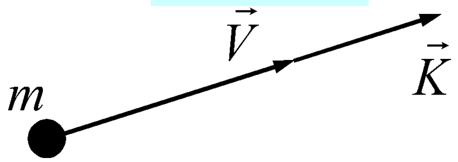
Količina kretanja materijalne tačke.

Ako tačka mase m, u nekom trenutku vremena, ima brzinu $\vec{V}$, onda je njena količina kretanja $\vec{K}$, u tom trenutku, jednaka proizvodu njene mase m i brzine $\vec{V}$, dakle $\vec{K} = m \cdot \vec{V}.$



Jasno je da je vektor količine kretanja tačke $\vec{K}$ istog pravca i smera kao vektor brzine $\vec{V}$.

Projekcija vektorske jednakosti $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$ na, na primer, x osu, daje $K_x = m \cdot V_x.$ To znači da je projekcija vektora količine kretanja tačke na neku osu, jednaka, proizvodu mase tačke i projekcije vektora brzine na tu osu. Projekcija K_x se naziva i količinom kretanja tačke u x pravcu.

Impuls sile.

Množenjem vektora neke sile $\vec{F}$, sa proteklim elementarnim vremenom dt, dobija se elementarni impuls te sile u vremenskom intervalu dt, dakle $d\vec{I}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\,dt$

Pošto vektori elementarnog impulsa i sile mogu biti izraženi preko svojih projekcija na način $d\vec{I} = dI_x\,\vec{i} + dI_x\,\vec{j} + dI_x\,\vec{k},\ \vec{F} = X_F\,\vec{i} + Y_F\,\vec{j} + Z_F\,\vec{k},$ projektovanjem vektorske jednakosti $d\vec{I}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\,dt$ na koordinatne ose, dobijaju se formule $dI_x = X_F dt,\ dI_y = Y_F dt,\ dI_z = Z_F dt,$ koje definišu elementarne impulse sile u pravcu osa, koji su skalarne veličine.

Impuls neke sile $\vec{F}$ u konačnom vremenskom intervalu $t_1 \le t \le t_2$, dobija se integracijom izraza $d\vec{I}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\,dt$, gde su granice integrala početni i krajnji trenutak vremena. Dakle impuls sile $\vec{F}$, u vremenskom intervalu $t_1 \le t \le t_2$, definisan je na način

$$\vec{I}\left(\vec{F}\right)_{t_1 - t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt.$$

Pošto impuls sile $\vec{F}$ može biti izraženi preko svojih projekcija, na način $\vec{I}\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2} = I_x\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2}\vec{i} + I_y\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2}\vec{j} + I_z\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2}\vec{k}$, njegove projekcije (skalari), su definisane formulama

$$I_x\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} X_F\,dt,\quad I_y\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} Y_F\,dt,\quad I_z\left(\vec{F}\right)_{t_1-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} Z_F\,dt.$$

Da bi se po gornjim formulama mogao odrediti impuls promenjljive sile $\vec{F}$ u zadatom vremenskom intervalu mora se znati zavisnost sile (odnosno, njenih projekcija) od vremena t (a ne nekih drugih veličina, kao što su položaj i brzina).

Teorema o promeni količine kretanja tačke.

Ako bismo umesto ubrzanja tačke $\vec{a}$, u drugom Njutnovom zakonu, stavili prvi izvod vektora brzine po vremenu $d\vec{V}/dt$, a zatim pomnožili, i levu i desnu stranu, sa elementarno proteklim vremenom dt, dobili bismo sledeću jednakost

$$m\,d\vec{V} = \sum \vec{F}_i\,dt.$$

Sada, leva strana dobijene jednakosti $m\,d\vec{V} = \sum \vec{F}_i\, dt$, može biti zapisana na način $d\left(m\vec{V}\right) = d\vec{K}$, a desna strana, zbog $d\vec{I}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\,dt$, predstavlja sumu elementarnih impulsa svih sila koje dejstvuju na tačku $d\vec{K} = \sum d\vec{I}\left(\vec{F}_i\right)$.

Dobijeni izraz predstavlja teoremu o promeni količine kretanja tačke u difere-ncijalnom obliku. Rečima iskazan glasi: elementarni priraštaj količine kretanja tačke, za elementarno proteklo vreme dt jednak je sumi elementarnih impulsa svih sila $\vec{F}_i$ koje dejstvuju na tačku u tom vremenskom intervalu.
Projektovanjem vektorske teoreme $d\vec{K} = \sum d\vec{I}\left(\vec{F}_i\right)$ na neku od osa, na primer x, dobili bismo skalarnu jednakost $dK_x = \sum dI_x\left(\vec{F}_i\right)$,

kojom se određuje elementarni priraštaj količine kretanja u pravcu te ose.
Teorema o promeni količine kretanja tačke u konačnom obliku za neki vremenski interval $t_1 \le t \le t_2$, dobijena integraljenjem izraza $d\vec{K} = \sum d\vec{I}\left(\vec{F}_i\right)$, može biti zapisana na sledeći način $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{I}\left(\vec{F}_i\right)_{t_0 - t_1}$.

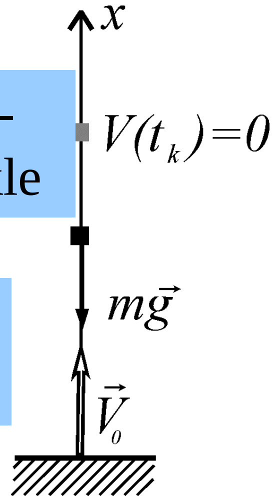
Rečima iskazana glasi: količina kretanja tačke u nekom trenutku t_2, umanjena za količinu kretanja tačke u nekom trenutku t_1, jednaka je sumi impulsa svih sila $\vec{F}_i$, koje dejstvuju na tačku u vremenskom intervalu $t_1 \le t \le t_2$. Često se na levoj strani dobijene jednakosti umesto $\vec{K}_2 - \vec{K}_1$ piše $m\vec{V}_2 - m\vec{V}_1$, što direktnije uključuje vektore brzina u trenucima t_2 i t_1.

