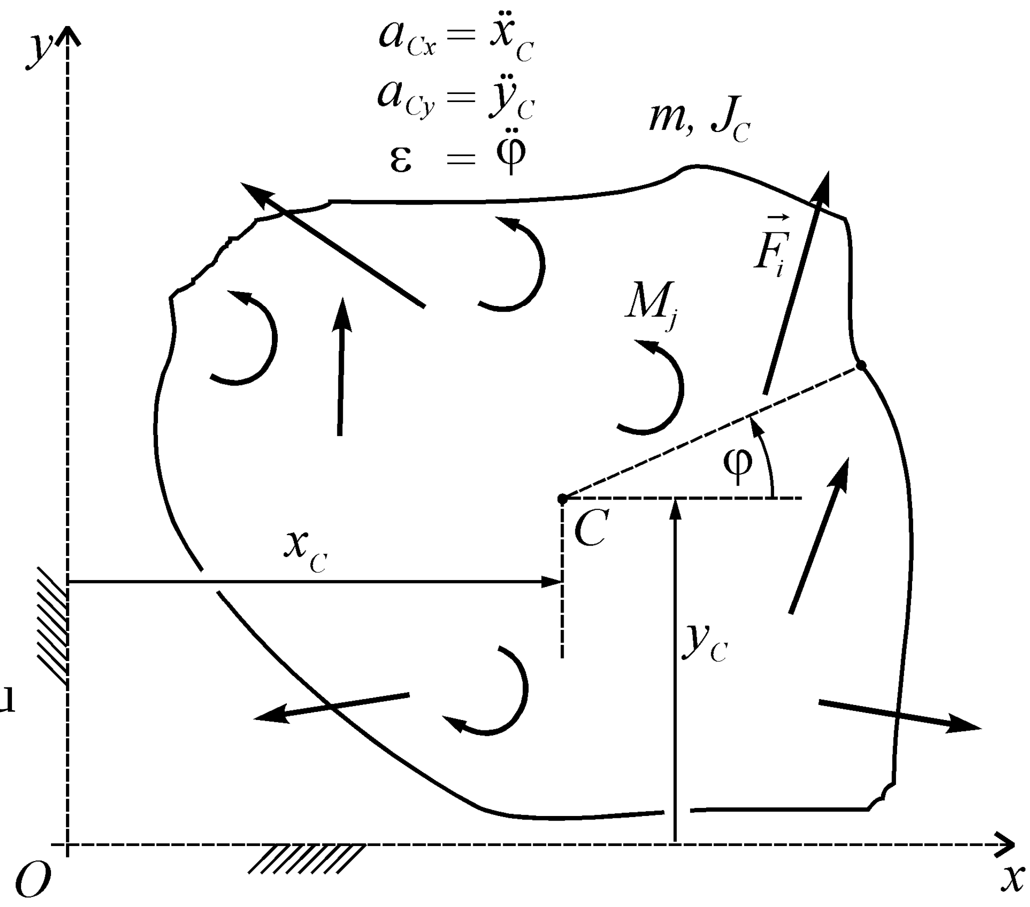
Dinamičke jednačine ravnog kretanja krutog tela.



Prve dve dinamičke jednačine ravnog kretanja krutog tela, u prvoj varijanti, imaju oblik:

1) $m \cdot \ddot{x}_C = \sum X_i$, 2) $m \cdot \ddot{y}_C = \sum Y_i$.

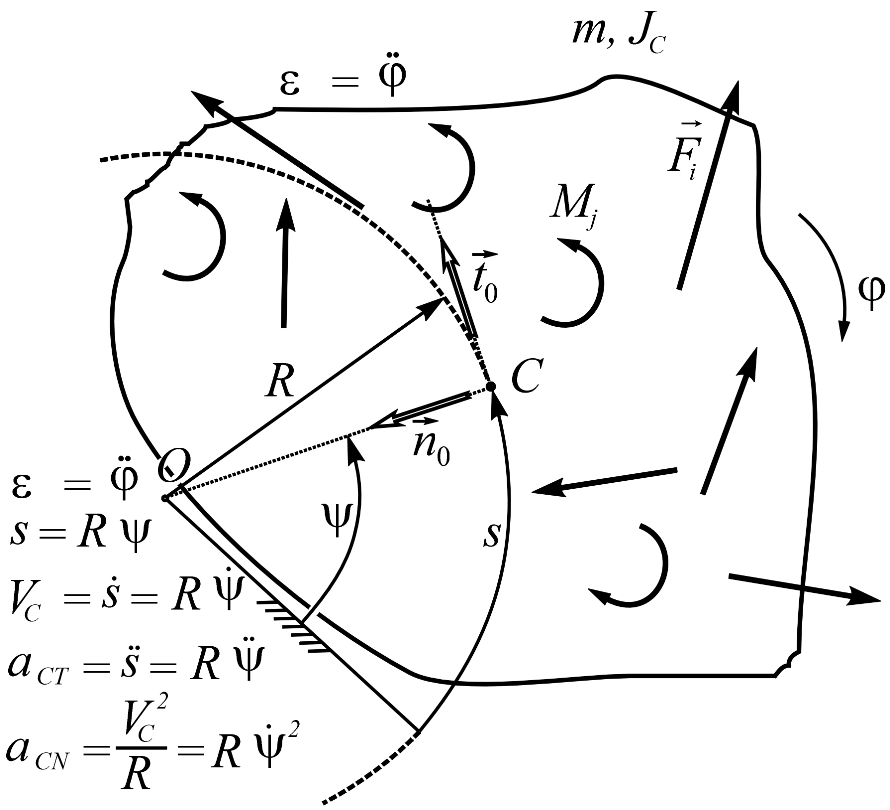
Dok, u drugoj varijanti, njihov oblik je:

1) $m \cdot a_{CT} = \sum F_{iT}$,

2) $m \cdot a_{CN} = \sum F_{iN}$.

Te prve dve dinamičke jednačine su posledica zakona o kretanju centra masa sistema primenjenog na telo mase *m*, težišta (centra masa) u tački *C*, koje vrši ravno kretanje. One su, zapravo, njegove projekcije na ose *x* i *y*, u prvoj varijanti, odnosno, na tangentu i normalu, u drugoj varijanti (Slika na sledećem slajdu).

Druga varijanta se piše u slučajevima u kojima centar *C* vrši očigledno kružno kretanje, poznatog poluprečnika kruga i, vrlo često, definisane lučne ili ugaone koordinate koje definišu položaj centra.



φ – ugao rotacije tela

s – lučna koordinata koja određuje položaj centra C

ψ – ugaona koordinata koja određuje položaj centra C

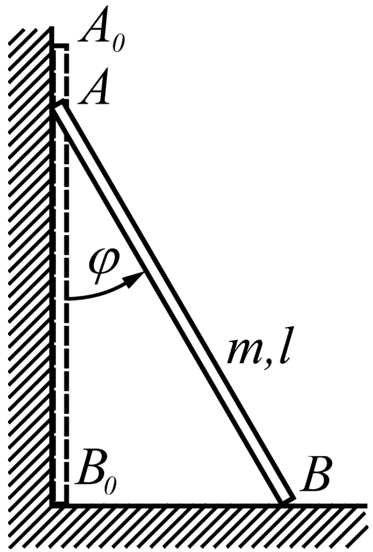
Treća (poslednja) dinamička jednačina ravnog kretanja je posledica zakona o promeni momenta količine kretanja za centar C, i ima oblik

3) $J_C \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_{Ci}$.

Polazni izraz ove jednačine, za obe pomenute varijante je istog oblika. Važno je znati da pri pisanju njene desne strane (pri traženju sume momenata svih sila i spregova za centar C) predznak za moment biće „+“ ako je težnja sile za obrtanjem oko centra u smeru porasta ugla rotacije a „-“ obrnuto. Isto se odnosi i na spreg. Ako se smer sprega poklapa sa smerom porasta ugla rotacije predznak je „+“, a ako je suprotan predznak je „-“.

Ako dinamičke jednačine ravnog kretanja sadrže izvode, pa je za određivanje kretanja potrebno vršiti njihovu integraciju, onda se one obično nazivaju diferencijalnim jednačinama kretanja.

Primer 5.14 Homogeni štap mase m, dužine *l*, kreće se u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže, tako, što svojom tačkom A, klizi po vertikalnom glatkom zidu, a svojom tačkom B, po glatkoj horizontalnoj podlozi. Štap je, usled beskonačno malog poremećaja, započeo kretanje iz vertikalnog položaja i stanja mirovanja. Primenom teoreme o promeni kinetičke energije odrediti ugaonu brzinu, a zatim i ugaono ubrzanje štapa u zavisnosti od ugla φ? Napisati dinamičke jednačine ravnog kretanja, a zatim, na osnovu njih, odrediti reakcije veza u zavisnosti od ugla φ? Odrediti pri kom uglu $\varphi = \overline{\varphi}$ dolazi do odvajanja tačke A štapa od zida?



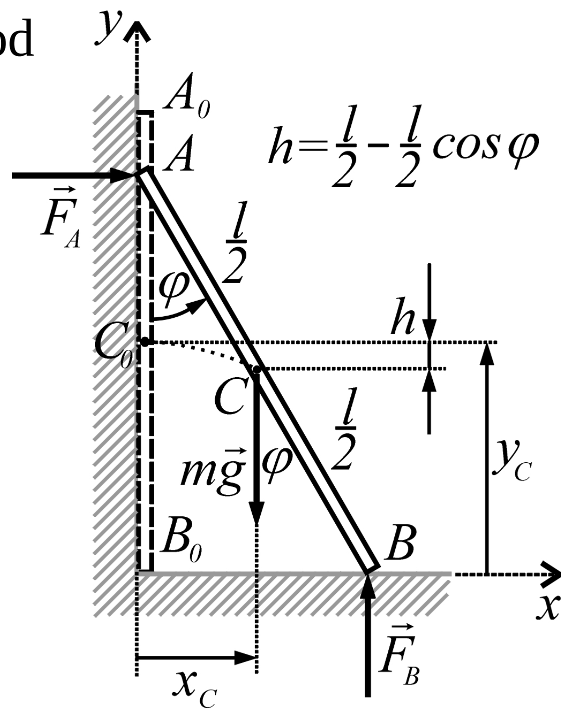
Pošto su koordinate centra *C*, za izabran nepokretni koordinatni sistem,

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_C = \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

