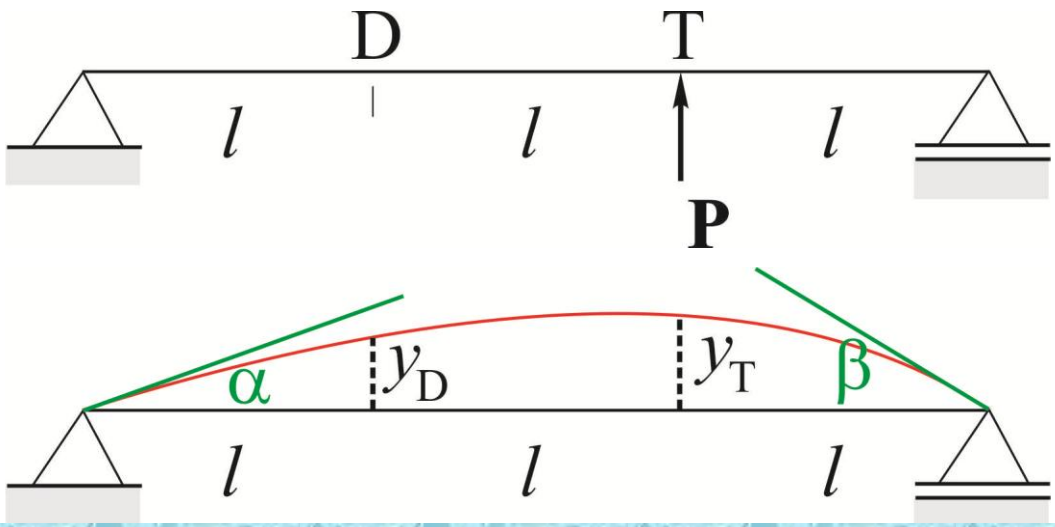


$$y_T = \frac{P(3l)^3}{3EI}\left(\frac{2l}{3l}\right)^2\left(\frac{l}{3l}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{P(3l)^2}{6EI}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

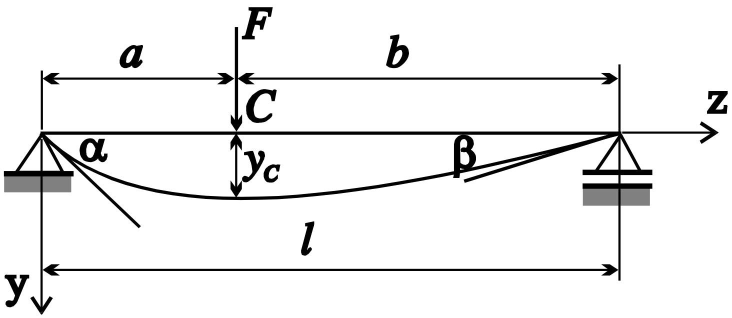
$$\beta = \frac{P(3l)^2}{6EI}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)$$

$$y_D = \frac{P(3l)^3}{6EI}\left\{\frac{l}{3l}\,\frac{l}{3l}\left[1-\left(\frac{l}{3l}\right)^2-\left(\frac{l}{3l}\right)^2\right]\right\} = \frac{P(3l)^3}{6EI}\left\{\frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\right\}$$

1.