Varijanta ove teoreme u skalarnom obliku zapravo je projekcija vektorske jednakosti $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \vec{I}\left(\vec{F}_i\right)_{t_0-t_1}$ na neku od osa. Na primer, porojekcija na osu x, može biti zapisana

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum I_x\left(\vec{F}_i\right)_{t_0-t_1} \quad \text{ili} \quad mV_x(t_2) - mV_x(t_1) = \sum \int_{t_0}^{t_1} X_i dt,$$

a znači: projekcija količine kretanja tačke na x osu u nekom trenutku t_2, umanjena za projekciju količine kretanja tačke na x osu u nekom trenutku t_1, jednaka je sumi projekcija impulsa na x osu svih sila $\vec{F}_i$, koje dejstvuju na tačku u vremenskom intervalu $t_1 \le t \le t_2$.

Primer 5.8 Primenom teoreme o promeni količine kretanja tačke odrediti koliko vremena t_k, kod vertikalnog hica naviše, će proći dok tačka ne dostigne svoj najviši položaj? Početnu brzinu V_0 smatrati poznatom.



Neka je osa x, vertikalna, naviše usmerena, tako da je $V(0) = V_0$. Brzina u traženom krajnjem trenutku vremena mora biti jednaka nuli, dakle $V(t_k) = 0$.

Projekcija teoreme o promeni količine kretanja tačke na x osu, gde je vremenski interval $0 \le t \le t_k$ određuje nepoznatu t_k :

$$mV(t_k) - mV(0) = \int_0^{t_k} (-mg)dt \Rightarrow \quad m \cdot 0 - m \cdot V_0 = -mg \cdot t_k \Rightarrow \quad t_k = \frac{V_0}{g}.$$

Primer 5.9 Primenom teoreme o promeni količine kretanja tačke, dokazati da je kod kosog ili horizontalnog hica, projekcija brzine na horizontalnu x osu konstantna tokom kretanja.

Projekcija teoreme o promeni količine kretanja tačke na x osu, za proizvoljni vremenski interval $t_1 \le t \le t_2$ tokom kretanja, može da ima oblik

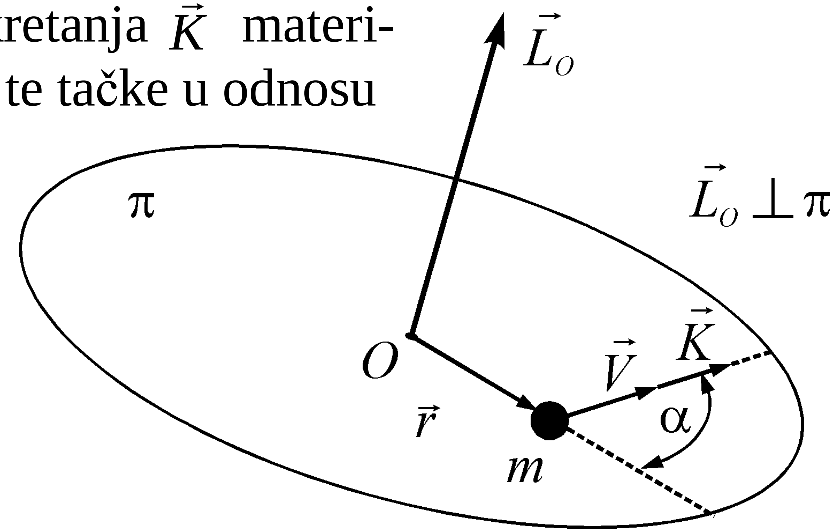
$$mV_x(t_2) - mV_x(t_1) = 0 \quad \Rightarrow V_x(t_1) = V_x(t_2),$$

što govori da su projekcije brzine, na horizontalnu x osu, u ma koja dva proizvoljna trenutka tokom kretanja, jednake. Time se dokazuje da je projekcija brzine na horizontalnu x osu konstantna tokom kretanja. Na desnoj strani je napisana nula, pošto jedina sila koja dejstvuje na tačku kod hica je vertikalna sila $m\vec{g}$, čiji impuls u x pravcu mora biti jednak nuli.

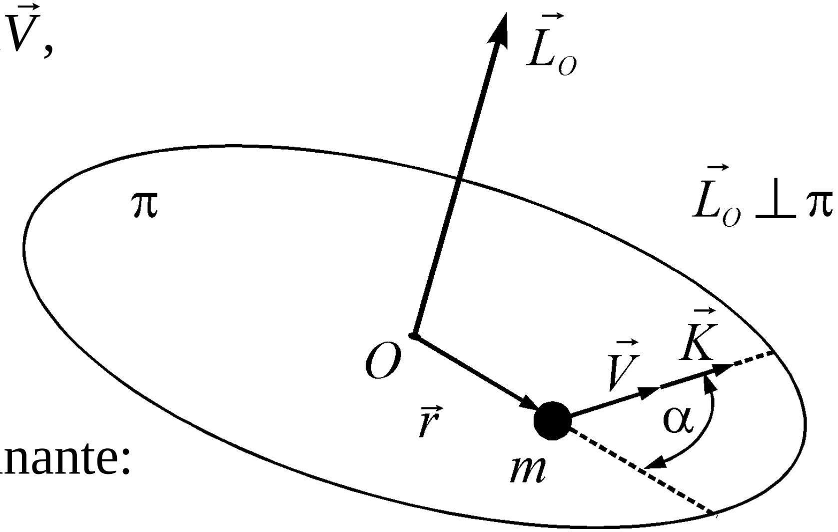
Moment količine kretanja materijalne tačke za nepokretnu tačku.

Neka je u nekom trenutku poznata količina kretanja $\vec{K}$ materijalne tačke mase m, kao i vektor položaja $\vec{r}$ te tačke u odnosu na koordinatni početak O nepokretnog koordinatnog sistema. Vektor momenta količine kretanja $\vec{L}_O$ te tačke za nepokretnu tačku O, definisan je kao sledeći vektorski proizvod

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{V}.$$



Vektori koji se vektorski množe $\vec{r}$ i $\vec{K} = m\vec{V}$, obrazuju ravan π, a vektor $\vec{L}_O$ mora biti upravan na tu ravan.