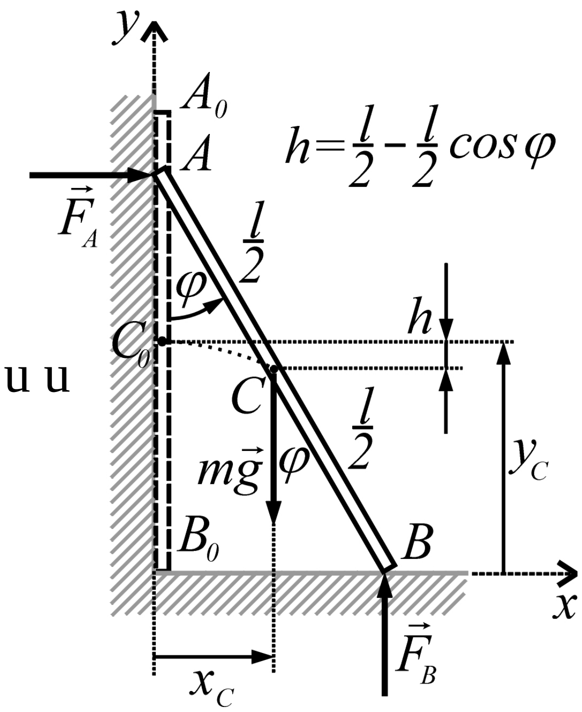
njegove projekcije brzine i ubrzanja su:

$$\dot{x}_C = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right), \quad \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).$$



Na osnovu projekcija brzine, kvadrat brzine centra u proizvoljnom položaju je:



$$V_C{}^2=\dot{x}_C{}^2+\dot{y}_C{}^2=\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2.$$

Pošto štap vrši ravno kretanje njegovu kinetičku energiju u proizvoljnom položaju određuje Kenigova teorema:

$$E_k=\frac{1}{2}m\cdot V_C{}^2+\frac{1}{2}J_C\cdot\omega^2,\quad J_C=\frac{1}{12}ml^2,\ \omega=\dot{\varphi}\quad\Rightarrow$$

$$E_k=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Zbog toga što je štap započeo kretanje iz stanja mirovanja, kinetička energija u početnom položaju iznosi nula, tj: $E_{k0}=0.$

Pošto pri kretanju, reakcije idealnih veza $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ ne vrše rad, jedino sila težine $m\vec{g}$ vrši rad, koji iznosi:

$$A=A(m\vec{g})=+mg\cdot h=+mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\varphi).$$

Sada, korišćenjem teoreme o promeni kinetičke energije dobija se ugaona brzina $\omega=\dot{\varphi}$ u zavisnosti od ugla φ: $E_k-E_{k0}=A\quad\Rightarrow$

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 - 0 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)}.$$

Diferenciranjem pretposlednjeg izraza po vremenu dobiće se ugaono ubrzanje štapa u zavisnosti od ugla φ:

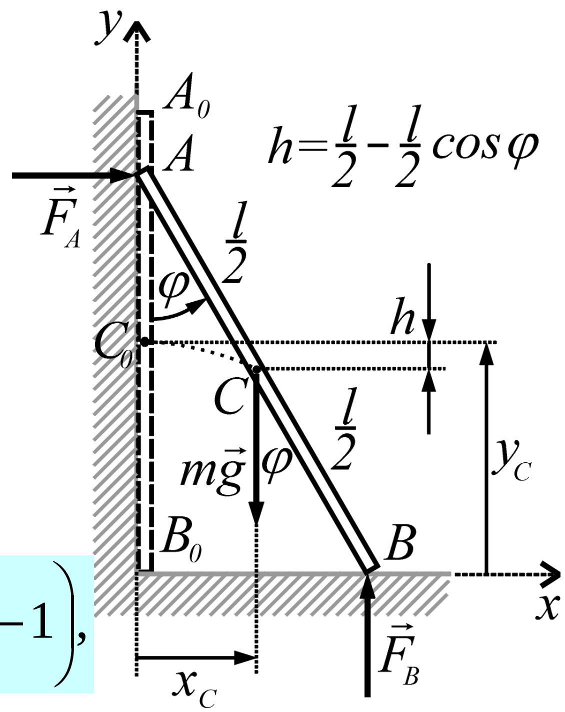
$$\frac{d}{dt}\bigg|\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi) \Rightarrow \; 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{3g}{l}\dot{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \; \ddot{\varphi}(\varphi) = \frac{3g}{2l}\sin\varphi.$$

Na osnovu sila koje u proizvoljnom položaju dejstvuju na štap, dinamičke jednačine ravnog kretanja imaju oblik:

1) $m\ddot{x}_C = F_A,$

2) $m\ddot{y}_C = F_B - mg,$

3) $J_C\ddot{\varphi} = F_B\frac{l}{2}\sin\varphi - F_A\frac{l}{2}\cos\varphi.$



Reakcija veza u zavisnosti od ugla φ, dobiće se na osnovu prve dve dinamičke jednačine kretanja, nakon što se, na osnovu dobijenih izraza, odrede $\ddot{x}_C(\varphi)$ i $\ddot{y}_C(\varphi)$:

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}\left(\frac{3g}{2l}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)\sin\varphi\right) =$$

$$= \frac{3g}{2}\sin\varphi\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right) \Rightarrow F_A(\varphi) = \frac{3mg}{2}\sin\varphi\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - 1\right),$$

$$\ddot{y}_C = -\frac{l}{2}\left(\frac{3g}{2l}\sin\varphi\sin\varphi - \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)\cos\varphi\right) =$$

$$= -\frac{3g}{4}\left(1-3\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\right) \quad \Rightarrow F_B(\varphi) = mg - \frac{3mg}{4}\left(1-3\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\right).$$

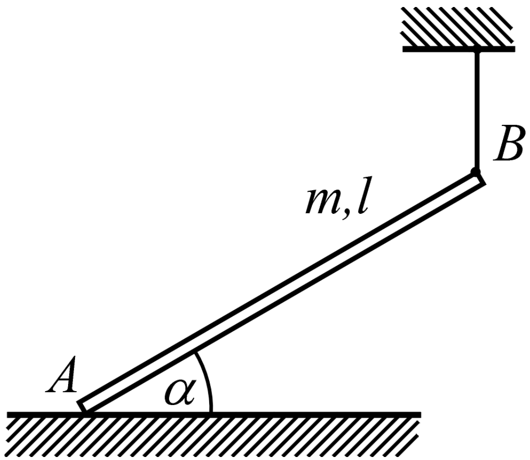
Do mesta odvajanja tačke A štapa od zida, tj. ugla $\varphi = \overline{\varphi}$, dolazi se korišćenjem činjenice da je na tom mestu reakcija veze na mestu *A* jednaka nuli:

$$F_A(\overline{\varphi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3mg}{2}\sin\overline{\varphi}\left(\frac{3}{2}\cos\overline{\varphi} - 1\right) = 0.$$

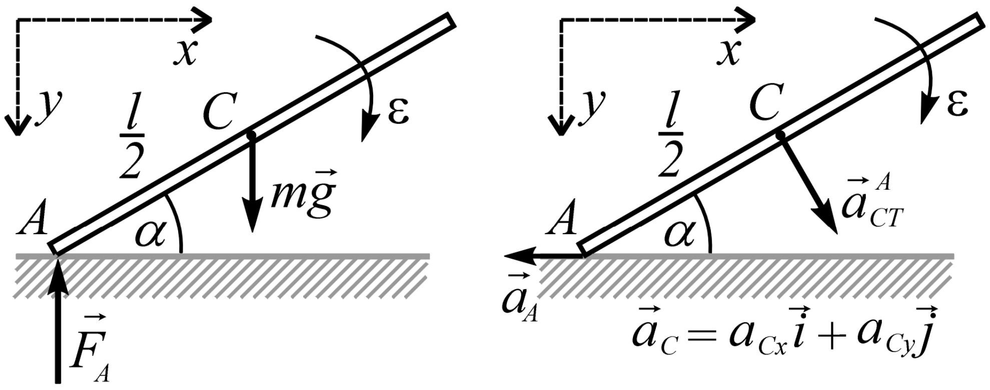
Rešenje prethodne jednačine $\sin\overline{\varphi} = 0$ se odbacuje, pa mora biti:

$$\frac{3}{2}\cos\overline{\varphi} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\varphi} = \arccos\frac{2}{3} = 48{,}19^0.$$

Primer 5.15 Homogeni štap mase *m*, dužine *l*, u ravnotežnom položaju, gradi sa horizontalom ugao α. Tačka *A* štapa, nalazi se na glatkoj horizontalnoj podlozi a za tačku *B* vezano je uže. Presecanjem užeta štap započinje ravno kretanje. Odrediti reakciju podloge u trenutku neposredno nakon presecanja užeta?



Neposredno nakon presecanja užeta (Sl.1) na štap dejstvuju jedino sila težine i tražena reakcija podloge, pa su, za taj trenutak, dinamičke jednačine ravnog kretanja oblika:



1)

2)

1) $m \cdot a_{Cx} = 0,$

2) $m \cdot a_{Cy} = mg - F_A,$

3) $J_C \cdot \varepsilon = F_A \frac{l}{2} \cos\alpha,$ $\quad J_C = \frac{ml^2}{12}.$

Pošto u drugoj i trećoj jednačini imamo tri nepoznate F_A , a_{Cy} i ε, problem će se rešiti tek nakon dobijanja dopunske jednačine, na osnovu kinematike ravnog kretanja, na osnovu koje važi: $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^A_{CN} + \vec{a}^A_{CT}.$

S obzirom da štap u tom trenutku miruje (ugaona brzina mu jednaka nuli), da je $\vec{a}_A$ horizontalan vektor (Sl.2) i da važe jednakosti: $a^A_{CN} = \frac{l}{2}\omega^2 = 0, \quad a^A_{CT} = \frac{l}{2}\varepsilon,$

dopunska jednačina, koja je projekcija vektorske jednačine na osu *y*, ima oblik

$$a_{Cy} = 0 + 0 + \frac{l}{2}\varepsilon\cos\alpha.$$

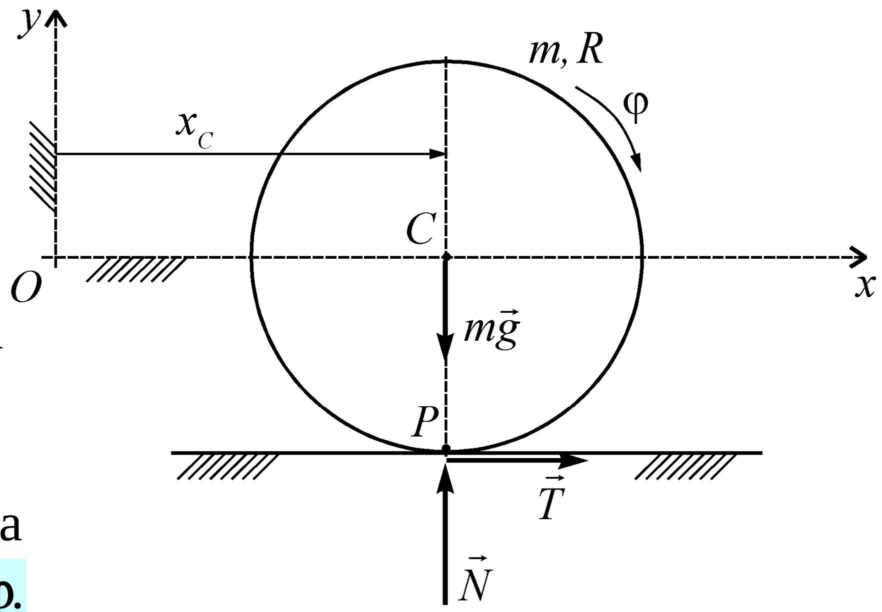
Zatim 2) $\Rightarrow \quad a_{Cy} = g - \frac{F_A}{m},$ $\quad$ 3) $\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{6F_A}{ml}\cos\alpha.$

Uvrštavanjem poslednja dva izraza u dopunsku jednačinu dobija se

$$F_A = \frac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}.$$

Osnovne karakteristike kotrljanja bez klizanja

Za telo telo koje se kotrlja bez klizanja i vrši ravno kretanje (a ne neko komplikovanije kretanje u prostoru), osnovno je, da se pišu tri dinamičke jednačine ravnog kretanja tela.