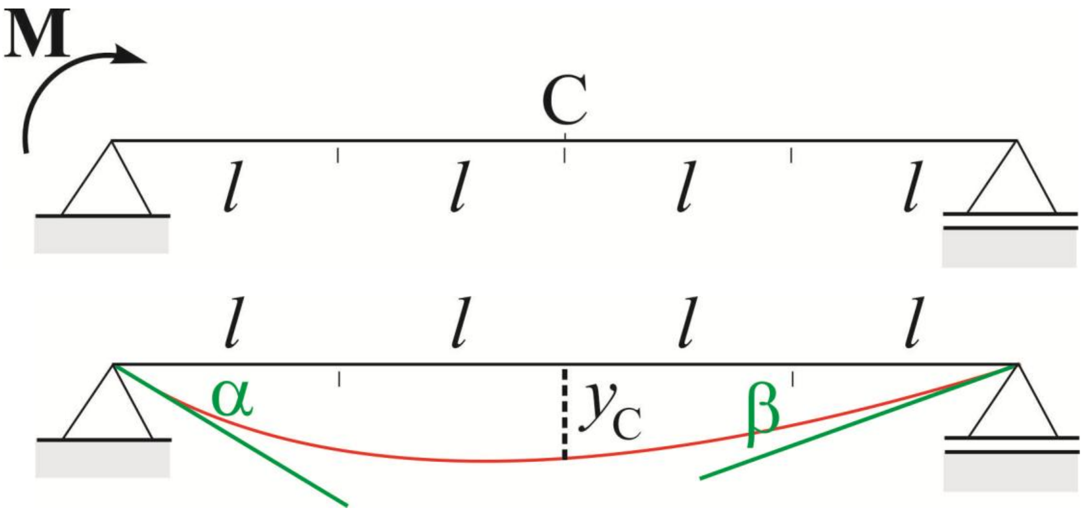
Prosta greda sa koncentrisanom silom

$$y = \frac{Fl^3}{6EI}\left\{\frac{b}{l}\,\frac{z}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]+\Big\|\left(\frac{z-a}{l}\right)^3\right\}$$



$$y(a) = y_C = \frac{Fl^3}{3EI}\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(\frac{b}{l}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{Fl^2}{6EI}\,\frac{a}{l}\,\frac{b}{l}\left(1+\frac{b}{l}\right) \qquad \beta = \frac{Fl^2}{6EI}\,\frac{a}{l}\,\frac{b}{l}\left(1+\frac{a}{l}\right)$$