Pošto vektori $\vec{r}$ i $\vec{K} = m\vec{V}$ mogu biti zapisani preko svojih projekcija na način

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{K} = m\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j} + m\dot{z}\vec{k}$,

vektor $\vec{L}_O$ može biti određen preko determinante:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = m(y\dot{z} - z\dot{y})\vec{i} + m(z\dot{x} - x\dot{z})\vec{j} + m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{k}.$$

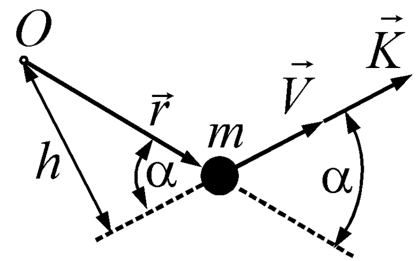
Koeficijenti uz jedinične vektore u dobijenom izrazu za $\vec{L}_O$ su njegove projekcije na koordinatne ose: $L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y})$, $L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z})$, $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Ove projekcije nazivamo i momentima količine kretanja za odgovarajuće ose.

Intenzitet vektora $\vec{L}_O$ određuje formula $\left|\vec{L}_O\right| = r \cdot K \cdot \sin\alpha$.

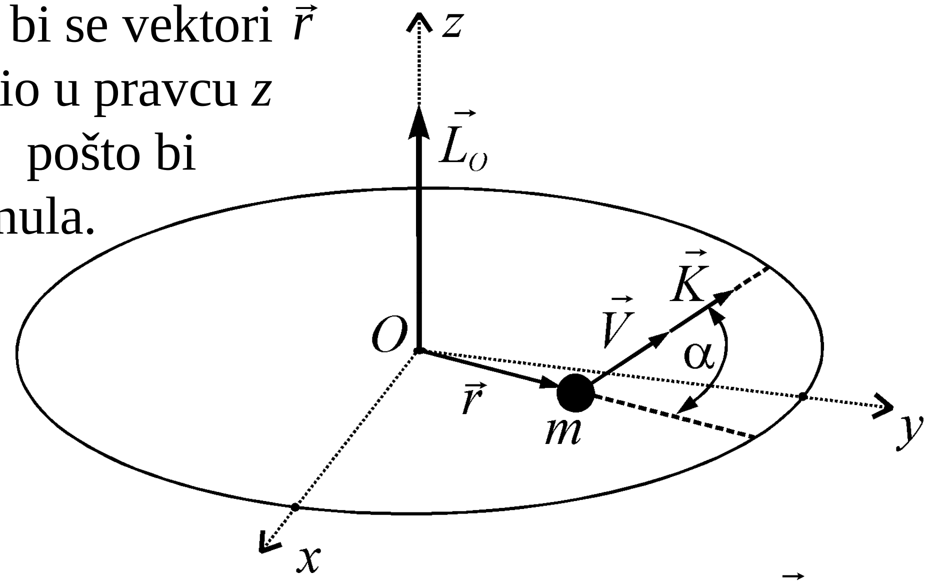
Zbog $r \cdot \sin\alpha = h$ (donja slika), intenzitet vektora $\vec{L}_O$ može biti određen formulom $\left|\vec{L}_O\right| = K \cdot h = mV \cdot h$, $\quad h = r \cdot \sin\alpha$

gde je h krak količine kretanja $\vec{K} = m\vec{V}$ za tačku O.



Moment količine kretanja tela koje se obrće oko nepomične ose za tu osu.

Ako bi se tačka kretala u *xy* ravni, onda bi se vektori $\vec{r}$ i $\vec{K}$ nalazili u toj ravni a vektor $\vec{L}_O$ bi bio u pravcu *z* ose. Zapis vektora $\vec{L}_O$ bio bi $\vec{L}_O = L_z \vec{k}$, pošto bi njegove projekcije na ose *x* i *y* iznosile nula.



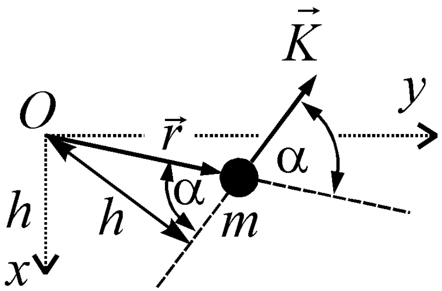
Intenzitet vektora $\vec{L}_O$, u takvom slučaju, bio bi isti kao i njegova projekcija na osu *z* (donja slika), koja istovremeno predstavlja moment količine kretanja za osu *z*:

$$\left|\vec{L}_O\right| = L_z = K \cdot h = mV \cdot h.$$

Moment količine kretanja tačke $\vec{K}$ za neku osu, ako količina kretanja $\vec{K}$ leži u ravni upravnoj na tu osu, jednak je proizvodu intenziteta količine kretanja i njenog kraka za tu osu sa predznakom „+“ ili „-“. Dakle, $L_z = \pm K \cdot h = \pm mV \cdot h.$

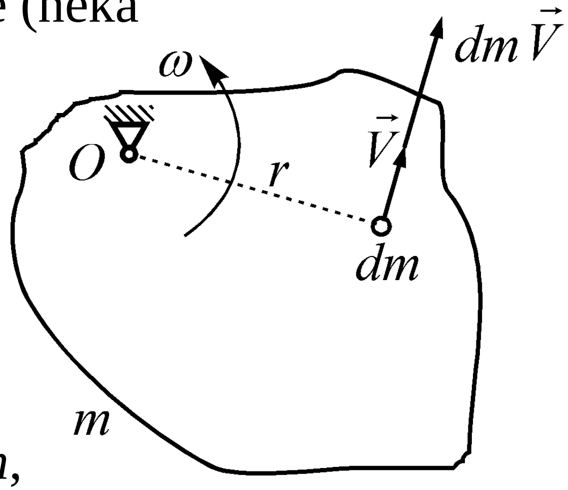
$$h = r \cdot \sin\alpha$$

$$\left|\vec{L}_O\right| = L_z = +K \cdot h = +mV \cdot h$$



Predznak je „+“ ako gledano u pravcu te ose u smeru, suprotnom od orijentacije ose, količina kretanja $\vec{K}$ teži da obrne oko ose u smeru, suprotnom od kazaljke na satu. Ako je, tako gledano, težnja za obrtanjem u smeru kazaljke onda je predznak „-“.