Zbog činjenice da se u tački dodira diska (točka itd.) sa nepokretnom podlogom nalazi trnutni pol brzine, postoji veza između brzine centra i ugaone brzine i, za slučaj sa slike, imamo jednakost $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$.

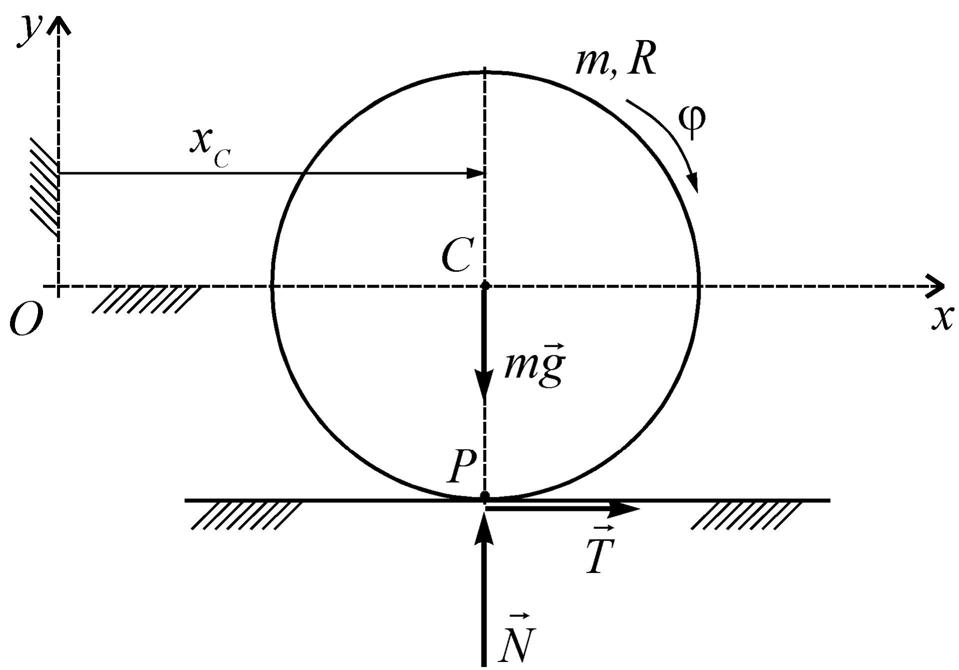
Jasno je da bi se diferenciranjem veze $\dot{x}_C = R\dot{\varphi}$ po vremenu dobila veza između ubrzanja centra i ugaonog ubrzanja, tako da, dakle, i takva veza mora postojati, i na nju se, pri pisanju dinamičkih jednačina ravnog kretanja, ***moramo pozvati***.

Ona je ovde: $\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}$.

Ovo „***moramo pozvati***“, znači da ćemo u prvoj dinamičkoj jednačini umesto $\ddot{x}_C$ staviti $R\ddot{\varphi}$, ili, u trećoj dinamičkoj jednačini , umesto $\ddot{\varphi}$ staviti $\ddot{x}_C / R$.

Sila trenja, zbog neophodne hrapavosti (koja, omogućava kotrljanje bez klizanja), mora se očekivati, ali, ona je manja od granične vrednosti, i zadovoljava uslov $T < \mu N$.

S obzirom da se sila trenja u ovakvom slučaju određuje iz dinamičkih jednačina ravnog kretanja (obično prve i treće), nije problem ako se smer sile trenja $\vec{T}$ pogrešno pretpostavi, pošto bi se tada u rešenju dobio predznak „-“, koji bi značio da je smer pogrešno pretpostavljen, ali je vrednost sile dobra.



Veoma je važno znati da sila trenja, u slučaju kotrljanja bez klizanja i uvek kada je $T < \mu N$ (odnosno, nema proklizavanja), ne vrši rad, tj: $A(\vec{T}) = 0$.

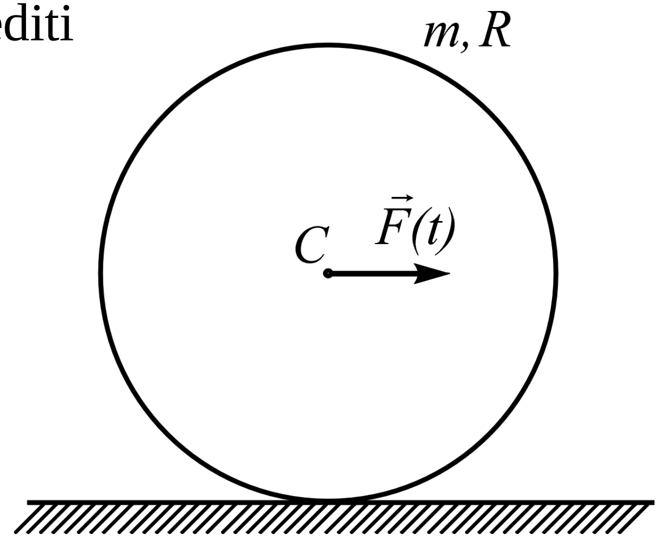
Samim tim, ovakvo $\vec{T}$ ne narušava konzervativnost sistema i dopušta, na pogodan način, korišćenje teoreme o promeni kinetičke energije i zakona o održanju mehaničke energije.

Dinamičke jednačine ravnog kretanja za sistem sa slike (prikazane sile sa slike su samo neophodan minimum, smatrajmo da osim njih dejstvuje još nenacrtanih sila i spregova), mogle bi da imaju sledeći oblik

1) $m\ddot{x}_C = T + \ldots$ 2) $m\ddot{y}_C = 0 = N - mg + \ldots$ 3) $J_C \cdot \dfrac{\ddot{x}_C}{R} = -TR + \ldots$

U ovakvim slučajevima obično se N odredi iz druge jednačine, a T i $\ddot{x}_C$ se određiju iz prve i treće.
U takvim problemima često se postavlja pitanje „do kog trenutka $\bar{t}$ će važiti da imamo kotrljanje bez klizanja, nakon kojeg će uslediti, kotrljanje sa klizanjem?“.
Odgovor bi trebao da bude sledeći: Dokle god važi da imamo kotrljanje bez klizanja mora važiti nejednakost $T(t) < \mu N(t)$.
U onom trenutku $t = \bar{t}$, u kom važi jednakost $T(\bar{t}) = \mu N(\bar{t})$,
prestaje kotrljanje bez klizanja i počinje kotrljanje sa klizanjem.

Primer 5.16 Homogeni kružni disk mase m, poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi pod dejstvom horizontalne sile intenziteta $F(t) = b \cdot t$, gde je b konstanta. Disk je započeo kretanje iz stanja mirovanja. Koeficijent trenja između diska i podloge iznosi μ. Odrediti kako se menja brzina centra diska u funkciji vremena dok traje kotrljanje bez klizanja? Odrediti posle koliko vremena $t = \bar{t}$ od početka kretanja će prestati kotrljanje bez klizanja i početi kotrljanje sa klizanjem? Veličine: m, R, b i μ smatrati poznatim.

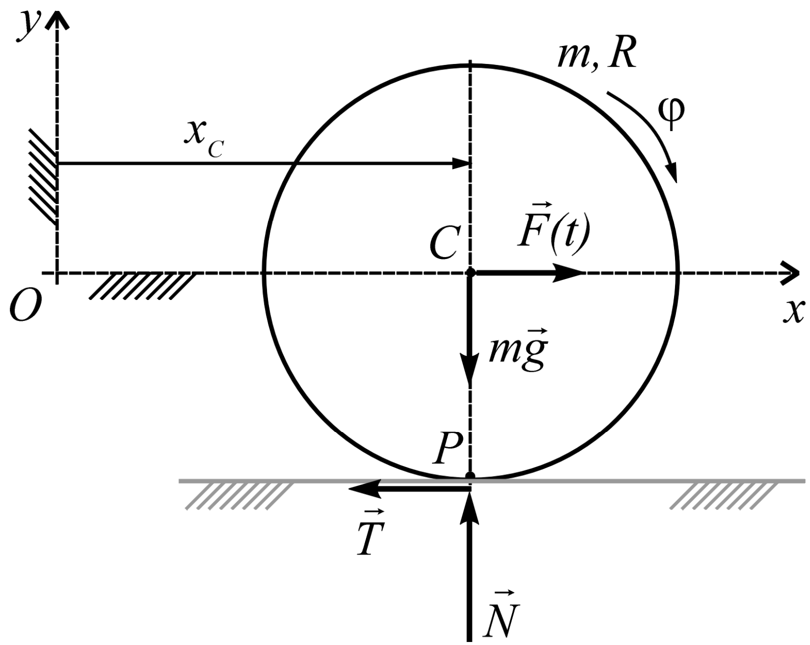


Za izabrani koordinatni sistem i usvojenu pomoćnu koordinatu φ, uzimajući u obzir vezu $\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C / R$, dinamičke jednačine ravnog kretanja imaju oblik:

$$1)\quad m\ddot{x}_C = b\cdot t - T,$$

$$2)\quad m\ddot{y}_C = 0 = N - mg,$$

$$3)\quad J_C \cdot \frac{\ddot{x}_C}{R} = TR, \qquad J_C = \frac{1}{2}mR^2.$$



Rešimo prvu i treću jednačinu, kao algebarski sistem jednačina, po $\ddot{x}_C$ i T. Nakon sabiranja prve i sređene treće jednačine dobija se: $\ddot{x}_C = \dfrac{2b}{3m}t$......(4)

S obzirom na početni uslov $\dot{x}_C(0) = 0$, koji je dobijen iz činjenice da je disk započeo kretanje iz stanja mirovanja, integracijom gornjeg izraza dobija se tražena brzina centra diska u funkciji vremena:

$$d\dot{x}_C = \frac{2b}{3m}tdt \Rightarrow \int d\dot{x}_C = \frac{2b}{3m}\int tdt \Rightarrow \dot{x}_C(t) = \frac{bt^2}{3m} + C \Rightarrow \dot{x}_C(t) = \frac{bt^2}{3m}$$