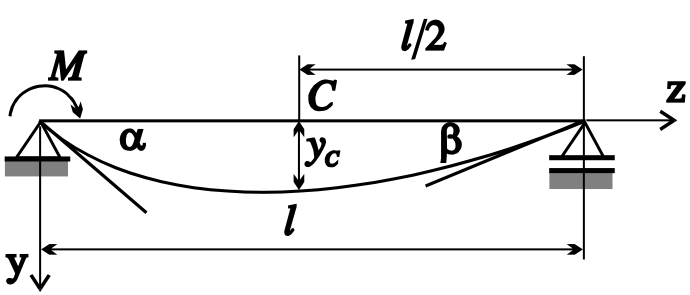


$$y_C = \frac{M(4l)^2}{16EI}$$

$$\alpha = \frac{M(4l)}{3EI}$$

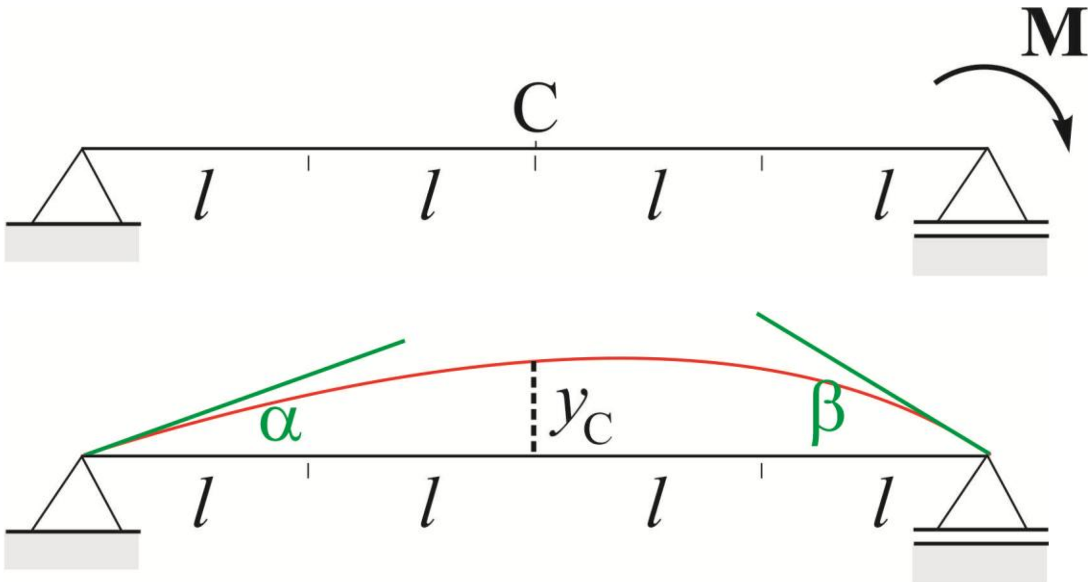
$$\beta = \frac{M(4l)}{6EI}$$

3. Prosta greda sa spregom nad osloncem



$$y = \frac{Ml^2}{6EI}\frac{z}{l}\left[2 - 3\left(\frac{z}{l}\right) + \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_C = \frac{Ml^2}{16EI} \qquad \alpha = \frac{Ml}{3EI} \qquad \beta = \frac{Ml}{6EI}$$