Na slici je prikazano telo mase m, koje se obrće oko zgloba O, u ravni crteža, ugaonom brzinom ω, što znači da se telo obrće oko ose (neka je označena sa z) koja prolazi kroz tačku O, upravna je na ravan crteža a smer joj je iz crteža. Elementarna čestica tela mase dm, čije najkraće rastojanje do ose obrtanja iznosi r, ima količinu kretanja $dm \cdot \vec{V}$, čiji intenzitet je $dm \cdot V = dm \cdot r \cdot \omega$. Pošto krak količine kretanja elementarne čestice za osu z iznosi r njen moment količine kretanja je $dL_z = dm \cdot r \cdot \omega \cdot r = \omega r^2 dm$,



a nakon integracije po čitavoj masi, s obzirom na činjenicu da ω, kao globalna karakteristika, ide ispred integrala, tražena formula ima oblik

$$L_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm = J_z \cdot \omega.$$

Dakle, *moment količine kretanja tela koje se obrće oko nepomične ose za tu osu, jednak je, proizvodu momenta inercije tela za tu osu i ugaone brzine tela.*

Teorema o promeni momenta količine kretanja.

Izvedimo teoremu o promeni momenta količine kretanja za materijalnu tačku. Ako bismo umesto ubrzanja tačke $\vec{a}$, u drugom Njutnovom zakonu, stavili prvi izvod vektora brzine po vremenu $d\vec{V}/dt$, a zatim pomnožili takvu vektorsku jednakost vektorski, sa leve strane, vektorom položaja tačke dobili bismo sledeću jednakost $\vec{r} \times m\left(d\vec{V}/dt\right) = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i$.

Vektor položaja $\vec{r}$, proteže se od koordinatnog početka *O* do tačke mase *m*.
Pošto je iz statike poznato da je moment sile $\vec{F}_i$ za tačku *O* definisan na način $\vec{M}_O^{\vec{F}_i} = \vec{r} \times \vec{F}_i$, desna strana jednakosti $\vec{r} \times m\left(d\vec{V}/dt\right) = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i$ predstavlja sumu momenata svih sila koje dejstvuju na tačku za tačku koordinatnog početka *O*, dakle $\vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$.

Jednakost,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{V}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt},$$

u kojoj je primenjeno pravilo za izvod proizvoda i iskorišćeno da je $d\vec{r}/dt = \vec{V}$, važi, jer se vektorskim množenjem kolinearnih vektora dobija nula vektor.
S obzirom na sve gore napisano vektorski oblik ove teoreme je $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$.

Rečima iskazana, teorema o promeni momenta količine kretanja tačke, glasi: ***izvod po vremenu vektora momenta količine kretanja tačke za nepokretnu tačku O, jednak je sumi momenata svih sila koje dejstvuju na tačku za istu tačku O***.
Projekcije ove vektorske teoreme na koordinatne ose daje sledeće jednakosti:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x^{\vec{F}_i}, \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum M_y^{\vec{F}_i}, \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\vec{F}_i},$$

koje ćemo nazivati i teoremama o promeni momenta količine kretanja tačke za odgovarajuće ose.

Rečima iskazana, teorema o promeni momenta količine kretanja tačke za, na primer, osu z, glasi: ***izvod po vremenu momenta količine kretanja tačke za osu z, jednak je sumi momenata svih sila koje dejstvuju na tačku za istu osu.***

Ali, ova teorema u veoma sličnom obliku važi i za sistem. Na primer, teorema o promeni momenta količine kretanja sistema za osu *z*, pisala bi se na način

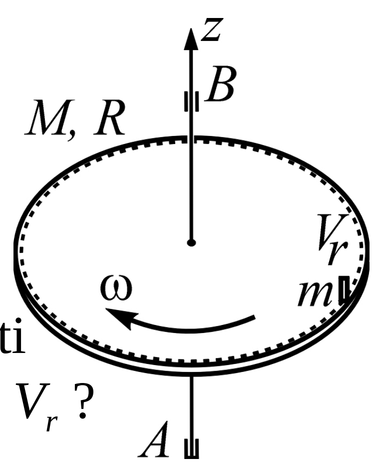
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\vec{F}_i^s}.$$

Ovde je L_z jednako sumi momenata količina kretanja svih tačaka i tela koji pripadaju sistemu za osu z, a $\vec{F}_i^s$ su samo one sile koje dejstvuju na sistem kao celinu (nazivaju se još i spoljašnjim silama).

Rečima iskazana, teorema o promeni momenta količine kretanja sistema za osu z glasi: ***izvod po vremenu momenta količine kretanja sistema za osu z, jednak je sumi momenata svih spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem za istu osu.***

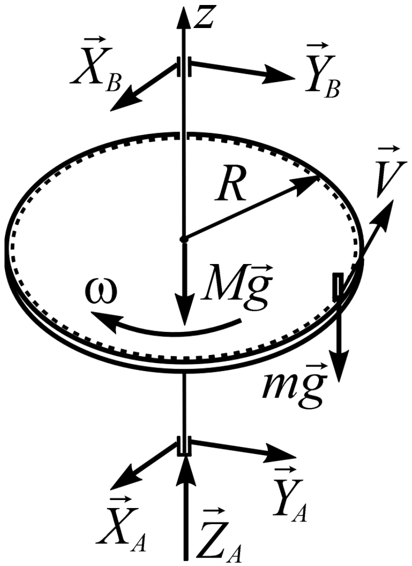
Ovde treba znati da unutrašnje sile zbog potiranja, ne dejstvuju na sistem i ne mogu se pojaviti u ovoj teoremi.

Primer 5.10 Homogeni kružni disk, poluprečnika *R*, mase *M*, obrće se oko vertikalne ose *z* bez otpora. Po obodu diska kreće se čovek mase *m*. U početnom trenutku sistem, sačinjen od diska i čoveka, je mirovao. Kretanje čoveka po obodu diska prouzrokuje obrtanje diska oko ose *z*. Odrediti koliku će ugaonu brzinu ω imati disk kada relativna brzina čoveka u odnosu na disk bude iznosila V_r ?

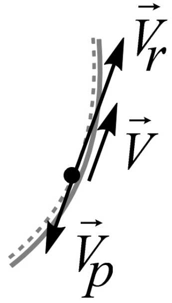


Iskoristimo teoremu o promeni momenta količine kretanja sistema za osu z, u obliku $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\vec{F}_i^s}$.

