

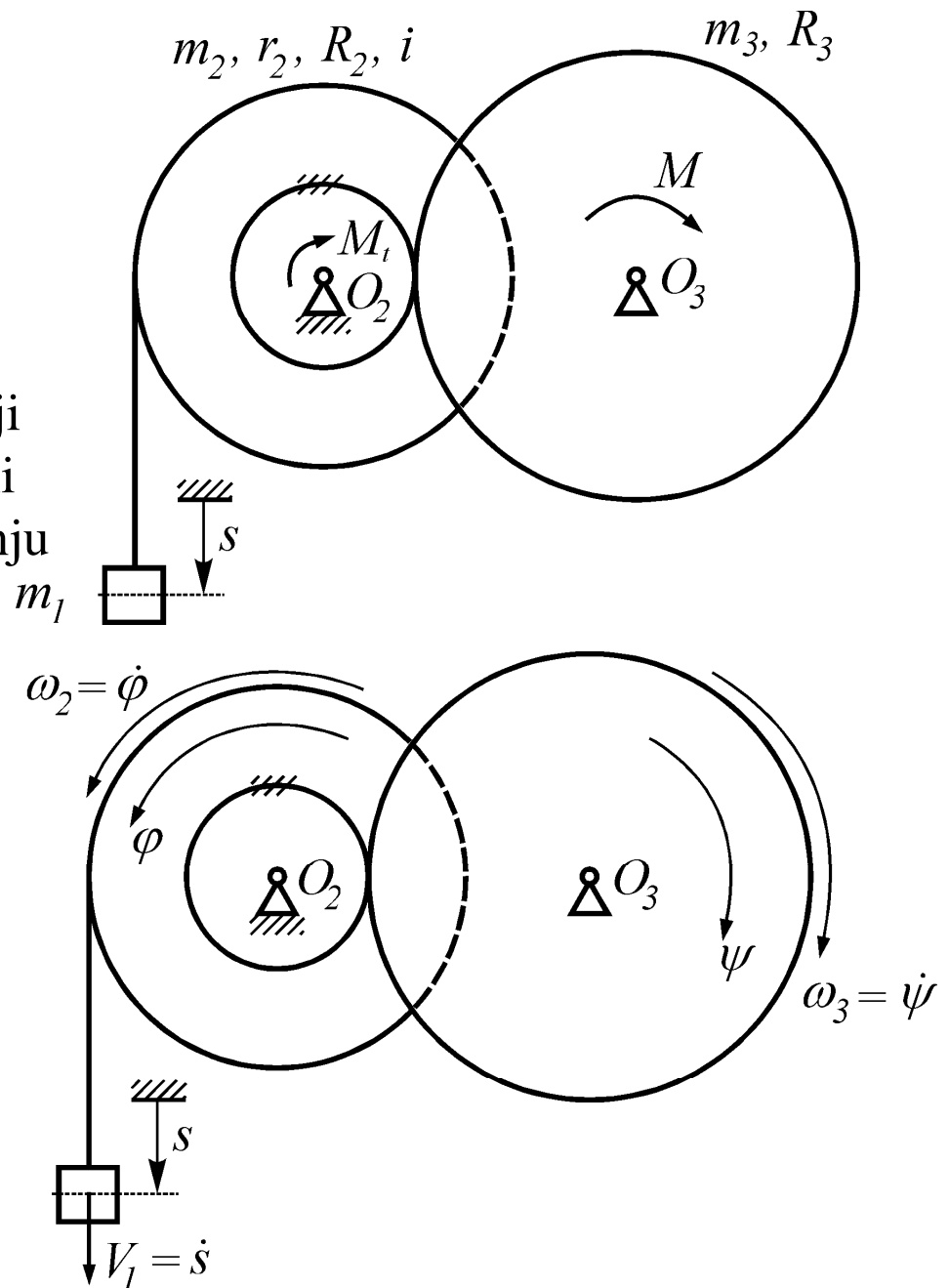
Primer 5.4 Za sistem prikazan na slici odrediti ubrzanje tereta mase m_1 koji se kreće naniže kao i silu u užetu? Na homogeni doboš sa dva nivoa koji se obrće oko zgloba O_2 djeluje, zbog neidealnosti ležaja konstantni moment otpora M_t . Na homogeni kružni disk koji se obrće oko zgloba O_3 djeluje aktivni konstantni spreg momenta M . Pri kretanju nema proklizavanja između užeta i doboša kao ni između doboša i diska.

Poznate veličine su:

$$m_1, m_2, m_3, M_t, M, r_2, R_2, R_3, i, g.$$

s - zadana koordinata (definiše kretanje tereta mase m_1). Brzina i ubrzanje tereta su \dot{s} i \ddot{s} .

φ, ψ - pomoćne koordinate (uglovi rotacije doboša i diska). Ugaone brzine doboša i diska su $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$, a ugaona ubrzanja $\ddot{\varphi}$ i $\ddot{\psi}$.



VEZE. Pošto, u konačnom izrazu za kinetičku energiju, izvodi pomoćnih koordinata ($\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$) moraju biti izraženi preko \dot{s} , nađimo veze ovih veličina.

Jednakost brzina tačkaka 1' i 2'

$$\dot{s} = R_2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R_2} \Rightarrow \phi = \frac{s}{R_2}, \ddot{\phi} = \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

Jednakost brzina tačkaka 2 i 3

$$r_2 \dot{\phi} = R_3 \dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{r_2}{R_3} \frac{\dot{s}}{R_2}$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{r_2}{R_3} \frac{s}{R_2}, \ddot{\psi} = \frac{r_2}{R_3} \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