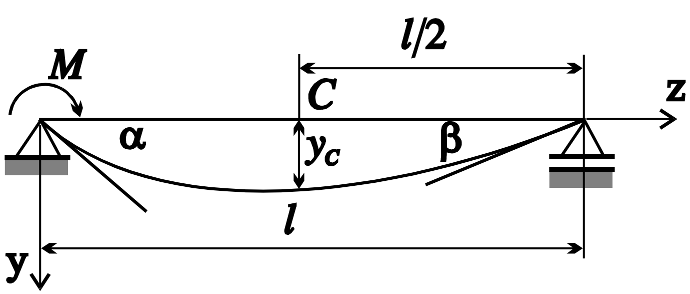


$$y_C = \frac{M(4l)^2}{16EI}$$

$$\beta = \frac{M(4l)}{3EI}$$

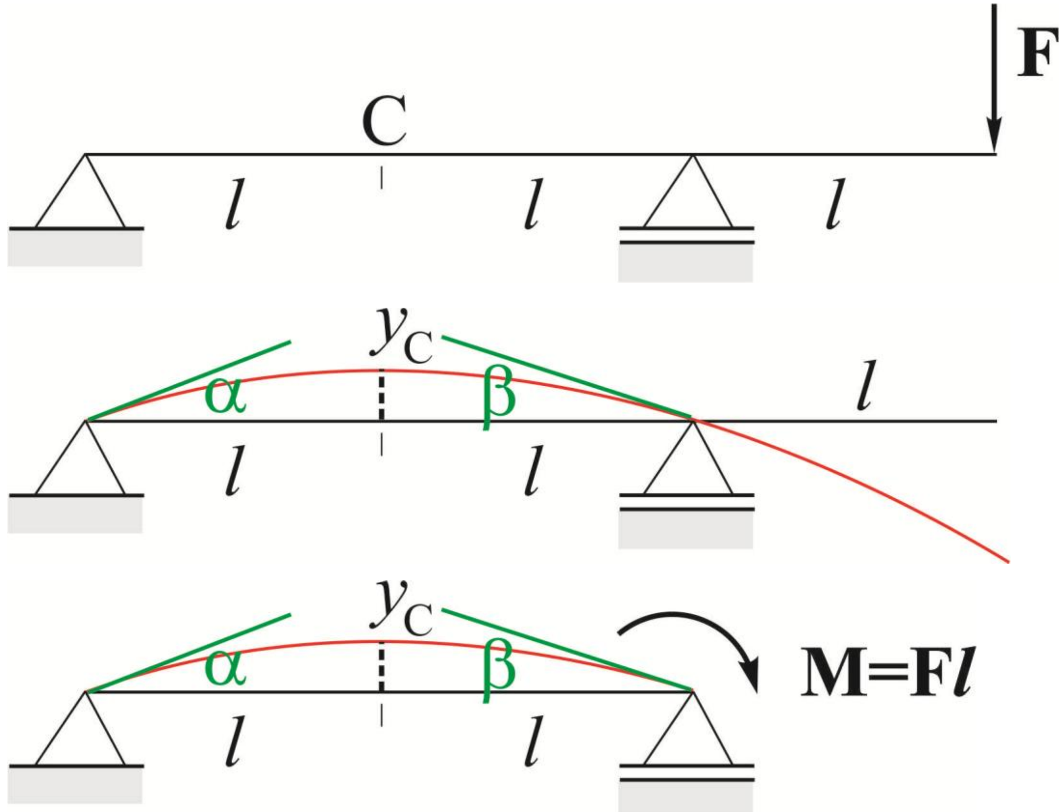
$$\alpha = \frac{M(4l)}{6EI}$$

3. Prosta greda sa spregom nad osloncem



$$y = \frac{Ml^2}{6EI}\frac{z}{l}\left[2-3\left(\frac{z}{l}\right)+\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_C = \frac{Ml^2}{16EI} \qquad \alpha = \frac{Ml}{3EI} \qquad \beta = \frac{Ml}{6EI}$$