Na slici 1 prikazane su sve sile koje dejstvuju na sistem kao celinu. Tu spadaju sile težina diska i čoveka kao i reakcije u ležištima A i B. Pošto za osu z nijedna ot tih sila ne pravi moment, desna strana ove teoreme jednaka je nuli, zbog čega pri kretanju, L_z mora biti konstantno. To znači L_z u početku (označimo ga sa $[L_z]_0$) mora biti jednako sa L_z na kraju (označimo ga sa $[L_z]_k$) kada relativna brzina čoveka u odnosu na disk iznosi V_r:



1)



$V_p = R\omega$

$V = V_r - V_p$

$V = V_r - R\omega$

2)

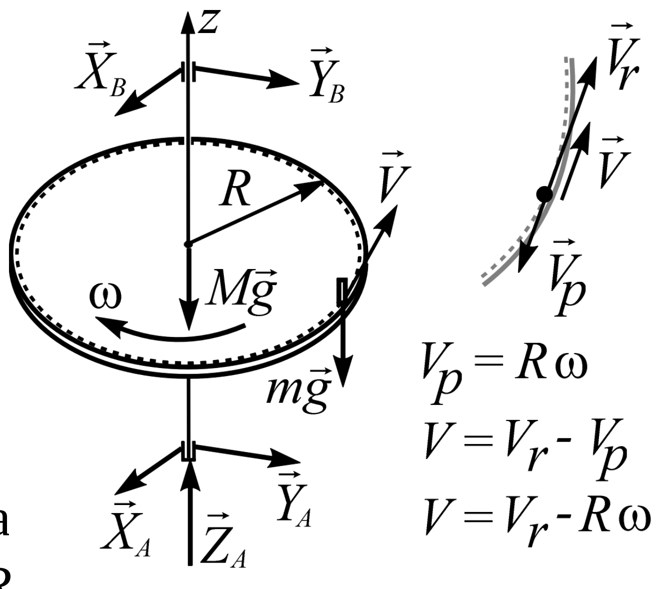
$L_z = const. \quad \Rightarrow \quad [L_z]_0 = [L_z]_k.$

Zbog započinjanja kretanja iz stanja mirovanja imamo da je $[L_z]_0 = 0$. Moment količine kretanja sistema za z osu $[L_z]_k$ dobijamo kao zbir momenta količine kretanja diska $[L_z]_1$ i momenta količine kretanja čoveka $[L_z]_2$.

Prema formuli $L_z = J_z \cdot \omega$ imamo da je $[L_z]_1 = -J_z \cdot \omega = -\dfrac{1}{2} MR^2 \cdot \omega,$

gde je predznak „-“ zbog smera ugaone brzine.

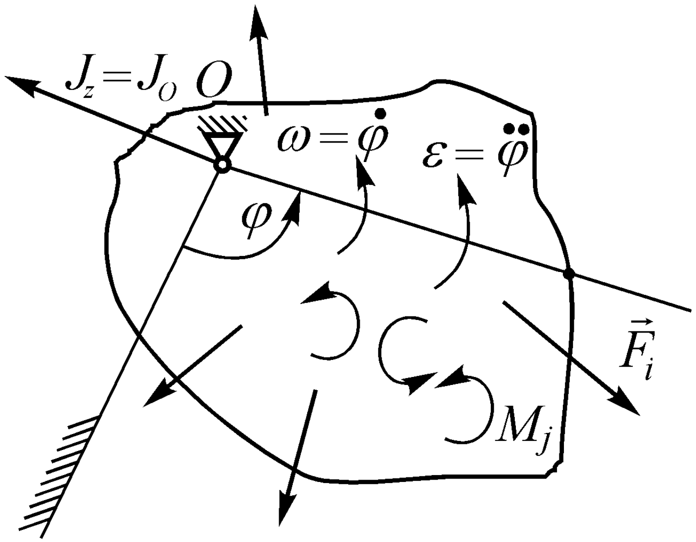
Da bi dobili $[L_z]_2$, moramo naći apsolutnu brzinu čoveka, pošto je količina kretanja čoveka $\vec{K}_2$, jednaka proizvodu njegove mase i njegove apsolutne brzine $\vec{K}_2 = m\vec{V}$. Apsolutnu brzinu čoveka određuje formula $\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r$ (Sl.2), koja, zbog kolinearnosti ovih vektora, njihovih smerova i činjenice da je $V_p = R\omega$, iznosi $V = V_r - R\omega$. Sada je intenzitet vektora količine kretanja čoveka jednak $K_2 = m(V_r - R\omega)$, a pošto je njegov krak za osu z jednak R, imamo da je $[L_z]_2 = m(V_r - R\omega)\cdot R$. Na osnovu svega rečenog dobiće se jednačina iz koje se određuje traženo ω:



1) *2)*

$$[L_z]_0 = [L_z]_k \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega + m(V_r - R\omega)\cdot R \Rightarrow \quad \omega = \frac{2mV_r}{R^2(M+2m)}.$$

Diferencijalna jednačina obrtanja krutog tela oko nepomične ose.

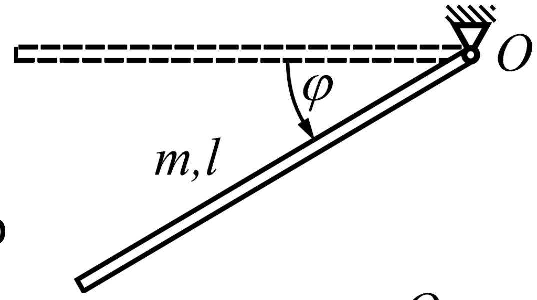


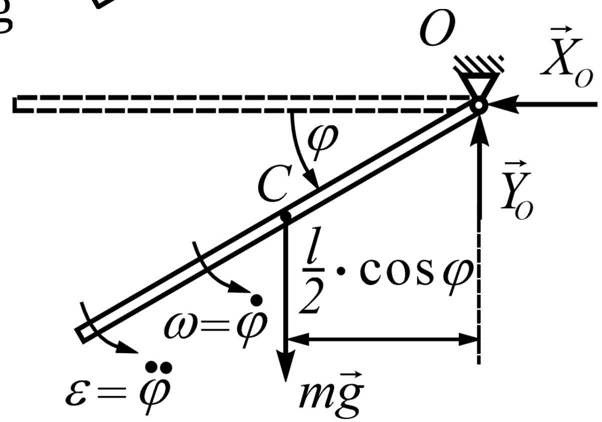
Kada se telo obrće oko nepomične ose z, pod dejstvom sila i spregova, teorema o promeni momenta količine kretanja sistema za osu z primenjen na to telo daje: $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\vec{F}_i}.$

S obzirom da prema $L_z = J_z \cdot \omega$ imamo da je moment količine kretanja tela za osu z određen formulom $L_z = J_z \cdot \omega = J_O \cdot \dot{\varphi}$, prethodna jednakost daje $J_O \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_O^{\vec{F}_i}.$

Dobijeni izraz je tražena diferencijalna jednačina obrtanja krutog tela oko nepomične ose ili dinamička jednačina obrtanja. Rečima iskazana ova jednačina: ***moment inercije tela za osu obrtanja pomnožen sa ugaonim ubrzanjem tela jednak je algebarskoj sumi momenata svih sila i spregova za osu obrtanja.*** Kod pisanja desne strane ove jednačine treba znati da je predznak momenta definisan smerom porasta koordinate φ.