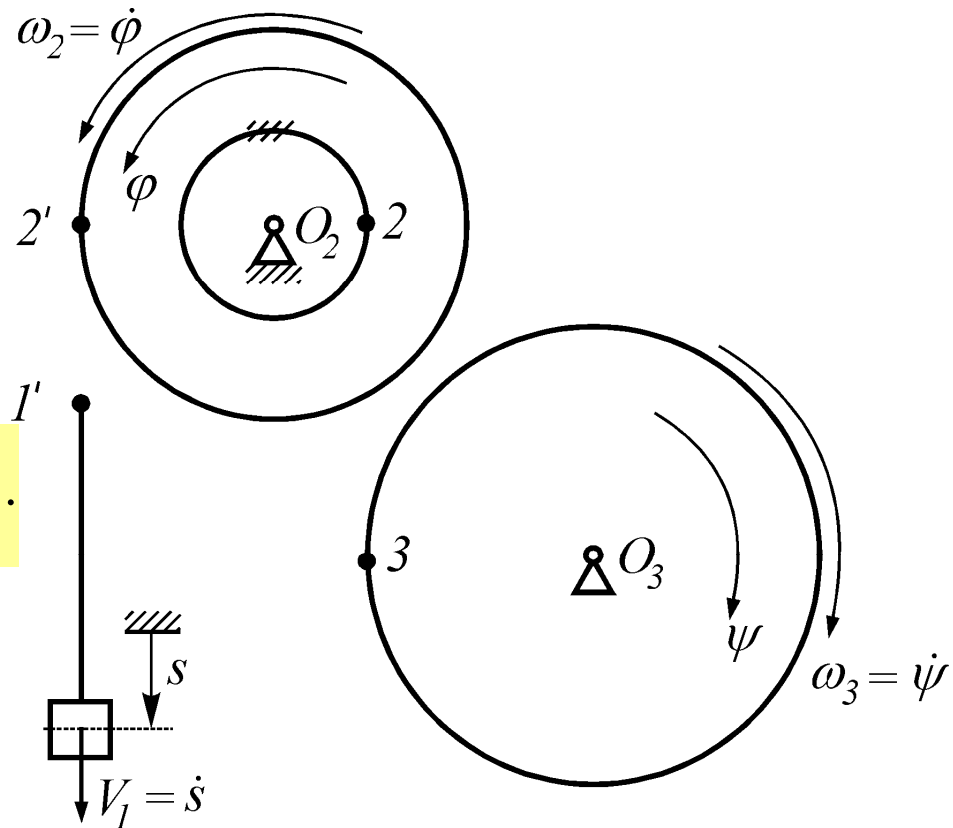
Kinetička energija:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$$

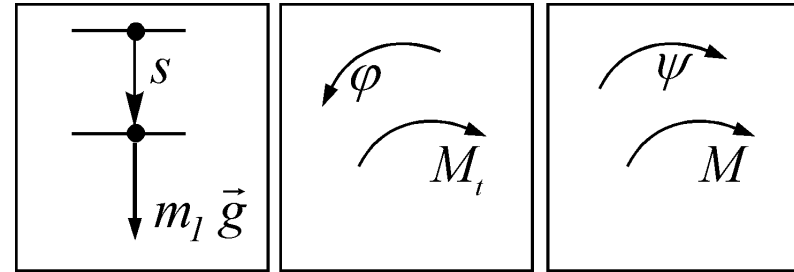
$$E_{k1} = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2, \quad E_{k2} = \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m_2 i^2 \dot{\phi}^2, \quad E_{k3} = \frac{1}{2} J_{O_3} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \dot{\psi}^2.$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2 + \frac{m_2}{2} i^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \dot{\psi}^2 \Rightarrow E_k = B \cdot \dot{s}^2, \quad B = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \frac{i^2}{R_2^2} + \frac{m_3}{4} \frac{r_2^2}{R_2^2}$$

$$B = \text{const.}$$



Rad: Pri kretanju sistema rad vrše sila težine tereta i konstantni spregovi. Ukupni rad A se dobija sabiranjem njihovih radova na premeštanju sistema iz početnog u proizvoljni položaj:



$$A(m_1 \vec{g}) = m_1 g \cdot s, \quad A(M_t) = -M_t \cdot \varphi = -M_t \cdot \frac{s}{R_2}, \quad A(M) = +M\psi = +M \frac{r_2 s}{R_3 R_2}.$$

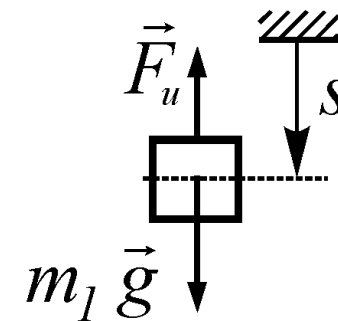
$$A = A(m_1 \vec{g}) + A(M_t) + A(M) \Rightarrow A = D \cdot s, \quad D = m_1 g - \frac{M_t}{R_2} + \frac{M r_2}{R_3 R_2}. \quad D = \text{const.}$$

Teorema o promeni kinetičke energije:

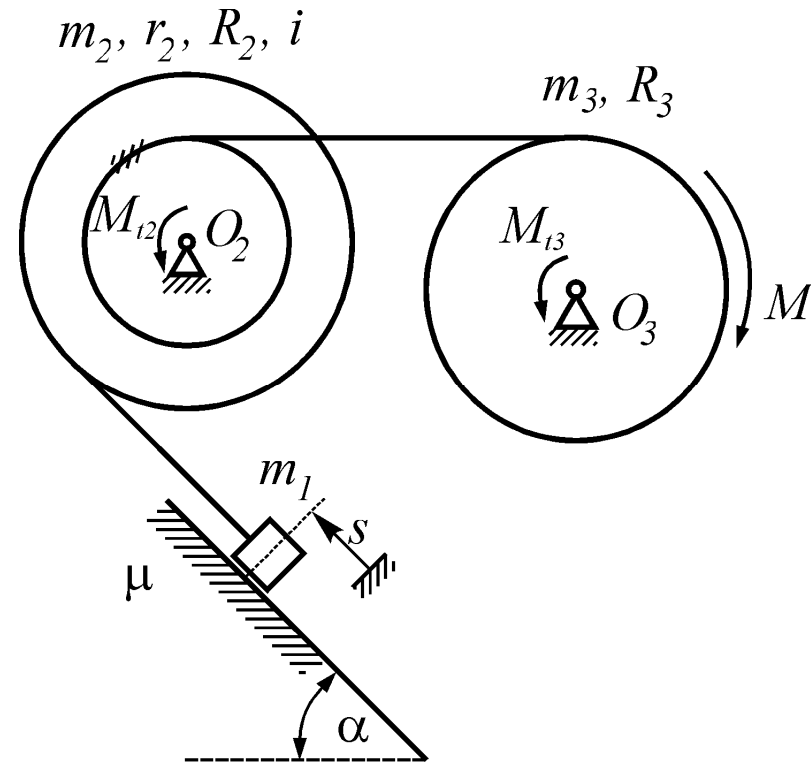
$$\frac{d}{dt} | E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{d}{dt} | B \cdot \dot{s}^2 - E_{k0} = D \cdot s \Rightarrow B \cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{D}{2B}$$