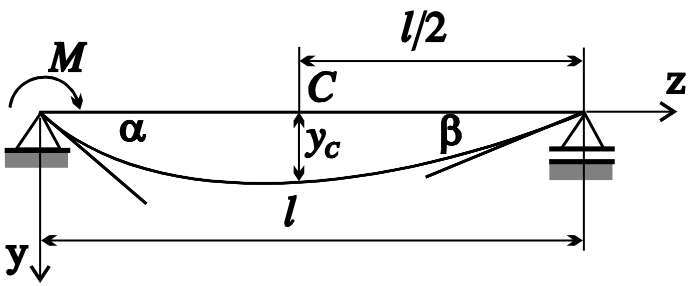


$$y_C = \frac{Fl(2l)^2}{16EI}$$

$$\beta = \frac{Fl(2l)}{3EI}$$

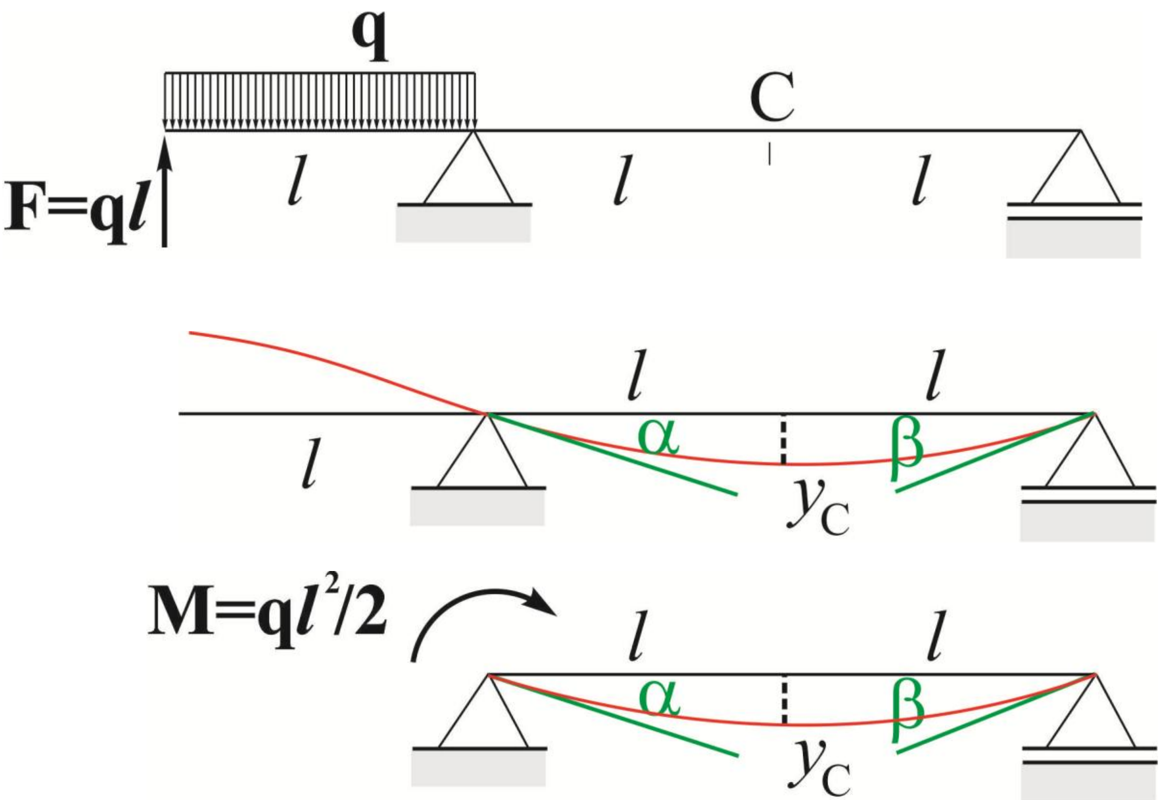
$$\alpha = \frac{Fl(2l)}{6EI}$$

3. Prosta greda sa spregom nad osloncem



$$y = \frac{Ml^2}{6EI}\frac{z}{l}\left[2 - 3\left(\frac{z}{l}\right) + \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_C = \frac{Ml^2}{16EI} \qquad \alpha = \frac{Ml}{3EI} \qquad \beta = \frac{Ml}{6EI}$$

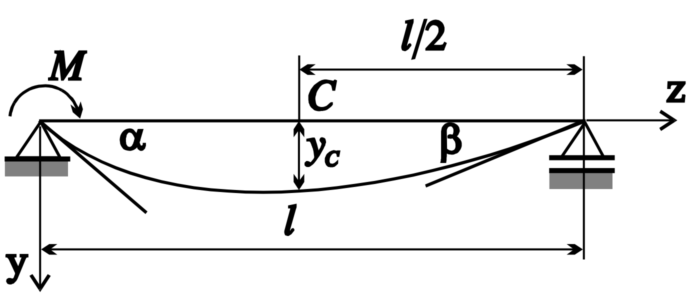


$$y_C = \frac{\left(ql^2/2\right)\left(2l\right)^2}{16EI}$$

$$\alpha = \frac{\left(ql^2/2\right)\left(2l\right)}{3EI}$$

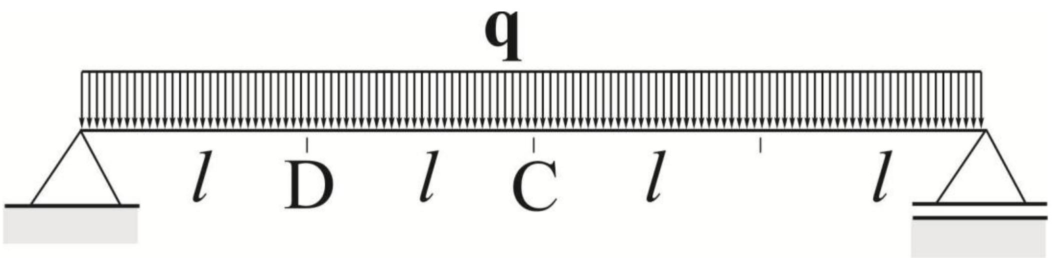
$$\beta = \frac{\left(ql^2/2\right)\left(2l\right)}{6EI}$$