Primer 5.11 Korišćenjem diferencijalne jednačine obrtanja oko nepomične ose odrediti ugaono ubrzanje homogenog štapa mase m, dužine l, koji se u ravni crteža obrće oko zgloba O u zavisnosti od ugla φ? Štap je započeo kretanje iz stanja mirovanja i horizontalnog položaja. Odrediti takođe i njegovu ugaonu brzinu u zavisnosti od φ?





Diferencijalna jednačina obrtanja ovog štapa je:

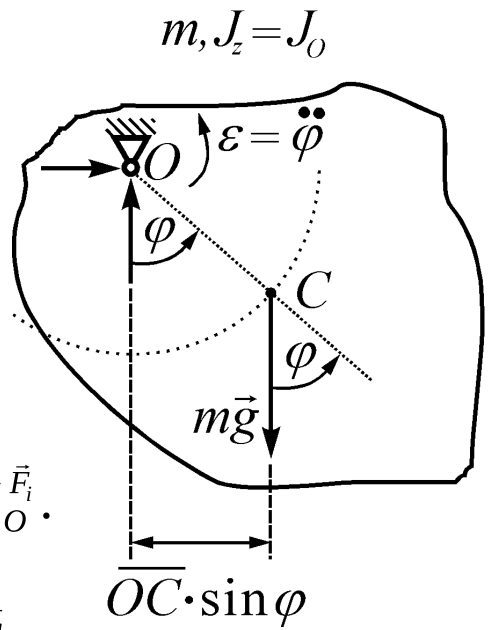
$$J_O\cdot\ddot{\varphi}=mg\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi,\quad \text{gde je } J_O=\frac{1}{3}\mathrm{m}l^2.$$

Direktno iz gornjih jednakosti, dobija se da je traženo ugaono ubrzanje: $\varepsilon(\varphi)=\ddot{\varphi}(\varphi)=\dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l}\cos\varphi.$

Za dobijanje tražene ugaone brzine $\omega(\varphi)=\dot{\varphi}(\varphi)$, jedan način je integracija gornje diferencijalne jednačine uz zadate početne uslove: $\varphi(0)=0,\dot{\varphi}(0)=0.$ Drugi, jednostavniji, način za dobijanje $\omega(\varphi)=\dot{\varphi}(\varphi)$, je korišćenje teoreme o promeni kinetičke energije štapa, prema kojoj imamo: $E_K-E_{K0}=A \quad\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2-\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}(0)^2=mg\frac{l}{2}\sin\varphi\Rightarrow \quad \omega^2(\varphi)=mg\frac{l}{J_O}\sin\varphi\Rightarrow \quad \omega(\varphi)=\sqrt{\frac{3g}{l}\sin\varphi}.$$

Fizičko klatno.



Ako se telo ma kakvog oblika obrće oko horizontalne ose z pod dejstvom jedino sile njegove težine i pri tom vrši oscilacije onda je to fizičko klatno. Koordinata φ, pošto je ovo oscilatorni problem, meri se od vertikale do pravca koji spaja tačku obrtanja *O* sa centrom *C*, jer u revnote-žnom položaju, oko kojeg klatno osciluje, ta koordinata iznosi nula. Primena diferencijalne jednačine $J_O \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_O^{\vec{F}_i}$. na fizičko klatno daje: $J_O \cdot \ddot{\varphi} = -mg \cdot \overline{OC} \sin\varphi \quad \Rightarrow$

$$J_O \cdot \ddot{\varphi} + mg \cdot \overline{OC} \sin\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{mg \cdot \overline{OC}}{J_O}.$$

Ako se, kao i kod matematičkog klatna, u tačnoj diferencijalnoj jednačini sinus ugla φ aproksimira sa samim uglom φ, onda se dobija linearna diferencijalna jednačina fizičkog klatna oblika $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$ gde kružnu frekvenciju slobodnih oscilacija ω i period oscilovanja *T* definišu izrazi:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg \cdot \overline{OC}}{J_O}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mg \cdot \overline{OC}}}.$$

Pomenuta aproksimacija je opravdana samo u slučaju malih oscilacija, kada je ugao φ mala veličina.

Pošto je diferencijalna jednačina fizičkog klatna ista kao i harmonijskog oscilatora, o čijem rešavanju je dovoljno rečeno, ovde se to neće ponavljati.

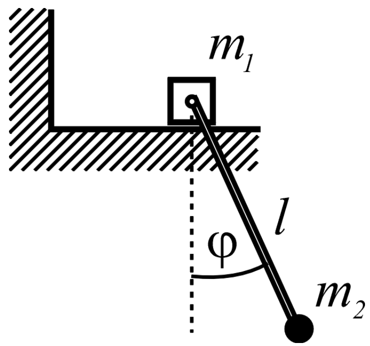
Teorema o kretanju središta masa sistema.

Grubo rečeno, ono što je drugi Njutnov zakon za dinamiku tačke, to je teorema o kretanju središta masa sistema za sistem. Prema toj teoremi ***proizvod mase sistema i vektora ubrzanja središta masa sistema jednak je sumi svih sila koje dejstvuju na sistem kao celinu (tj., svih spoljašnjih sila):*** $M \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^{\,s}$.