Sila u užetu će se dobiti na osnovu drugog Njutnovog zakona za kretanje tereta u s pravcu:

$$m_1 \cdot \ddot{s} = m_1 g - F_u \Rightarrow F_u = m_1 (g - \ddot{s}) = m_1 \left(g - \frac{D}{2B} \right)$$



Primer 5.5 Za sistem prikazan na slici odrediti ubrzanje tereta mase m_1 koji se kreće uz hrapavu strmu ravan kao i silu u užetu, koje je vezano za taj teret? Na homogeni doboš sa dva nivoa koji se obrće oko zgloba O_2 dejstvuje, zbog neidealnosti ležaja konstantni moment otpora M_{t2} . Na homogeni kružni disk koji se obrće oko zgloba O_3 dejstvuje aktivni konstantni spreg momenta M i konstantni moment otpora M_{t3} . Pri kretanju nema proklizavanja između kosog užeta i doboša kao ni između horizontalnog užeta na mestima sprege sa dobošom i diskom.



Poznate veličine su: $m_1, m_2, m_3, M_{t2}, M_{t3}, M, r_2, R_2, R_3, i, g$.

s - zadata koordinata (definiše kretanje tereta mase m_1). Brzina i ubrzanje tereta su \dot{s} i \ddot{s} .

φ, ψ - pomoćne koordinate (uglovi rotacije doboša i diska). Ugaone brzine doboša i diska su $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$, a ugaona ubrzanja $\ddot{\varphi}$ i $\ddot{\psi}$.

VEZE. Pošto, u konačnom izrazu za kinetičku energiju, izvodi pomoćnih kordinata ($\dot{\phi}$ i $\dot{\psi}$) moraju biti izraženi preko \dot{s} , nađimo veze ovih veličina. **Jednakost brzina tačka 1' i 2'**

$$\dot{s} = R_2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R_2} \Rightarrow \phi = \frac{s}{R_2}, \ddot{\phi} = \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

Jednakost brzina tačka 2, 4, 4' i 3

$$r_2 \dot{\phi} = R_3 \dot{\psi} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{r_2}{R_3} \frac{\dot{s}}{R_2} \Rightarrow \psi = \frac{r_2}{R_3} \frac{s}{R_2}, \ddot{\psi} = \frac{r_2}{R_3} \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

Kinetička energija: $E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}$

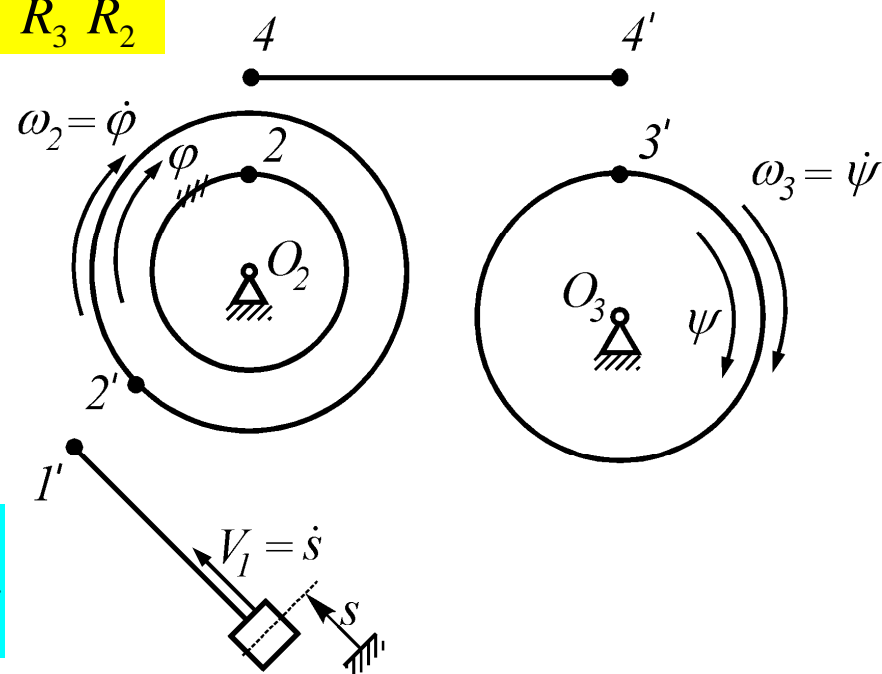
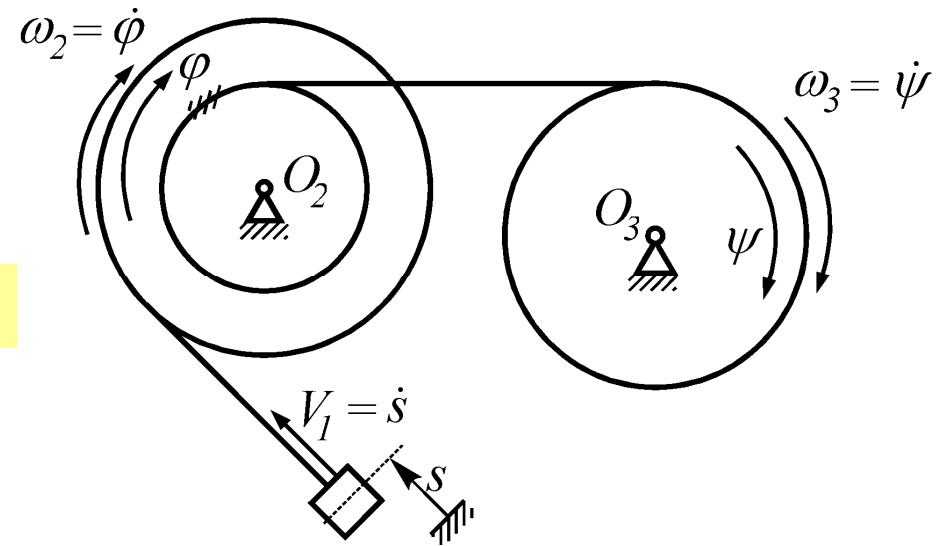
$$E_{k1} = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2, E_{k2} = \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m_2 i^2 \dot{\phi}^2,$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2} J_{O_3} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \dot{\psi}^2$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2 + \frac{m_2}{2} i^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \dot{\psi}^2$$

