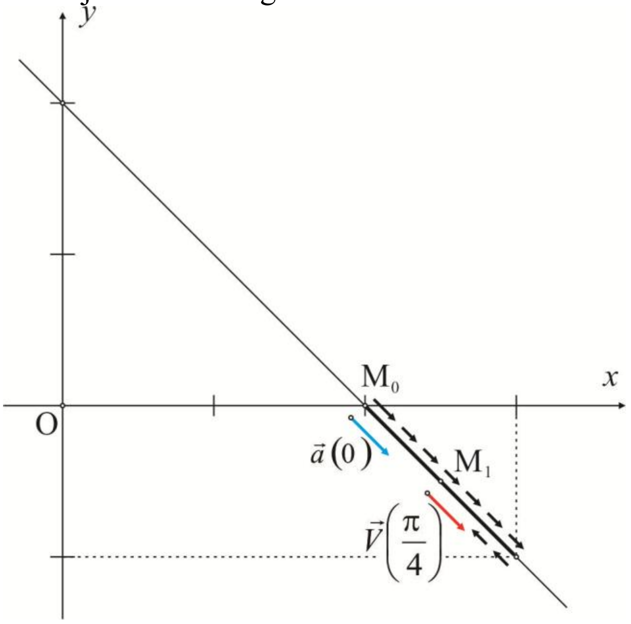
$$\ddot{y}(0) = -2; \quad \vec{a}(0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}; \quad a(0) = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}\ m/s^2$$

Ubrzanje tačke u trenutku $t_1=\pi/4$

$$\ddot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\ddot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad \vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{0}; \quad a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\ m/s^2$$

Prikaz putanje (duži, podebljani deo linije putanje), vektora brzine u trenutku $t_1=\pi/4$ i vektora ubrzanja u početnom trenutku dat je na narednoj slici. Očigledno je da tačka osciluje duž prave i da je započela kretanje dole desno gde nakon svakih $\pi/2$ sekundi menja smer kretanja



Vektori brzine i ubrzanja, naravno, imaju pravac pravolinijske putanje, što potvrđuje da verovatno nije učinjena greška.