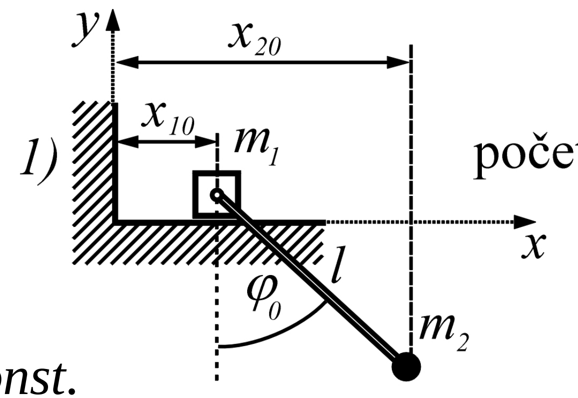
Ovde je M ukupna masa sistema. U nepokretnom koordinatnom sistemu vektor ubrzanja središta masa sistema $\vec{a}_C$ ima oblik $\vec{a}_C = \ddot{x}_C \vec{i} + \ddot{y}_C \vec{j}$, gde su drugi izvodi koordinata centra masa sistema C, zapravo, odgovarajuće projekcije vektora $\vec{a}_C$ na koordinatne ose.

Pri rešavanju problema ovom teoremom gotovo uvek se ona primenjuje u skalarnom obliku koji predstavlja njenu projekciju na neku od osa. Projekcije vektorske jednakosti $M \cdot \vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^{\,s}$ na ose x i y su: $M \cdot \ddot{x}_C = \sum X_i^{\,s}$, $M \cdot \ddot{y}_C = \sum Y_i^{\,s}$.

Primer 5.12 Sistem prikazan na slici čine materijalne tačke masa m_1 i m_2 i laki štap koji ih povezuje, dužine l. Tačka mase m_1 klizi po horizontalnoj glatkoj podlozi. Sistem je započeo kretanje iz stanja mirovanja a ugao φ je u početnom položaju iznosio φ_0. Odrediti koliko se od početnog do proizvoljnog položaja pomerila tačka mase m_1 .

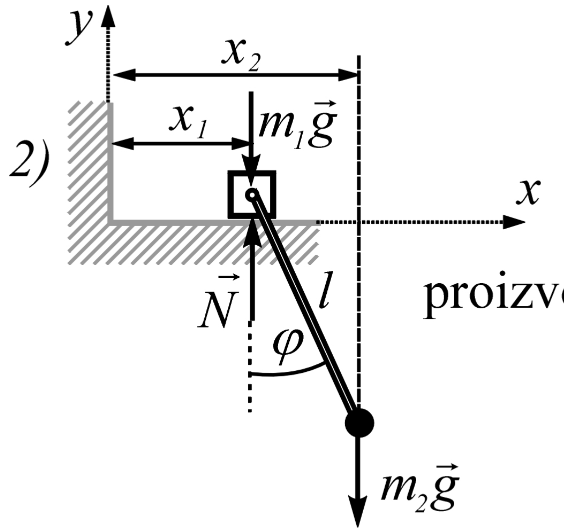


Na slici 2 prikazane su sve sile koje pri kretanju dejstvuju na sistem kao celinu i pošto se nijedna od njih ne projektuje na x osu, iz jednačine $M \cdot \ddot{x}_C = \sum X_i^s$ imamo:



$$M \cdot \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const.$$

Ova konstanta iznosi „0“ jer je sistem započeo kretanje iz stanja mirovanja, kada su sve tačke sistema imale brzinu jednaku nuli, zbog čega je i brzina centra masa sistema takođe morala biti jednaka nuli. Zbog toga je i njena projekcija $\dot{x}_C(0)$ takođe morala biti jednaka nuli, pa imamo:



$$\dot{x}_C = 0 \Rightarrow \frac{dx_C}{dt} = 0 \Rightarrow x_C = const. \Rightarrow x_{C0} = x_C.$$

Sada, korišćenjem formule $x_C = \left(\sum m_i x_i\right)/M$ dobijamo traženo pomeranje Δx .

$$\frac{\sum m_i x_{i0}}{M} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \Rightarrow \sum m_i x_{i0} = \sum m_i x_i \Rightarrow m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \Rightarrow$$

$$m_1 x_{10} + m_2\left(x_{10} + l\sin\varphi_0\right) = m_1 x_1 + m_2\left(x_1 + l\sin\varphi\right) \Rightarrow \Delta x = \frac{m_2 l\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right)}{m_1 + m_2}.$$

Teorema o promeni količine kretanja sistema - primer.

Vektor količine kretanja nekog sistema jednak je zbiru vektora količina kretanja tela koja čine taj sistem: $\vec{K} = \sum \vec{K}_i = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + ...$

Projekcija vektora količine kretanja sistema na neku osu jednaka je zbiru projekcija na tu osu, vektora količina kretanja tela koja čine taj sistem:

$$K_x = \sum K_{ix} = K_{1x} + K_{2x} + ...$$

Umesto termina „projekcija vektora količine kretanja na osu“, često se koristi termin „količina kretanja za osu“.

Matematički zapis teoreme o promeni količine kretanja sistema ima oblik:

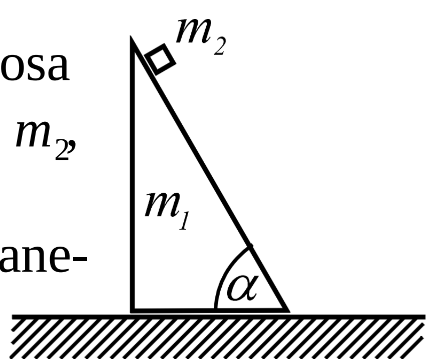
$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\,s}.$$