$$\Rightarrow E_k = B \cdot \dot{s}^2, B = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \frac{i^2}{R_2^2} + \frac{m_3}{4} \frac{r_2^2}{R_2^2}.$$

$B = const.$



Rad: Pri kretanju sistema rad vrše sila težine tereta, sila trenja i konstantni spregovi. Ukupni rad A se dobija sabiranjem njihovih radova na premeštanju sistema iz početnog u proizvoljni položaj: $A(m_1 \vec{g}) = -m_1 g \cdot s \sin \alpha$,

$$A(M_{t2}) = -M_{t2} \cdot \varphi = -M_{t2} \cdot \frac{s}{R_2},$$

$$A(M_{t3}) = -M_{t3} \cdot \psi = -M_{t3} \cdot \frac{r_2 s}{R_3 R_2}, \quad A(M) = +M \psi = +M \frac{r_2 s}{R_3 R_2},$$

$$N = m_1 g \cos \alpha, \quad T = \mu \cdot N \Rightarrow A(\vec{T}) = -T \cdot s = -\mu m_1 g \cos \alpha \cdot s.$$

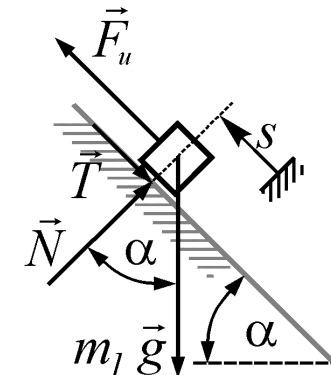
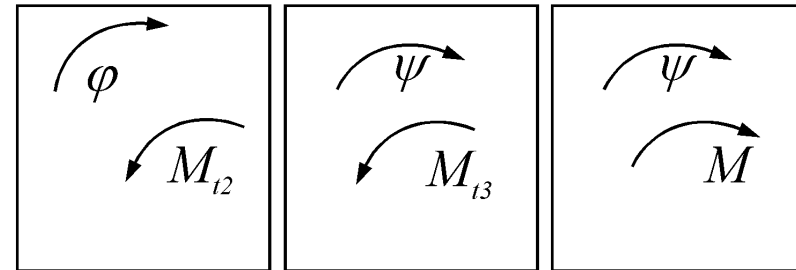
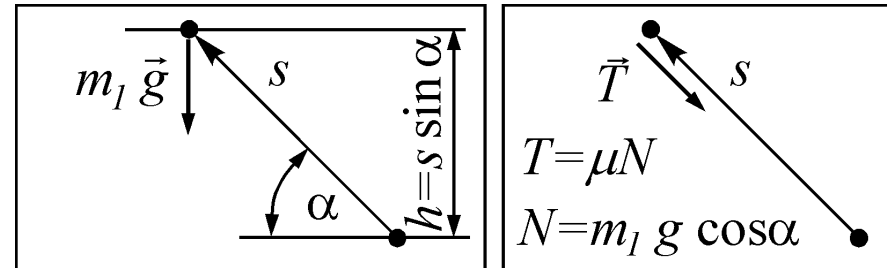
$$A = A(m_1 \vec{g}) + A(\vec{T}) + A(M_{t2}) + A(M_{t3}) + A(M) \Rightarrow A = D \cdot s,$$

$$D = -m_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - \frac{M_{t2}}{R_2} + \frac{(M - M_{t3}) r_2}{R_3 R_2}$$

Teorema o promeni kinetičke energije:

$$\frac{d}{dt} | E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{d}{dt} | B \cdot \dot{s}^2 - E_{k0} = D \cdot s$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{D}{2B}$$