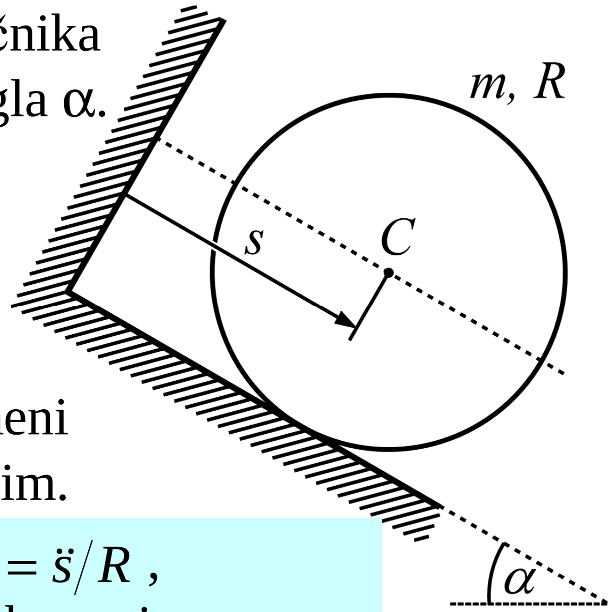
jer je C=0

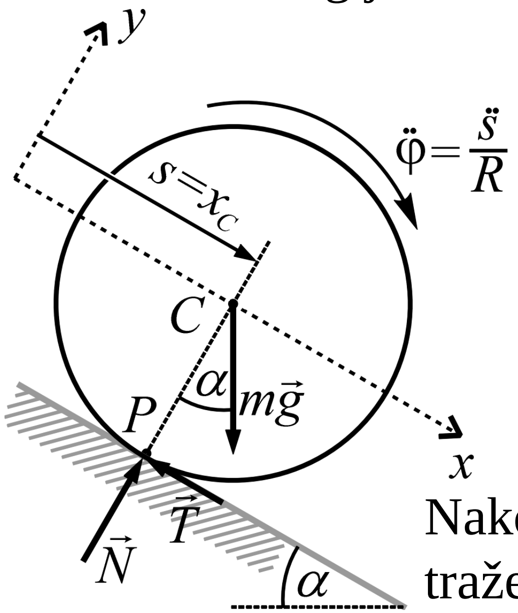
Sila trenja u funkciji vremena se dobija uvrštavanjem (4) u 1): $T(t) = \dfrac{b}{3}t$

Normalna reakcija se dobija iz 2): $N = mg$

Trenutak vremena $t = \bar{t}$ kada prestaje kotrljanje bez klizanja i počinje kotrljanje sa klizanjem dobiće se iz uslova $T(\bar{t}) = \mu N(\bar{t})$: $\dfrac{b}{3}\bar{t} = \mu mg \Rightarrow$ $\bar{t} = \dfrac{3\mu mg}{b}$

Primer 5.17 Homogeni kružni disk mase m, poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja niz strmu ravan nagibnog ugla α. Korišćenjem dinamičkih jednačina ravnog kretanja odrediti reakcije veza i ubrzanje centra diska? Koji uslov mora da zadovolji koeficijent trenja μ? Proveriti da li se dobijena vrednost ubrzanja poklapa sa vrednošću dobijenom korišćenjem teoreme o promeni kinetičke energije? Veličine: m, R i α smatrati poznatim.





Korišćenjem veze $\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C/R = \ddot{s}/R$, dinamičke jednačine ravnog kretanja, za izabrani koordinatni sistem, imaju oblik:

1) $m\ddot{s} = mg\sin\alpha - T,$

2) $m\ddot{y}_C = 0 = N - mg\cos\alpha,$

3) $J_C \cdot \frac{\ddot{s}}{R} = TR, \quad J_C = \frac{1}{2}mR^2.$

Nakon sabiranja prve i sređene treće jednačine dobija se da traženo ubrzanje centra iznosi konstantnih $\ddot{s} = (2g\sin\alpha)/3 \ldots (4)$

Sila trenja se dobija uvrštavanjem (4) u 1) ili 3): $T = (mg\sin\alpha)/3$

Normalna reakcija se dobija iz 2): $N = mg\cos\alpha$

Određivanje koeficijenta trenja μ koji obezbeđuje kotrljanja bez klizanja:

$$T < \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu > \frac{T}{N} \quad \Rightarrow \quad \mu > \frac{1}{3}\tan\alpha$$

***Određivanje ubrzanja centra korišćenjem teoreme o promeni kinetičke energije*:**

Kinetička energija u proizvoljnom položaju (kao i u primeru 4.3): $E_k = \frac{3}{4} m \cdot \dot{s}^2$.

Neka je položaju, koji ćemo smatrati početnim, koordinata *s* iznosila 0. Kinetička energija u tom položaju nije funkcija pa se može smatrati brojkom (konstantom).

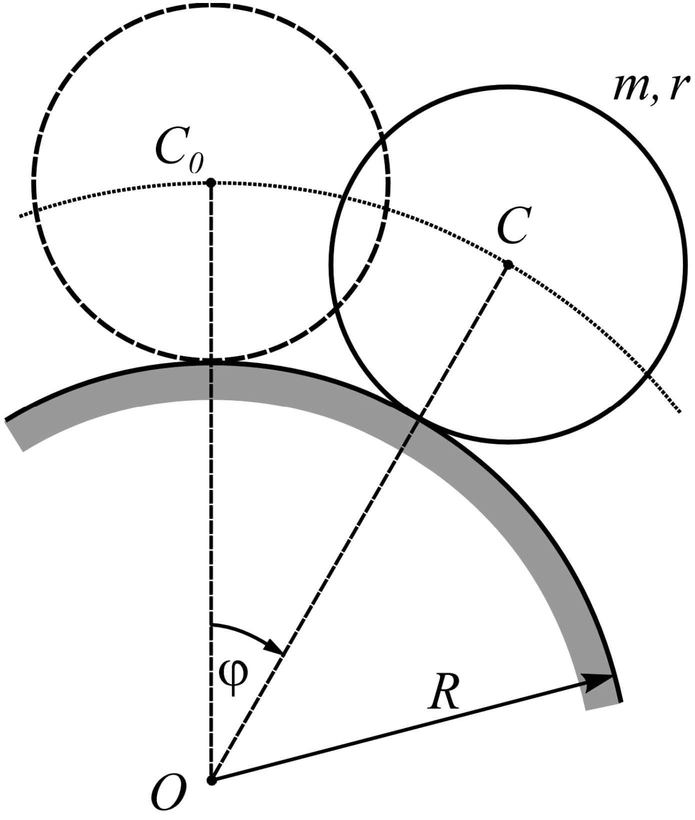
Rad, koji vrši jedino sila težine, iznosi: $A = +mg \cdot h = mgs\sin\alpha$.

Korišćenjem teoreme o promeni kinetičke energije imamo:

$$\frac{d}{dt}\Big| E_k - E_{k0} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big| \frac{3}{4} m \cdot \dot{s}^2 - const = mgs\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3}{4} m \cdot 2\dot{s}\ddot{s} = mg\dot{s}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

Primer 5.18 Homogeni kružni disk mase *m*, poluprečnika *r*, kotrlja se bez klizanja, u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže, po cilindričnoj površini poluprečnika *R*. Disk je započeo kretanje iz stanja mirovanja i najvišeg položaja. Proizvoljni položaj diska definiše koordinata φ. Koeficijent trenja između diska i cilindrične površine iznosi μ. Primenom teoreme o promeni kinetičke energije odrediti ugaonu brzinu diska ω, zatim i njegovo ugaono ubrzanje ε, u zavisnosti od ugla φ? Na osnovu dinamičkih jednačina ravnog kretanja odrediti reakcije veze u zavisnosti od ugla φ? Do kog ugla $\varphi = \overline{\varphi}$ će disk vršiti kotrljanje bez klizanja, nakon čega će uslediti kotrljanje sa klizanjem (samo napisati jednačinu koja određuje $\overline{\varphi}$, bez njenog rešavanja)? Veličine: *m*, *r*, *R* i μ smatrati poznatim.



Teorema o promeni kinetičke energije

Kinetička energija diska u početnom položaju, zbog započinjanja kretanja iz stanja mirovanja, iznosi nula, tj. $E_{k0} = 0$.

Kinetička energija diska u proizvoljnom položaju, odrerđuje se uz pomoć Kenigove teoreme:

$$E_k = \frac{m}{2} V_C^{\,2} + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \quad \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{m}{2}(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{(R+r)^2\dot{\varphi}^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_k = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2.$$

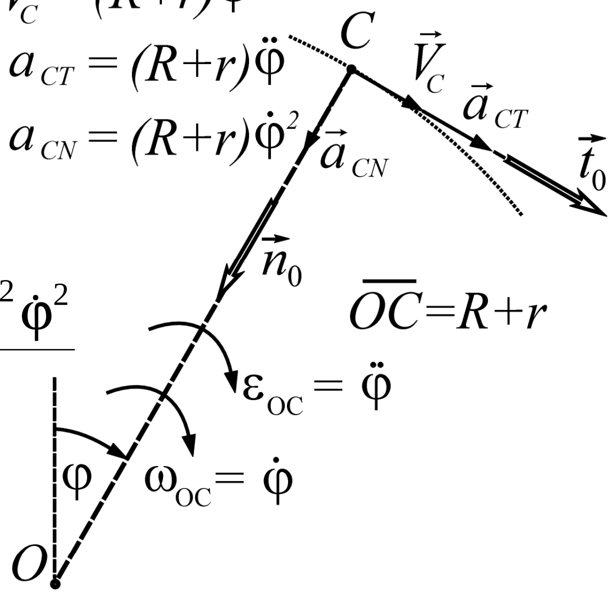
Rad sila koje dejstvuju na disk, pri njegovom kretanju od početnog do proizvoljnog položaja, je rad jedino sile njegove težine:

$$A = A(m\vec{g}) = +mg(R+r)(1-\cos\varphi).$$

$$V_C = (R+r)\dot{\varphi}$$

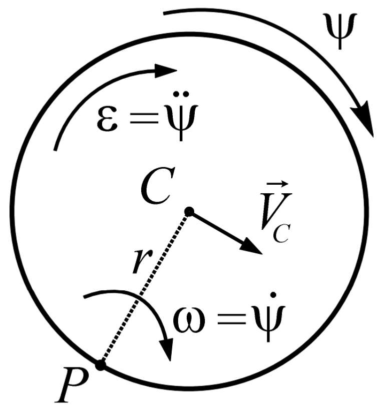
$$a_{CT} = (R+r)\ddot{\varphi}$$

$$a_{CN} = (R+r)\dot{\varphi}^2$$



φ – угао ротације дужи OC

1)



$$\omega = \frac{V_C}{\overline{CP}} = \frac{(R+r)\dot{\varphi}}{r}$$

$$\varepsilon = \frac{(R+r)\ddot{\varphi}}{r}$$

ψ – угао ротације диска

2)

Teorema o promeni kinetičke energije odrediće ugaonu brzinu diska ω:

$$E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 - 0 = mg(R+r)(1-\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\varphi) \ldots\ldots(*) \quad \Rightarrow$$