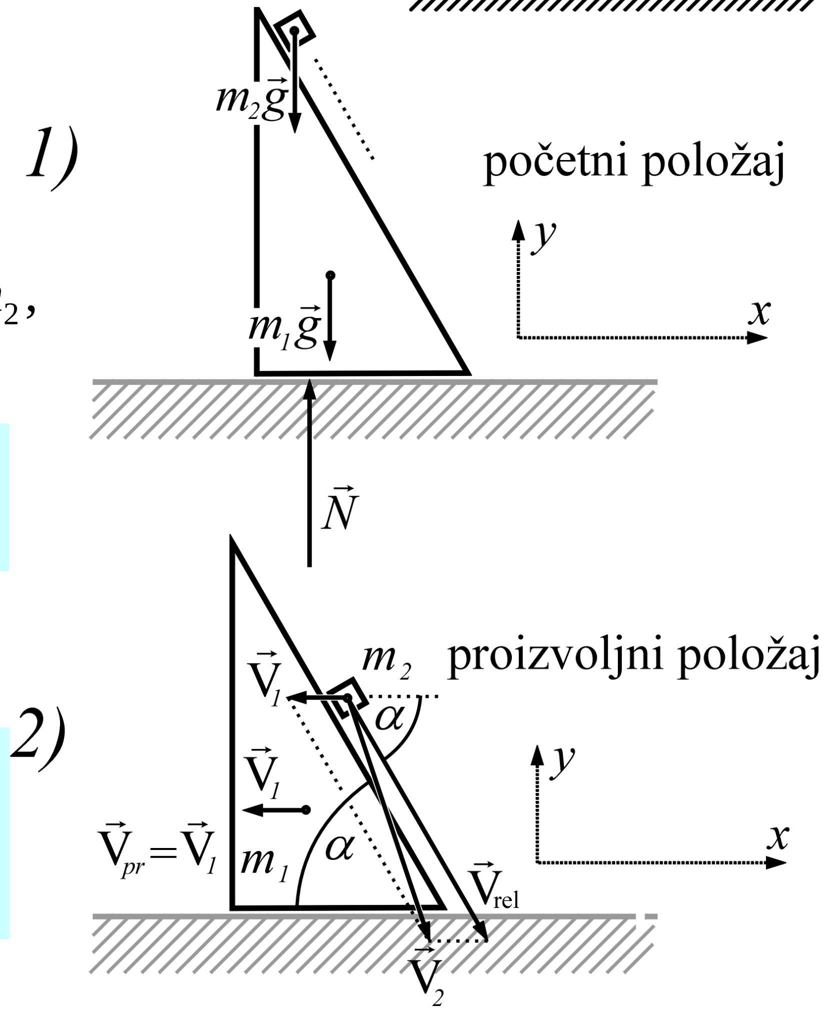
Rečima iskazan ovaj zakon glasi: ***izvod po vremenu vektora količine kretanja sistema jednak je sumi svih sila koje dejstvuju na sistem kao celinu*** (tj, sumi svih spoljašnjih sila). Projekcije ove vektorske teoreme na koordinatne ose daju sledeće jednakosti

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X_i^{\,s}, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y_i^{\,s}, ...$$

koje ćemo nazivati i teoremama o promeni količine kretanja sistema za odgovarajuće ose. Rečima iskazana ovakva verzija teoreme za, na primer, osu x, glasi: ***izvod po vremenu količine kretanja sistema za osu x, jednak je sumi projekcija svih spoljašnjih sila na osu x.***

Primer 5.13 Sistem je sačinjen od prizme mase m_1, kod koje kosa stranica sa horizontalom gradi ugao α, i materijalne tačke mase m_2, koja se kreće po kosoj stranici prizme. Sama prizma se kreće po horizontalnoj podlozi. Sve površine smatrati glatkim (trenje je zanemareno). Sistem je započeo kretanje iz stanja mirovanja. Koliko iznose, u proizvoljnom položaju, brzina prizme $V_{pr} = V_1$ i reakcija glatke podloge N, u kom relativna brzina i relativno ubrzanje tačke mase m_2, u odnosu na prizmu, iznose V_{rel} i a_{rel}? Veličine: m_1, m_2, α, V_{rel} i a_{rel} smatrati poznatim.





Teorema o promeni količine kretanja sistema za x osu daje:

$$\frac{dK_x}{dt} = 0, \text{ zbog } \sum X_i^s = 0,$$

što dalje ima za posledicu da je $K_x = const.$, odnosno $K_x = 0$, zbog toga što je sistem započeo kretanje iz stanja mirovanja.

S obzirom da je vektor količine kretanja sistema:

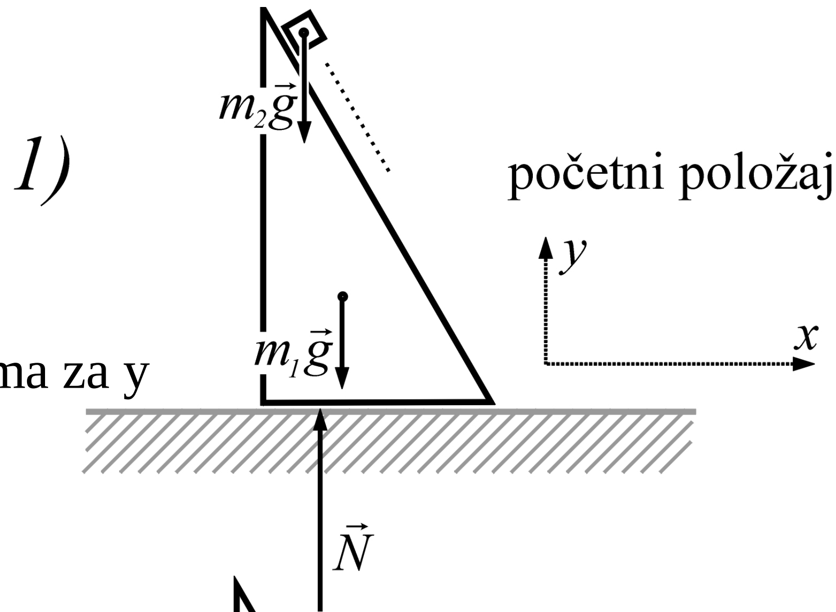
$$\vec{K} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_{rel}\right),$$

njegova projekcija na *x* osu je: $K_x = -m_1V_1 + m_2\left(-V_1 + V_{rel}\cos\alpha\right)$

Zbog činjenice da je $K_x = 0$ lako se dobija tražena brzina prizme:

$$-V_1\left(m_1 + m_2\right) + m_2V_{rel}\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{m_2V_{rel}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$



Teorema o promeni količine kretanja sistema za y osu daje

$$\frac{dK_y}{dt} = -m_1g - m_2g + N.$$

S obzirom da je projekcija vektor količine kretanja sistema na osu *y*

$$K_y = 0_1 + m_2\left(0 - V_{rel}\sin\alpha\right),$$

a zbog $\dot{V}_{rel} = a_{rel}$ (jer je pravolinijska relativna putanja), imamo da je

$$\frac{dK_y}{dt} = -m_2a_{rel}\sin\alpha \Rightarrow$$

$$N = m_1g + m_2g + m_2a_{rel}\sin\alpha.$$