$$D = \text{const.}$$

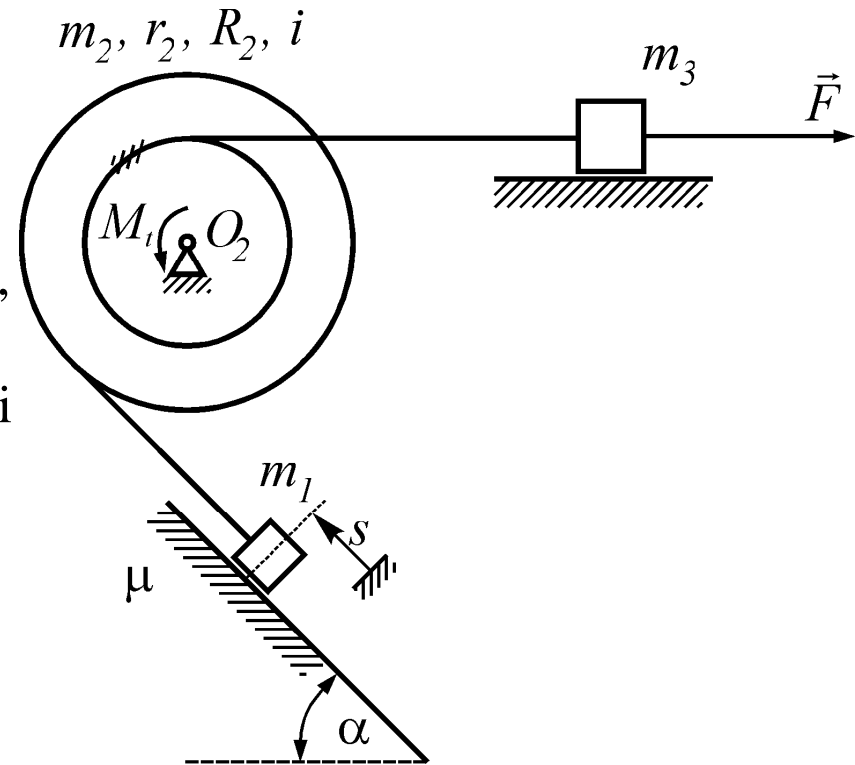
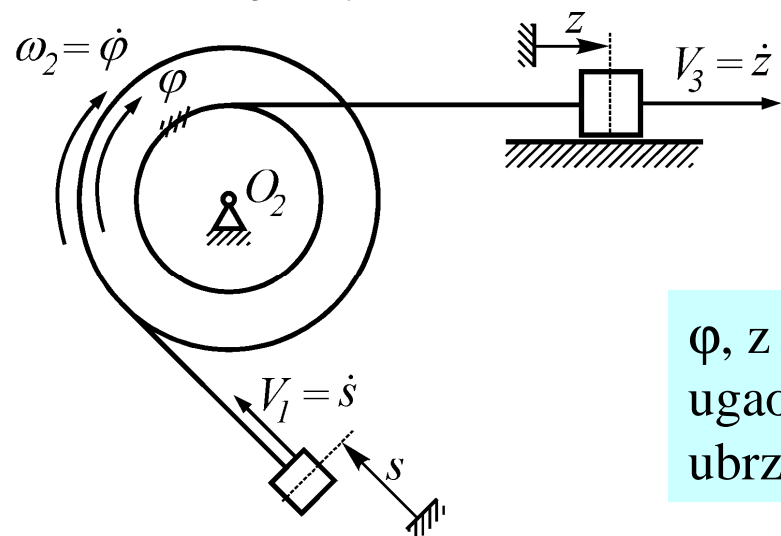
Sila u užetu će se dobiti na osnovu drugog Njutnovog zakona za kretanje tereta u s pravcu:

$$m_1 \cdot \ddot{s} = -m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha + F_u$$

$$\Rightarrow F_u = m_1 \left(\frac{D}{2B} + g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right).$$

Primer 5.6 Za sistem prikazan na slici odrediti ubrzanje tereta mase m_1 koji se kreće uz hrapavu strmu ravan kao i sile u užadima? Na homogeni doboš sa dva nivoa koji se obrće oko zgloba O_2 djeluje, zbog neidealnosti ležaja konstantni moment otpora M_t . Na teret mase m_3 , koji se kreće po horizontalnoj glatkoj podlozi, djeluje aktivna konstantna sila \vec{F} . Pri kretanju nema proklizavanja između doboša i užadi.

Poznate veličine su:



s - zadana koordinata (definiše kretanje tereta mase m_1). Brzina i ubrzanje tog tereta su \dot{s} i \ddot{s} .

φ, z - pomoćne koordinate. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje doboša su $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$. Brzina i ubrzanje tereta mase m_3 su \dot{z} i \ddot{z} .

VEZE. Pošto, u konačnom izrazu za kinetičku energiju, izvodi pomoćnih kordinata ($\dot{\phi}$ i \dot{z}) moraju biti izraženi preko \dot{s} , nađimo veze ovih veličina.

Jednakost brzina tačkaka 1' i 2'

$$\dot{s} = R_2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R_2} \Rightarrow \phi = \frac{s}{R_2}, \ddot{\phi} = \frac{\ddot{s}}{R_2}.$$

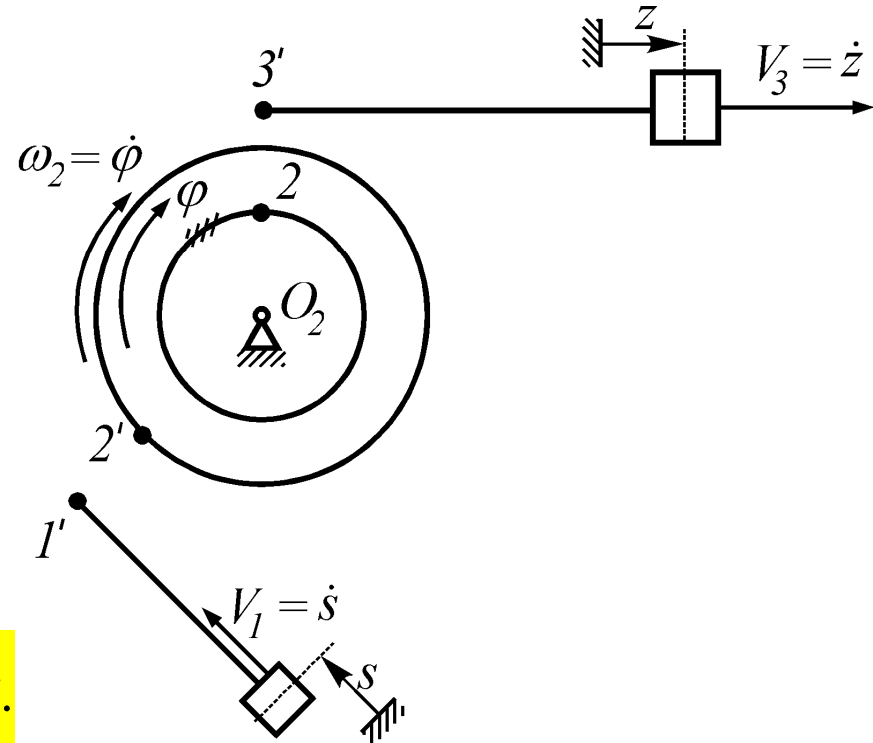
Jednakost brzina tačkaka 2 i 3'

$$r_2 \dot{\phi} = \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{r_2}{R_2} \dot{s} \Rightarrow z = \frac{r_2}{R_2} s, \ddot{z} = \frac{r_2}{R_2} \ddot{s}.$$