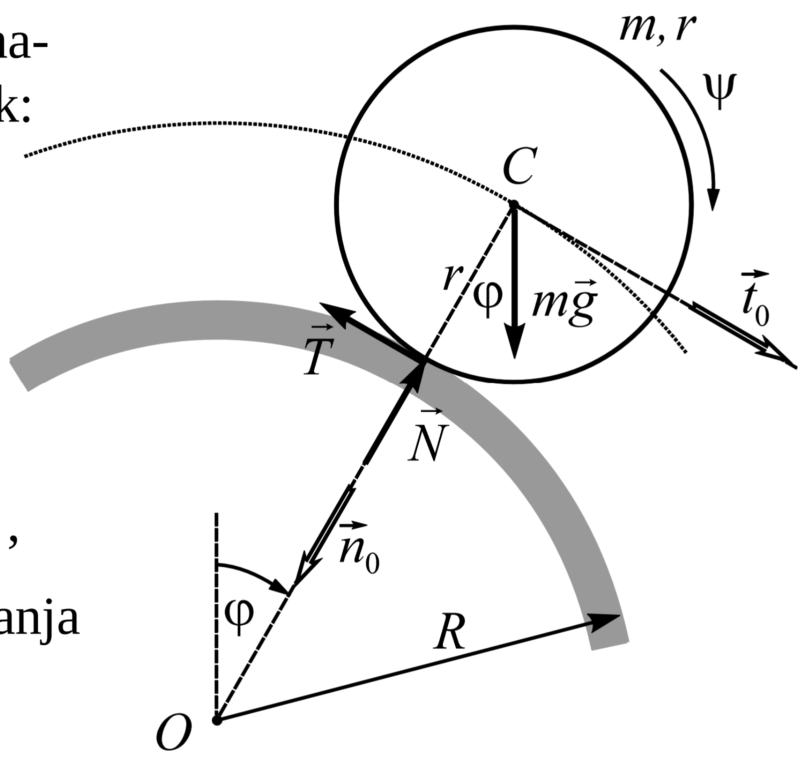
$$\omega(\varphi) = \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\varphi)}$$

Diferenciranjem izraza (*) po vremenu, dobiće se ugaono ubrzanje diska $\varepsilon = \ddot{\varphi}$:

$$\frac{d}{dt}\bigg|\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\varphi) \Rightarrow 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{4g}{3(R+r)}\dot{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \varepsilon(\varphi) = \frac{2g}{3(R+r)}\sin\varphi.$$

Dinamičke jednačine ravnog kretanja:

Zbog kretanja centra po kružnoj putanji, dinamičke jednačine ravnog kretanja imaju oblik:



1) $ma_{CT} = mg\sin\varphi - T,$

2) $ma_{CN} = mg\cos\varphi - N,$

3) $J_C\varepsilon = Tr.$

S obzirom da je: $a_{CT} = (R+r)\ddot{\varphi},$

$$a_{CN} = (R+r)\dot{\varphi}^2, \; J_C = \frac{1}{2}mr^2, \; \varepsilon = \frac{(R+r)\ddot{\varphi}}{r},$$

prethodne dinamičke jednačine ravnog kretanja dobijaju sledeći oblik:

1) $m(R+r)\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi - T,$

2) $m(R+r)\dot{\varphi}^2 = mg\cos\varphi - N,$

3) $\frac{1}{2}m(R+r)\ddot{\varphi} = T.$

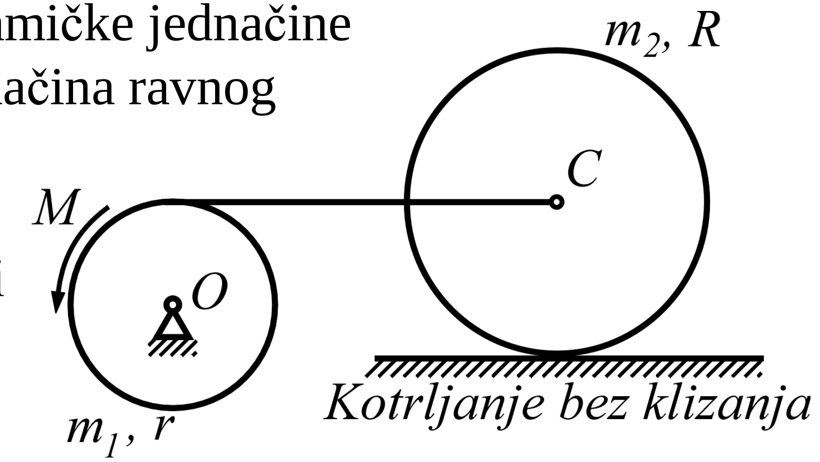
Iz jednačine 2) je $N(\varphi)=\frac{mg}{3}(7\cos\varphi-4)$ zbog $\dot{\varphi}^2=\frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\varphi)$,

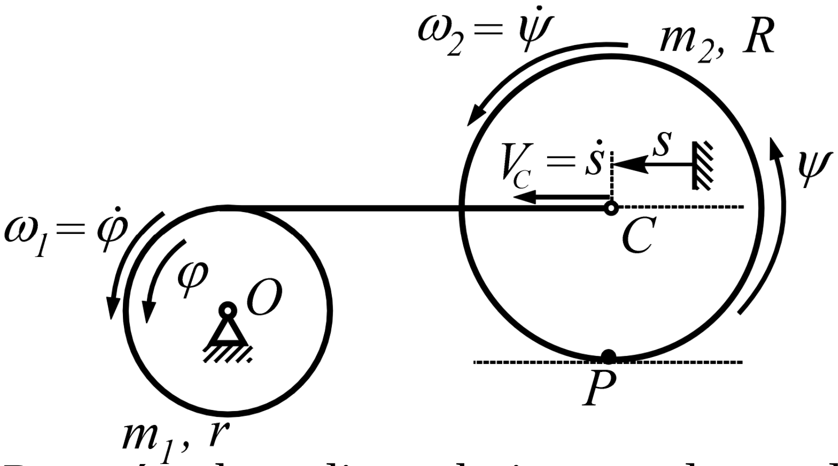
Iz jednačine 3) je $T(\varphi)=\frac{mg}{3}\sin\varphi$ zbog $\ddot{\varphi}=\frac{2g}{3(R+r)}\sin\varphi$.

Pošto je na mestu prestanka kotrljanja bez klizanja, a započinjanja kotrljanja sa klizanjem, sila trenja jednaka njenoj graničnoj vrednosti, traženi ugao $\overline{\varphi}$ određuje jednačina: $T(\overline{\varphi})=\mu N(\overline{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \sin\overline{\varphi}=\mu(7\cos\overline{\varphi}-4)$.

Ako bi, na primer, koeficijent trenja iznosio $\mu=\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-8}\approx 0.74452$ rešenje gornje jednačine bilo bi $\overline{\varphi}=45^0$.

Primer 5.19 Za sistem prikazan na slici odrediti ubrzanje centra diska mase m_2, poluprečnika R, koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Na doboš, u obliku diska, mase m_1, poluprečnika r, dejstvuje aktivni konstantni spreg momenta M. Silu u užetu odrediti na osnovu dinamičke jednačine obrtnog kretanja doboša ili dinamičkih jednačina ravnog kretanja diska? Takođe odrediti reakcije podloge u tački dodira između diska i podloge? Veličine: m_1, m_2, M, r i R smatrati poznatim. Pri kretanju nema proklizavanja ni između užeta i doboša.





Usvojimo da je ovde je s osnovna koordinata jer ćemo sve druge (pomoćne) preko nje izraziti. Ona definiše kretanje centra diska. Činjenica da se s koordinata meri od fiksnog pravca znači da je $\dot{s}$ brzina centra diska C a $\ddot{s}$ njegovo ubrzanje.

Pomoćne koordinate koje se ovde uvode su ugao rotacije doboša φ i ugao rotacije diska ψ. Podrazumeva se da se te koordinate mere od takvih fiksnih pravaca, da imaju vrednost nula u istom položaju sistema (početnom položaju), u kom i zadata koordinata s ima vrednost nula.

Zbog svega rečenog $\dot{\varphi}$ je ugaona brzina a $\ddot{\varphi}$ ugaono ubrzanje doboša, i slično tome, $\dot{\psi}$ je ugaona brzina a $\ddot{\psi}$ ugaono ubrzanje diska.

Pošto doboš vrši obrtanje oko nepomične ose njegova kinetička energija je:

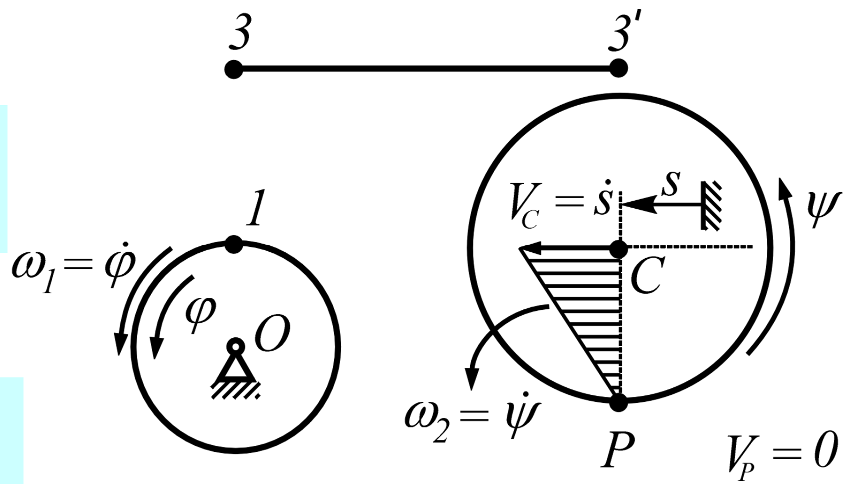
$$E_{k1} = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Pošto disk vrši ravno kretanje, primenom Kenigove teoreme, slično kao u primeru 4.3, njegova kinetička energija je:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_2 R^2 \dot{\psi}^2.$$

Veze:

Prva veza se dobija iz jednakosti brzina tačaka 1, 3, 3′ i C :



$$\dot{s} = r\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{r} \Rightarrow \varphi = \frac{s}{r}, \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{r}.$$

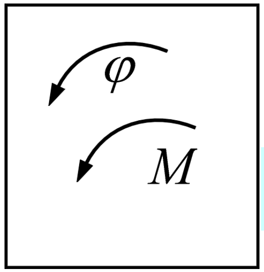
Pošto je trenutni pol brzine diska u tački P, druga veza ima oblik:

$$\dot{s} = R\dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{\dot{s}}{R} \Rightarrow \psi = \frac{s}{R}, \quad \ddot{\psi} = \frac{\ddot{s}}{R}.$$

Kinetička energija sistema:

S obzirom na izraze za kinetičke energije pojedinih elemenata, i s obzirom na veze, dobiće se konačan izraz za kinetičku energiju sistema u proizvoljnom položaju: $E_k = E_{k1} + E_{k2} \quad \Rightarrow \quad E_k = B \cdot \dot{s}^2, \qquad B = \frac{m_1}{4} + \frac{3}{4} m_2 = const.$

Rad:



Pri kretanju sistema rad vrši jedino konstantni spreg . Taj rad jednak je i ukupnom radu i iznosi $A = A(M) = +M\varphi.$

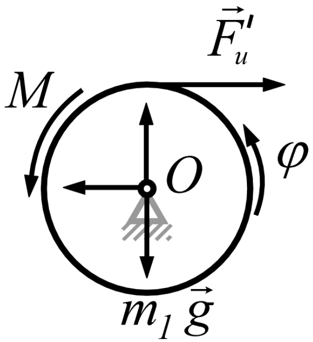
S obzirom na dobijene veze, rad iznosi: $A = D \cdot s,$ $\quad D = \frac{M}{r} = const.$

Određivanje traženog ubrzanja $\ddot{s}$ **:**

Izvod po vremenu teoreme o promeni kinetičke energije daje: $\frac{d}{dt}\Big|\ E_k - E_{k0} = A \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big|\ B\cdot\dot{s}^2 - E_{k0} = D\cdot s \quad\Rightarrow\quad B\cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D\cdot\dot{s} \quad\Rightarrow\quad \ddot{s} = \frac{D}{2B} = \frac{2M}{r\left(m_1+3m_2\right)}.$$

Određivanje sile u užetu na osnovu dinamičke jednačine obrtanja doboša:



$$J_O\cdot\ddot{\varphi} = M - F_u\cdot r \quad\Rightarrow\quad F_u = \frac{M - J_O\cdot\ddot{\varphi}}{r} = \frac{M - \frac{1}{2}m_1 r^2\cdot\frac{\ddot{s}}{r}}{r} \quad\Rightarrow$$

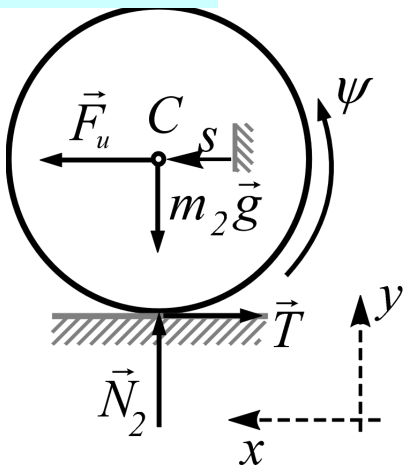
$$F_u = \frac{3Mm_2}{r\left(m_1+3m_2\right)}.$$

Dinamičke jednačine ravnog kretanja:

1) $m_2\ddot{x}_C = m_2\ddot{s} = F_u - T,$

2) $m_2\ddot{y}_C = 0 = N_2 - m_2 g,$

3) $J_C\cdot\frac{\ddot{s}}{R} = TR,\quad J_C = \frac{1}{2}m_2R^2.$

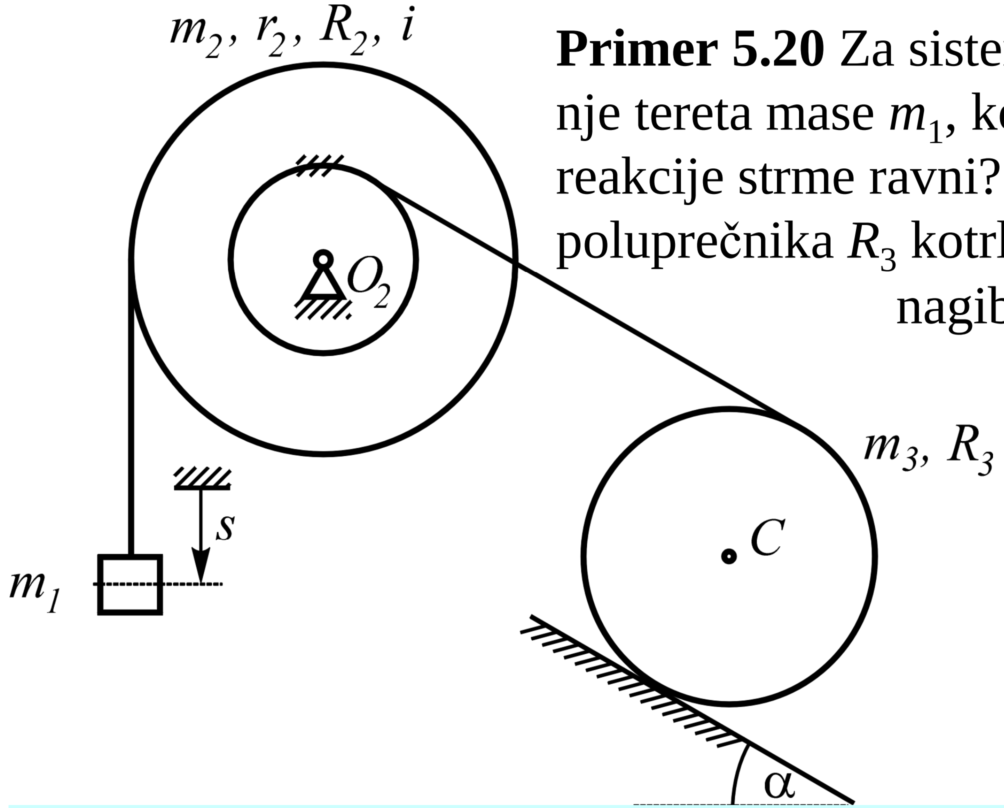


Jednačina 3) određuje silu trenja:

$$T = \frac{Mm_2}{r\left(m_1+3m_2\right)}.$$

Jednačina 3) određuje normalnu reakciju:

$$N_2 = m_2 g.$$

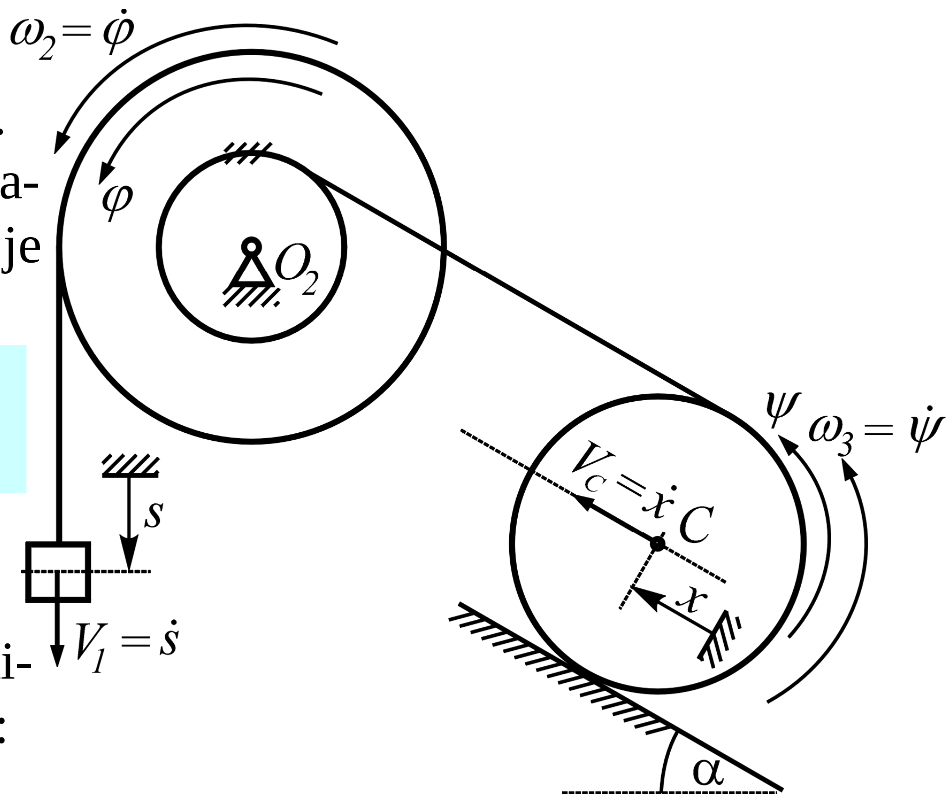


Primer 5.20 Za sistem prikazan na slici odrediti: ubrzanje tereta mase m_1, koji se kreće naniže, sile u užadima i reakcije strme ravni? Homogeni kružni disk mase m_3, poluprečnika R_3 kotrlja se bez klizanja uz strmu ravan nagibnog ugla α. Veličine: m_1, m_2, m_3, r_2, R_2, R_3, g i α smatrati poznatim. Pri kretanju nema proklizavanja između vertikalnog užeta i doboša. Takođe nema proklizavanja između kosog užeta i kako doboša, tako i diska.

Ovde je s zadata koordinata, ona definiše kretanje tereta mase m_1. Činjenica da se s koordinata meri od fiksnog pravca znači da je $\dot{s}$ brzina tog tereta a $\ddot{s}$ njegovo ubrzanje.

Pomoćne koordinate koje se ovde uvode su ugao rotacije doboša φ, ugao rotacije diska ψ i koso pomeranje centra diska x. Podrazumeva se da se te koordinate mere od takvih fiksnih pravaca, da imaju vrednost nula u istom položaju sistema (početnom položaju), u kom i zadata koordinata s ima vrednost nula.

Zbog svega rečenog $\dot{\varphi}$ je ugaona brzina a $\ddot{\varphi}$ ugaono ubrzanje doboša. Isto tako, $\dot{\psi}$ je ugaona brzina a $\ddot{\psi}$ ugaono ubrzanje diska. Slično tome, $\dot{x}$ je brzina a $\ddot{x}$ ubrzanje centra diska.