Kinetička energija: $E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3},$

$$E_{k1} = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2, E_{k2} = \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m_2 i^2 \dot{\phi}^2, E_{k3} = \frac{m_3}{2} \dot{z}^2.$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2 + \frac{m_2}{2} i^2 \dot{\phi}^2 + \frac{m_3}{2} \dot{z}^2 \Rightarrow \underline{E_k = B \cdot \dot{s}^2}, \quad \underline{B = \text{const.}} \quad B = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \frac{i^2}{R_2^2} + \frac{m_3}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2}.$$



Rad: Pri kretanju sistema rad vrši sila težine tereta mase m_1 , sila trenja, aktivna sila \vec{F} i konstantni spreg M_t . Ukupni rad A se dobija sabiranjem njihovih radova na premeštanju sistema iz početnog u proizvoljni položaj:

$$A(M_t) = -M_t \cdot \varphi = -M_t \cdot \frac{s}{R_2},$$

$$A(\vec{F}) = F \cdot z = F \frac{r_2}{R_2} \cdot s, \quad A(m_1 \vec{g}) = -m_1 g \cdot s \sin \alpha,$$

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha, \quad T = \mu \cdot N_1 \Rightarrow A(\vec{T}) = -T \cdot s = -\mu m_1 g \cos \alpha \cdot s.$$

$$A = A(m_1 \vec{g}) + A(\vec{T}) + A(\vec{F}) \Rightarrow A = D \cdot s,$$

Teorema o promeni kinetičke energije:

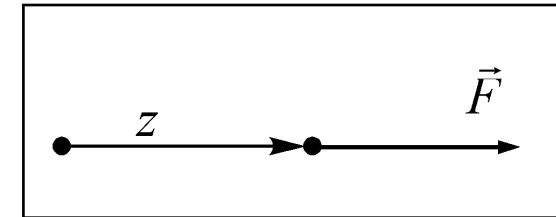
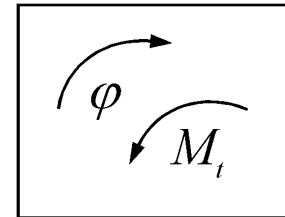
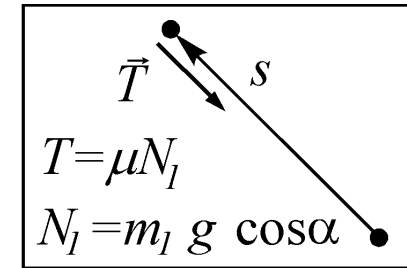
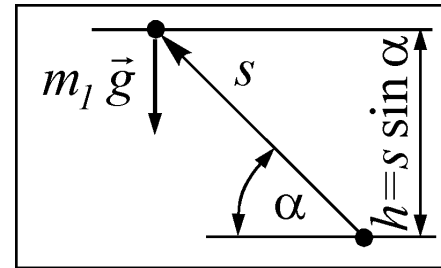
$$\frac{d}{dt} | E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{d}{dt} | B \cdot \dot{s}^2 - E_{k0} = D \cdot s$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{D}{2B}$$

Sile u užadima:

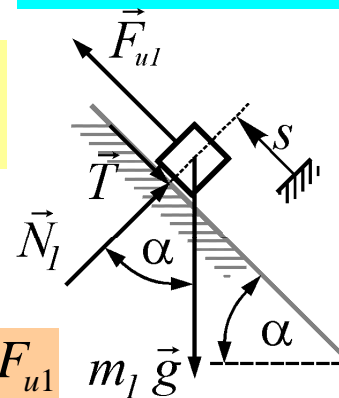
$$m_1 \cdot \ddot{s} = -m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha + F_{u1} \Rightarrow F_{u1}$$

$$m_3 \cdot \ddot{z} = F - F_{u3} \Rightarrow F_{u3}$$

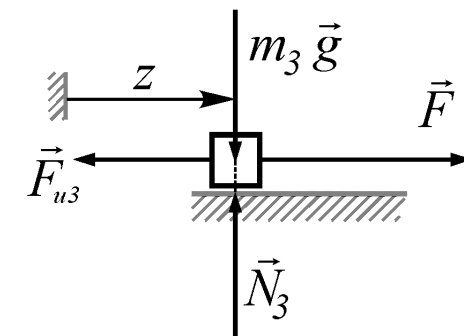


$D = const.$

$$D = -m_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - \frac{M_t}{R_2} + \frac{F \cdot r_2}{R_2}.$$

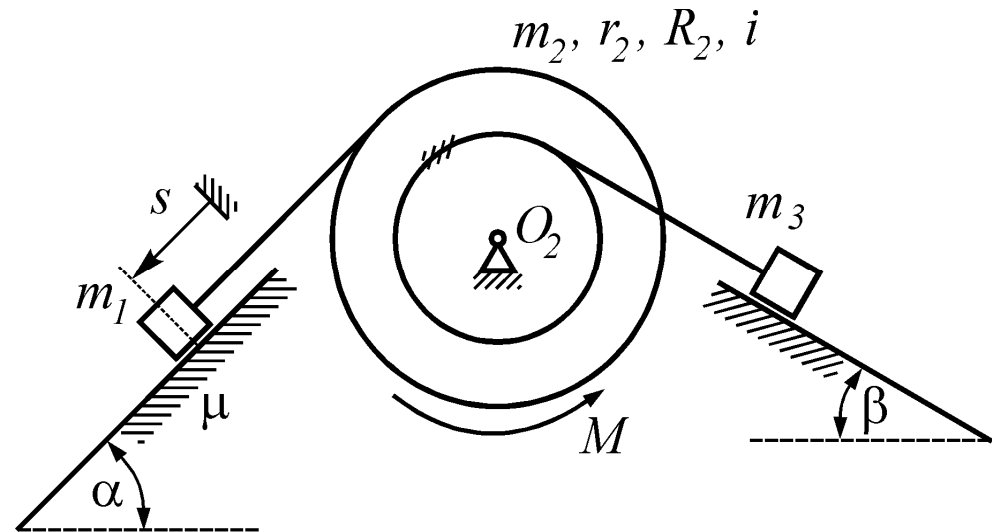


1)



2)

Primer 5.6 Za sistem prikazan na slici odrediti ubrzanje tereta mase m_1 koji se kreće niz hrapavu strmu ravan kao i sile u užadima? Na homogeni doboš sa dva nivoa koji se obrće oko zgloba O_2 djeluje aktivni konstantni moment M .

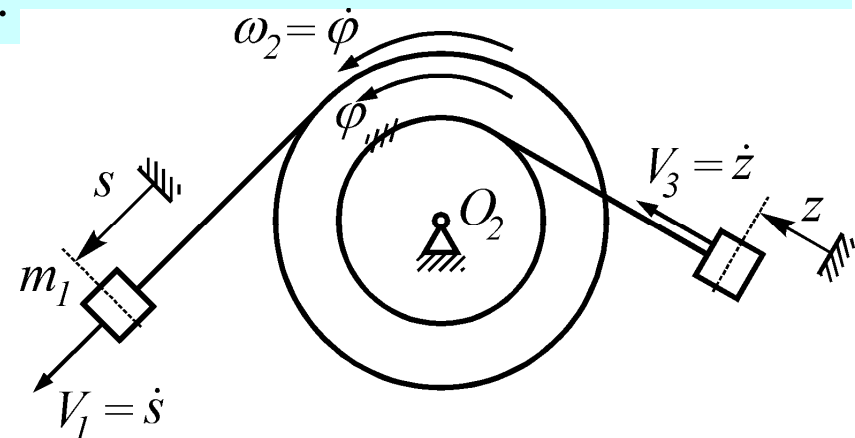


Teret mase m_3 , kreće se uz glatku strmu ravan. Pri kretanju nema proklizavanja između doboša i užadi. Poznate veličine su: $m_1, m_2, m_3, M, \mu, \alpha, \beta, r_2, R_2, i, g$.

s - zadana koordinata (definiše kretanje tereta mase m_1). Brzina i ubrzanje tog tereta su \dot{s} i \ddot{s} .

φ, z - pomoćne koordinate. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje doboša su $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$. Brzina i ubrzanje tereta mase m_3 su \dot{z} i \ddot{z} .

VEZE. Pošto, u konačnom izrazu za kinetičku energiju, izvodi pomoćnih kordinata ($\dot{\varphi}$ i \dot{z}) moraju biti izraženi preko \dot{s} , nađimo veze ovih veličina.

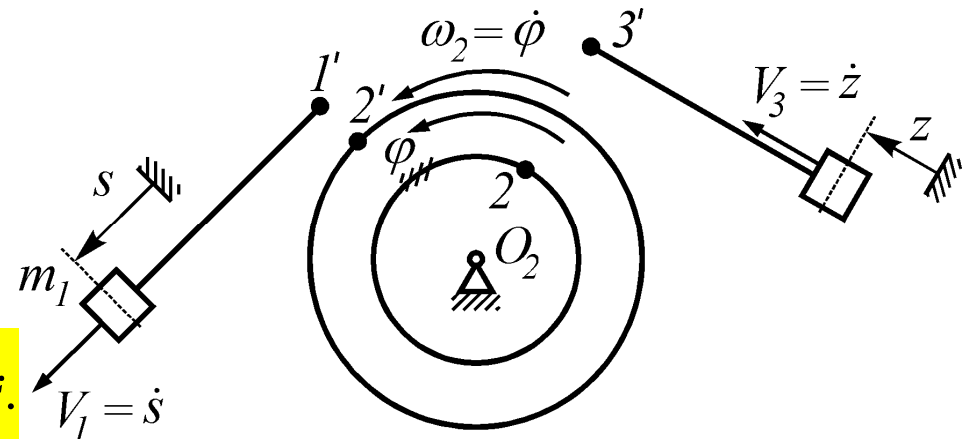


Jednakost brzina tačka 1' i 2'

$$\dot{s} = R_2 \dot{\phi} \Rightarrow \phi = \frac{\dot{s}}{R_2} \Rightarrow \phi = \frac{s}{R_2}, \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{R_2}.$$

Jednakost brzina tačka 2 i 3'

$$r_2 \dot{\phi} = \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{r_2}{R_2} \dot{s} \Rightarrow z = \frac{r_2}{R_2} s, \ddot{z} = \frac{r_2}{R_2} \ddot{s}.$$



Kinetička energija:

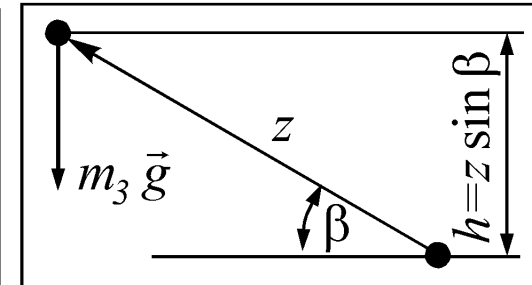
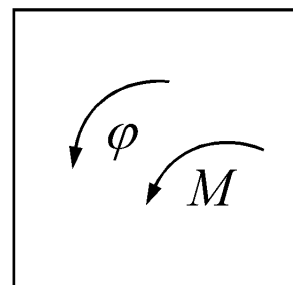
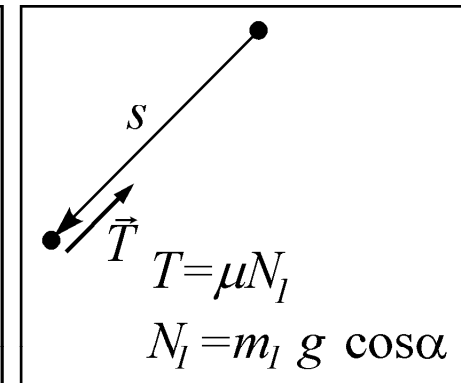
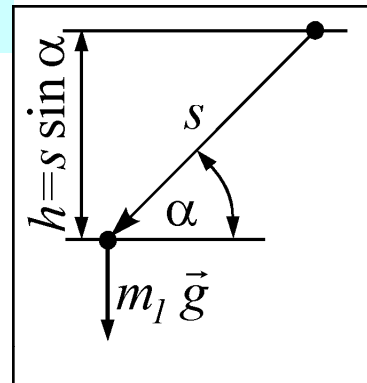
$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}, E_{k1} = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2, E_{k2} = \frac{1}{2} J_{O_2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m_2 i^2 \dot{\phi}^2,$$