Pošto teret vrši translatorno kretanje njegova kinetička energija je:

$$E_{k1} = \frac{m_1}{2}\dot{s}^2.$$

Pošto doboš vrši obrtanje oko nepomične ose njegova kinetička energija je:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J_{O_2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_2 i^2\dot{\varphi}^2.$$

Pošto disk vrši ravno kretanje, primenom Kenigove teoreme, slično kao u primeru 4.3, njegova kinetička energija je:

$$E_{k3} = \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_3R^2\dot{\psi}^2.$$

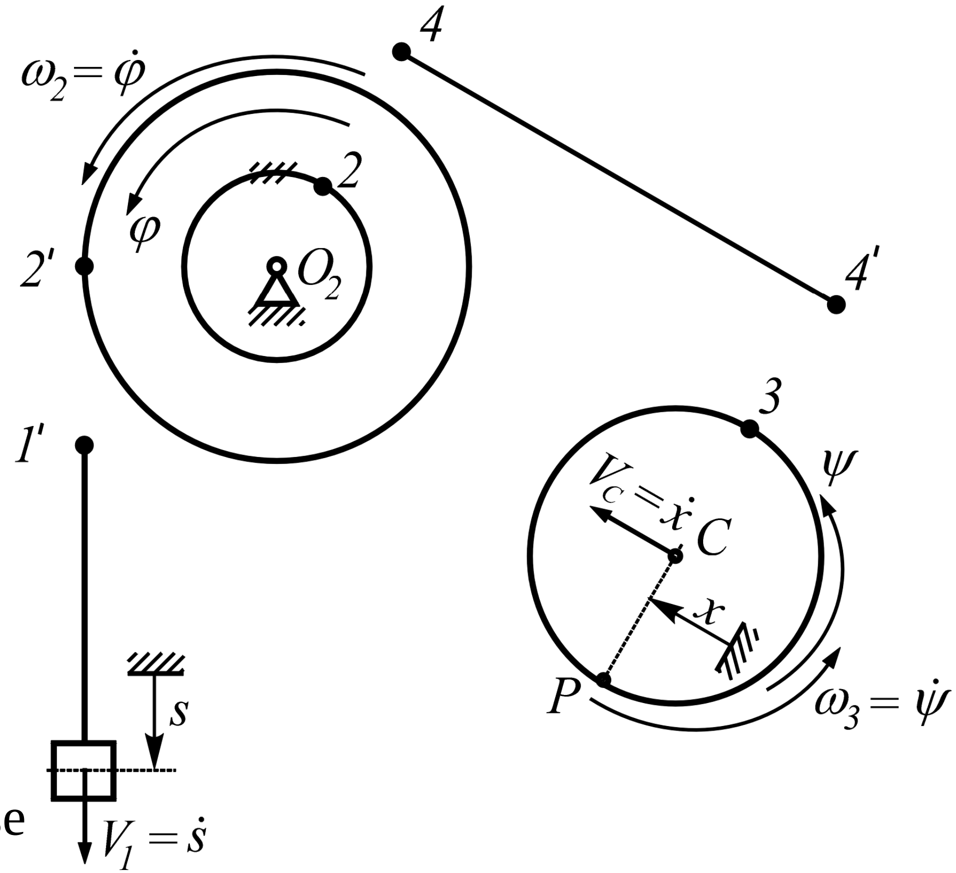
Pošto, u konačnom izrazu za kinetičku energiju, izvodi pomoćnih kordinata ($\dot{\varphi}$, $\dot{x}$ i $\dot{\psi}$) moraju biti izraženi preko $\dot{s}$, nađimo veze ovih veličina.

Veze:

Prva veza se dobija iz jednakosti brzina tačaka 1′ i 2′:

$$\dot{s} = R_2\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{s}{R_2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$



Zbog položaja trenutnog pola brzine P, za ravno kretanje diska važe jednakosti:

$$V_C = \dot{x} = R_3\dot{\psi}, \; V_3 = 2R_3\dot{\psi}.$$

Veza između veličina $\dot{\psi}$ i $\dot{s}$, dobija se iz jednakosti brzina tačaka 2, 4, 4′ i 3:

$$r_2\dot{\varphi} = 2R_3\dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{r_2}{2R_3}\frac{\dot{s}}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{r_2}{2R_3}\frac{s}{R_2}, \; \ddot{\psi} = \frac{r_2}{2R_3}\frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

Sada, za vezu između veličina $\dot{x}$ i $\dot{s}$, iskoristimo gore napisani izraz $\dot{x} = R_3\dot{\psi}$:

$$\dot{x} = \frac{r_2}{2}\frac{\dot{s}}{R_2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r_2}{2}\frac{s}{R_2}, \; \ddot{x} = \frac{r_2}{2}\frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

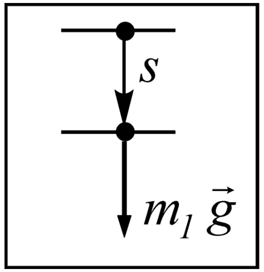
Kinetička energija sistema:

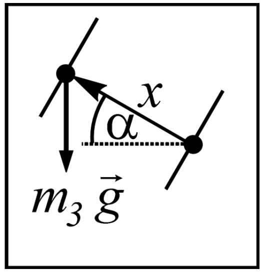
S obzirom na izraze za kinetičke energije pojedinih elemenata, i s obzirom na veze, dobiće se konačan izraz za kinetičku energiju sistema u proizvoljnom položaju:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{m_1}{2}\dot{s}^2 + \frac{m_2}{2} i^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m_3 R_3{}^2 \dot{\psi}^2 \quad \Rightarrow$$

$$E_k = B \cdot \dot{s}^2, \quad B = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\frac{i^2}{R_2{}^2} + \frac{3m_3}{16}\frac{r_2{}^2}{R_2{}^2} = const.$$

Rad:





Pri kretanju sistema rad vrše sile težina tereta i diska. Ukupni rad A se dobija sabiranjem njihovih radova pri premeštanju sistema iz početnog u proizvoljni položaj. S obzirom da su sada veze dobijene, pri određivanju rada i na njih ćemo se pozvati, kako bi se dobio rad u funkciji samo zadate promenljive *s* (pomoćne koordinate ovde moraju biti eliminisane na račun zadate).

$$A(m_1\vec{g}) = m_1 g \cdot s, \; A(m_3\vec{g}) = -m_3 g \cdot x \sin\alpha = -m_3 g \cdot \frac{r_2}{2R_2} s \cdot \sin\alpha.$$

Ukupan rad *A* u potrebnom obliku:

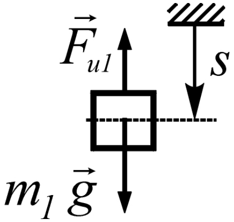
$$A = A(m_1\vec{g}) + A(m_3\vec{g}) \quad \Rightarrow \quad A = D \cdot s, \quad D = m_1 g - m_3 g \frac{r_2}{2R_2} \sin\alpha = const.$$

Određivanje traženog ubrzanja $\ddot{s}$:

Izvod po vremenu teoreme o promeni kinetičke energije daje: $\frac{d}{dt}\Big|\ E_k - E_{k0} = A \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Big|\ B\cdot\dot{s}^2 - E_{k0} = D\cdot s \quad\Rightarrow\quad B\cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D\cdot\dot{s} \quad\Rightarrow\quad \ddot{s} = \frac{D}{2B} = \ldots$$

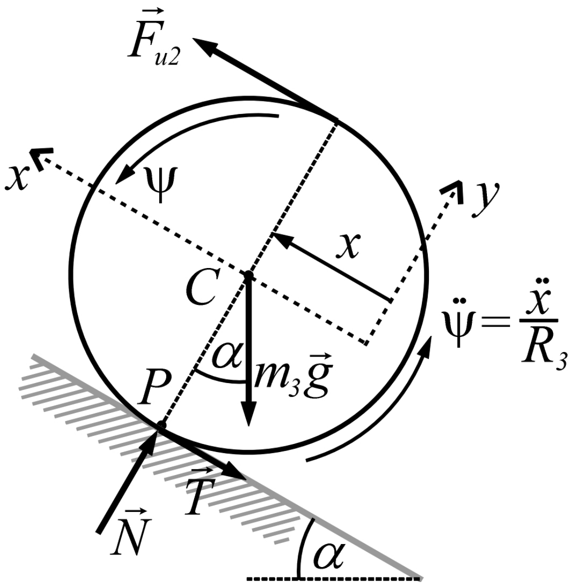
Određivanje sile u vertikalnom užetu:



Sila će se dobiti na osnovu drugog Njutnovog zakona za kretanje tereta u s pravcu:

$$m_1\cdot\ddot{s} = m_1 g - F_{u1} \quad\Rightarrow\quad F_{u1} = m_1(g-\ddot{s}) = m_1\left(g - \frac{D}{2B}\right).$$

Dinamičke jednačine ravnog kretanja:



Silu u kosom užetu i reakcije strme ravni određuju sledeće dinamičke jednačine ravnog kretanja diska:

1) $m_3\ddot{x}_C = m_2\ddot{x} = F_{u2} - m_3 g\sin\alpha - T,$

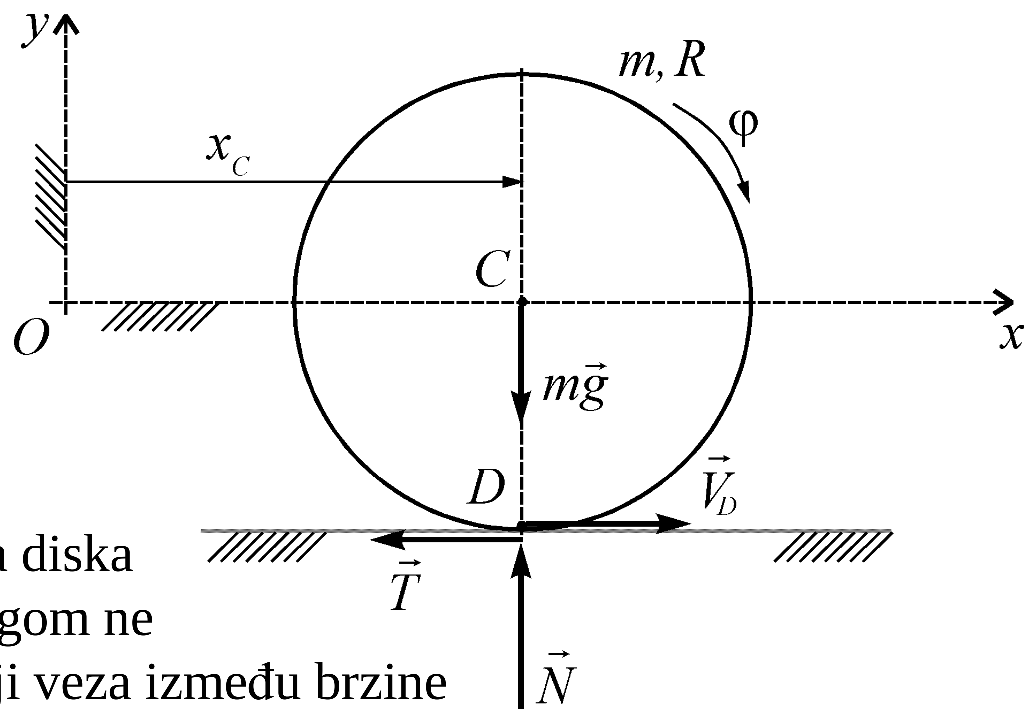
2) $m_3\ddot{y}_C = 0 = N - m_3 g\cos\alpha,$

3) $J_C\cdot\dfrac{\ddot{x}}{R} = F_{u2}R_3 + TR_3,$

gde je $J_C = \dfrac{1}{2}m_2R^2,\ \ddot{x} = \dfrac{r_2}{2}\dfrac{\ddot{s}}{R_2} = \dfrac{r_2}{4}\dfrac{1}{R_2}\dfrac{D}{B}.$

Osnovne karakteristike kotrljanja sa klizanjem.

Neka telo koje se kotrlja sa klizanjem vrši ravno kretanje (a ne neko komplikovanije kretanje u prostoru), osnovno je, da se pišu tri dinamičke jednačine ravnog kretanja tela.