$$E_{k3} = \frac{m_3}{2} \dot{z}^2 \Rightarrow E_k = \frac{m_1}{2} \dot{s}^2 + \frac{m_2}{2} i^2 \dot{\phi}^2 + \frac{m_3}{2} \dot{z}^2$$

$$\Rightarrow E_k = B \cdot \dot{s}^2, B = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \frac{i^2}{R_2^2} + \frac{m_3}{2} \frac{r_2^2}{R_2^2}.$$

$B = const.$

Rad: Pri kretanju sistema rad vrše sile težina oba tereta, sila trenja i konstantni aktivni i spreg M . Ukupni rad A se dobija sabiranjem njihovih radova na premeštanju sistema iz početnog u proizvoljni položaj:



$$A(m_1 \vec{g}) = m_1 g \cdot s \sin \alpha,$$

$$A(m_3 \vec{g}) = -m_3 g \cdot z \sin \beta = -m_3 g \sin \beta \frac{r_2}{R_2} s,$$

$$A(M) = M \cdot \varphi = M \cdot \frac{s}{R_2},$$

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha, \quad T = \mu \cdot N_1 \Rightarrow$$

$$A(\vec{T}) = -T \cdot s = -\mu m_1 g \cos \alpha \cdot s.$$

$$A = A(m_1 \vec{g}) + A(\vec{T}) + A(M) + A(m_3 \vec{g}) \Rightarrow$$

$$A = D \cdot s, \quad D = \text{const.}$$

$$D = m_1 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \frac{M}{R_2} - m_3 g \sin \beta \frac{r_2}{R_2}.$$

Teorema o promeni kinetičke energije:

$$\frac{d}{dt} | E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{d}{dt} | B \cdot \dot{s}^2 - E_{k0} = D \cdot s$$

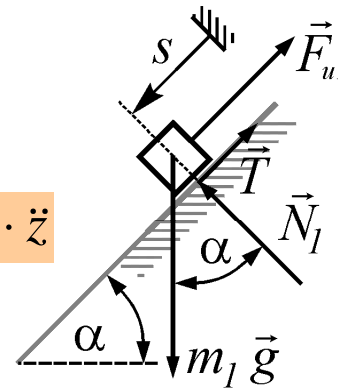
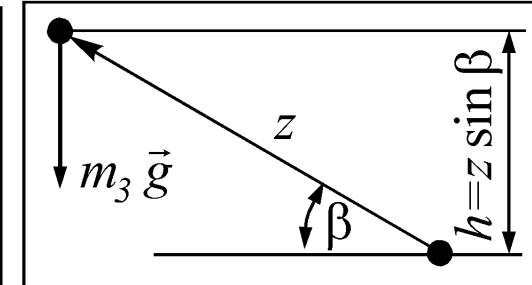
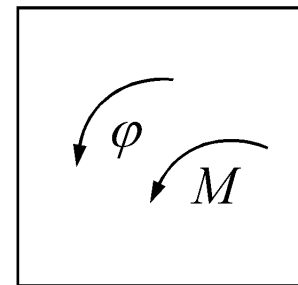
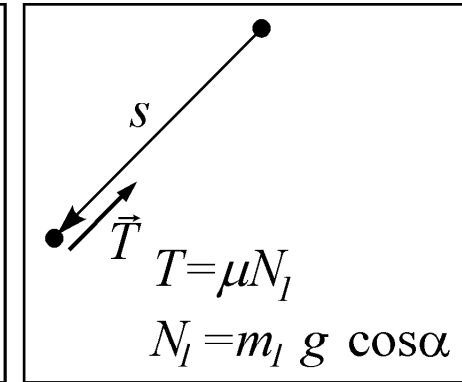
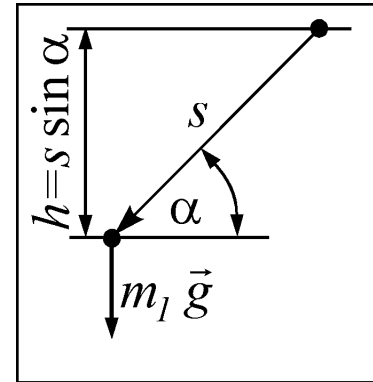
$$\Rightarrow B \cdot 2\dot{s}\ddot{s} - 0 = D \cdot \dot{s} \Rightarrow \ddot{s} = \frac{D}{2B}$$

Sile u užadima:

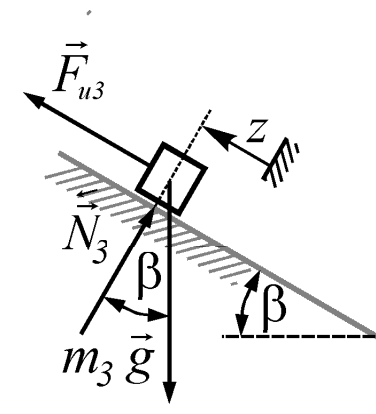
$$m_1 \cdot \ddot{s} = m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - F_{u1} \Rightarrow F_{u1} = \dots$$

$$m_3 \cdot \ddot{z} = F_{u3} - m_3 g \sin \beta \Rightarrow F_{u3} = m_3 g \sin \beta + m_3 \cdot \ddot{z}$$

$$\dots \Rightarrow F_{u3} = m_3 g \sin \beta + m_3 \cdot \frac{r_2}{R_2} \frac{D}{2B}$$



1)



2)