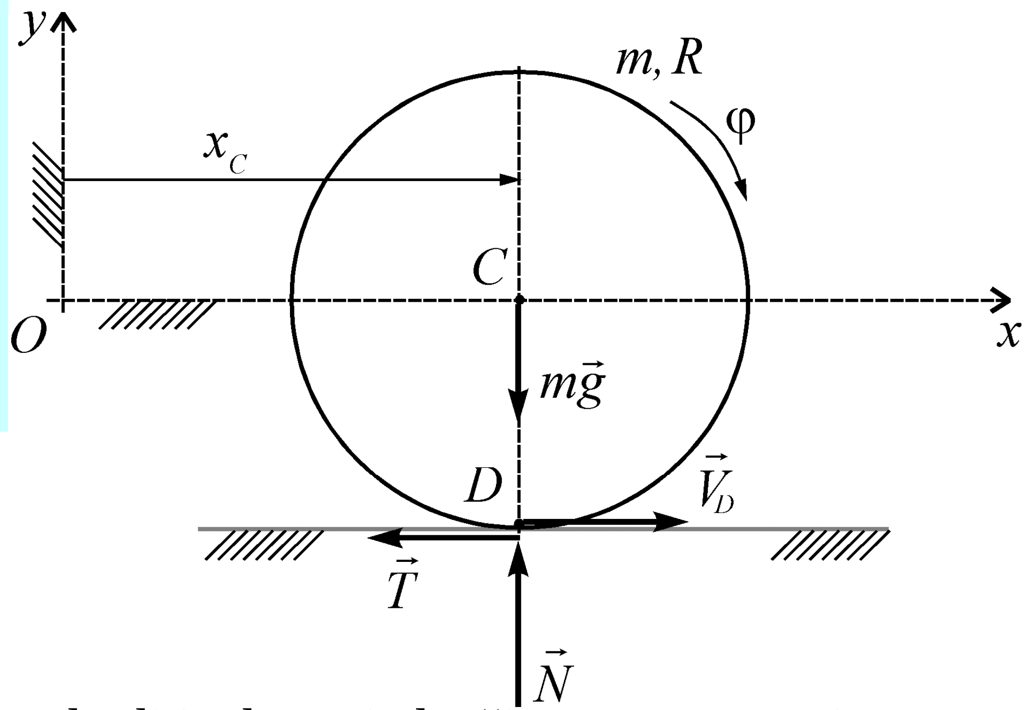
Zbog činjenice da se u tački dodira diska (točka, itd.) sa nepokretnom podlogom ne nalazi trnutni pol brzine, ne postoji veza između brzine centra i ugaone brzine i, za slučaj sa slike, važi $\dot{x}_C \neq R\dot{\varphi}$. Samim tim, ne postoji veza između ubrzanja centra i ugaonog ubrzanja i, u ovom slučaju, važi $\ddot{x}_C \neq R\ddot{\varphi}$.

Smer sile trenja $\vec{T}$, pri kotrljanju sa klizanjem, ne pretpostavlja se i mora biti tačan (suprotan je u odnosu na vektor brzine $\vec{V}_D$ njegove tačke dodira D). Ovde, intenzitet sile trenja, zbog klizanja, ima maksimalno moguću vrednost i jednak je njegovoj graničnoj vrednosti, dakle $T = \mu N$.

Na vezu $T = \mu N$ se, pri pisanju dinamičkih jednačina ravnog kretanja „moramo pozvati“. To znači da ćemo, na svakom mestu, u dinamičkim jednačinama ravnog kretanja, umesto T, stavljati μN.

Veoma je važno znati da sila trenja, u slučaju kotrljanja sa klizanjem, vrši rad, tj $A(\vec{T}) \neq 0.$ Taj rad, vrlo često, nije lako odrediti. Zbog toga, ovakvo $\vec{T}$ narušava konzervativnost sistema i nije prikladno korišćenje teoreme o promeni kinetičke energije, a zakon o održanju mehaničke energije ne važi, jer se, zbog trenja i zagrevanja, mehanička energija smanjuje na račun toplotne.

Dinamičke jednačine ravnog kretanja za sistem sa slike (prikazane sile sa te slike su samo neophodan minimum, smatrajmo da osim njih dejstvuje još nenacrtanih sila i spregova), mogle bi da imaju sledeći oblik:



1) $m\ddot{x}_C = -\mu N + \ldots$

2) $m\ddot{y}_C = 0 = N - mg + \ldots$

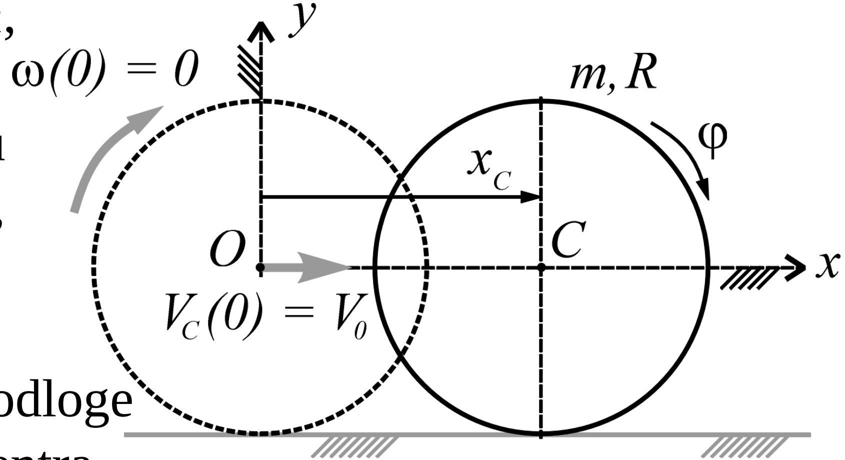
3) $J_C \cdot \ddot{\varphi} = +\mu NR + \ldots$

U ovakvim slučajevima obično se N odredi iz druge jednačine, prva se prvi put integrali da bi se dobilo $\dot{x}_C$ (zatim, nakon još jedne njene integracije moglo bi se dobiti x_C) a treća se prvi put integrali da bi se dobilo $\dot{\varphi}$ (zatim, nakon još jedne njene integracije moglo bi se dobiti φ).

U takvim problemima često se postavlja pitanje „do kog trenutka vremena $t=\bar{t}$ će važiti da imamo kotrljanje sa klizanjem, nakon kojeg će uslediti, kotrljanje bez klizanja?“. Odgovor bi trebao da bude sledeći: Dokle god važi da imamo kotrljanje sa klizanjem mora važiti nejednakost $\dot{x}_C(t) \neq R\dot{\varphi}(t)$.
U onom trenutku vremena $t=\bar{t}$, u kom važi jednakost $\dot{x}_C(\bar{t}) = R\dot{\varphi}(\bar{t})$, prestaje kotrljanje sa klizanjem i počinje kotrljanje bez klizanja.

U trenutku $t=\bar{t}$, tačka dodira postaje trenutni pol brzine.

Primer 5.21 Homogeni kružni disk mase *m*, poluprečnika *R*, kotrlja se sa klizanja po horizontalnoj podlozi. U početnom trenutku vremena brzina centra diska iznosila je V_0, ugaona brzina iznosila je nula a centar se nalazio u koordinatnom početku.



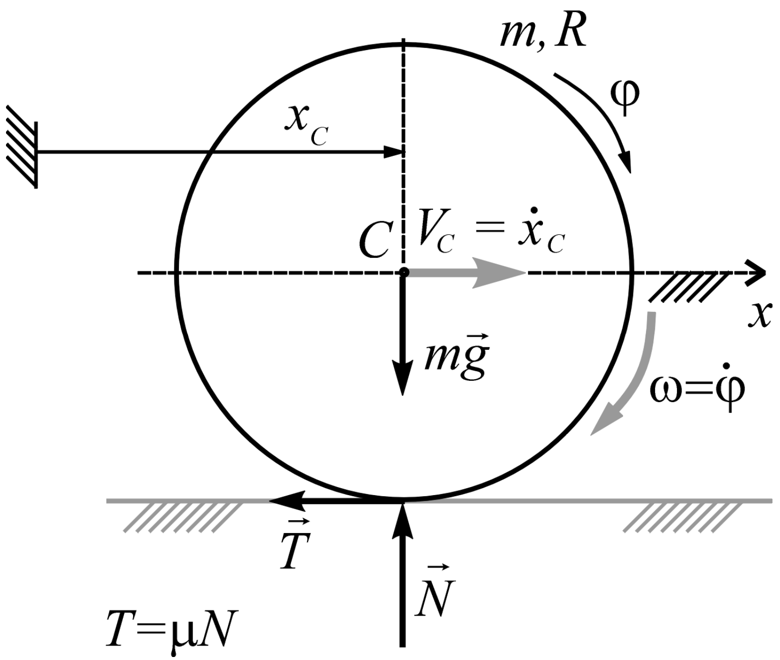
Koeficijent trenja klizanja između diska i podloge iznosi μ. Odrediti kako se menjaju brzina centra diska i njegova ugaona brzina u funkciji vremena dok traje kotrljanje sa klizanjem? Odrediti posle koliko vremena $t=\bar{t}$ od početka kretanja će prestati kotrljanje sa klizanjem i početi kotrljanje bez klizanja? Veličine: *m*, *R*, V_0 i μ smatrati poznatim.

S obzirom na sile koje pri kotrljanju sa klizanjem dejstvuju na disk, dinamičke jednačine ravnog kretanja imaju oblik:

1) $m\ddot{x}_C = -\mu N,$

2) $m\ddot{y}_C = 0 = N - mg,$

3) $J_C \cdot \ddot{\varphi} = +\mu NR, \quad J_C = \frac{1}{2} mR^2.$



Iz druge jednačine je $N = mg.$

Integraljenjem prve jednačine, s obzirom na početni uslov $\dot{x}_C(0) = V_0$, dobiće se brzina centra diska u funkciji vremena:

$$\ddot{x}_C = -\mu g \quad \Rightarrow \quad \int d\dot{x}_C = -\mu g \int dt \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = -\mu g t + C_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_C = V_0 - \mu g t.$$

Integraljenjem treće jednačine, s obzirom na početni uslov $\dot{\varphi}(0) = 0$, dobiće se ugaona brzina diska u funkciji vremena: $mR^2 \ddot{\varphi} = 2\mu m g R \Rightarrow$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2\mu g}{R} \Rightarrow d\dot{\varphi} = \frac{2\mu g}{R} dt \Rightarrow \int d\dot{\varphi} = \frac{2\mu g}{R} \int dt \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\mu g}{R} t + C_2 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\mu g}{R} t.$$

Trenutak vremena $t = \bar{t}$ kad prestaje kotrljanje sa klizanjem i počinje kotrljanje bez klizanja dobija se korišćenjem jednakosti $\dot{x}_C(\bar{t}) = R\dot{\varphi}(\bar{t})$: $\bar{t} = \dfrac{V_0}{3\mu g}.$