3. Prosta greda sa spregom nad osloncem

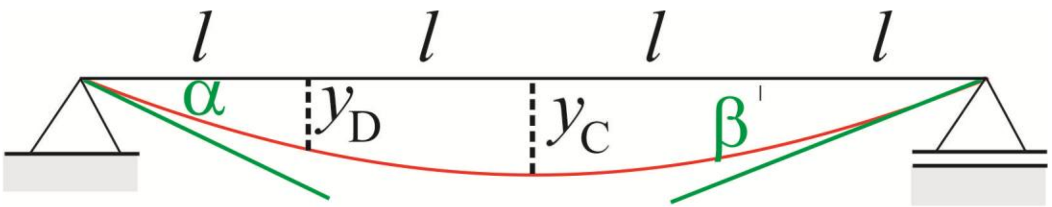


$$y = \frac{Ml^2}{6EI}\frac{z}{l}\left[2-3\left(\frac{z}{l}\right)+\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_C = \frac{Ml^2}{16EI} \qquad \alpha = \frac{Ml}{3EI} \qquad \beta = \frac{Ml}{6EI}$$



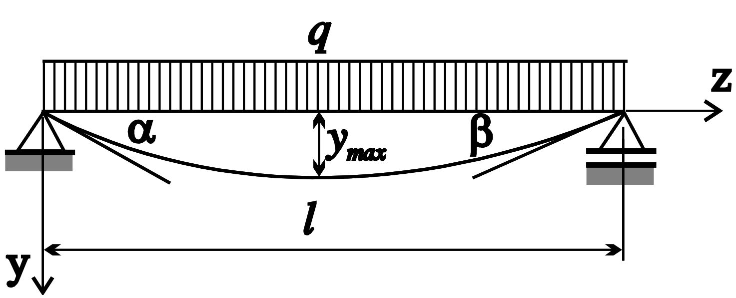
$$y_C = \frac{5q(4l)^4}{384EI}$$



$$\alpha = \beta = \frac{q(4l)^3}{24EI}$$

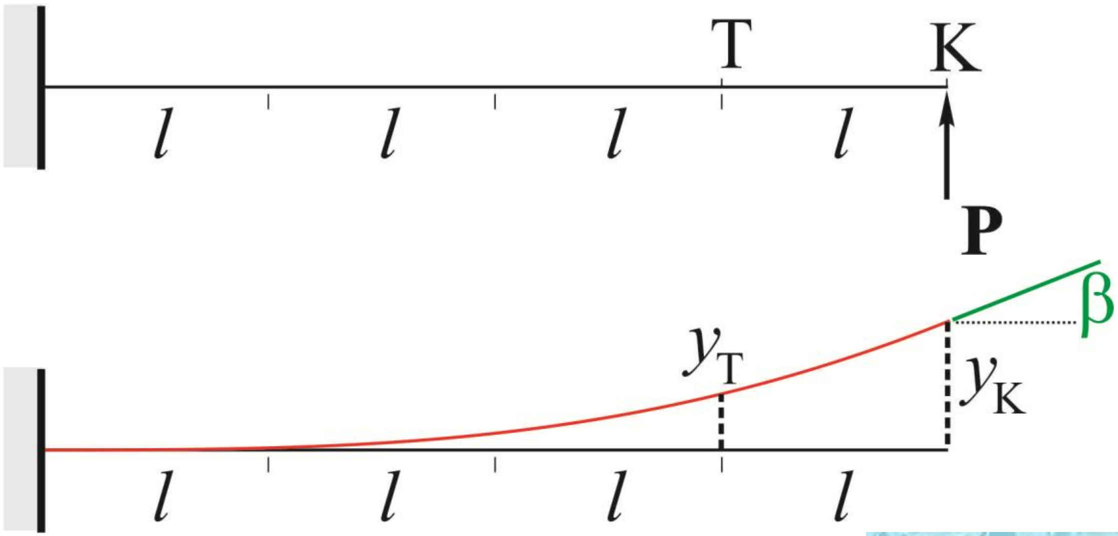
$$y_D = \frac{q(4l)^4}{24EI}\left[\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4\right]$$

6. Prosta greda sa kontinualnim opterećenjem duž cele grede



$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left[\frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \qquad \alpha = \beta = \frac{ql^3}{24EI}$$

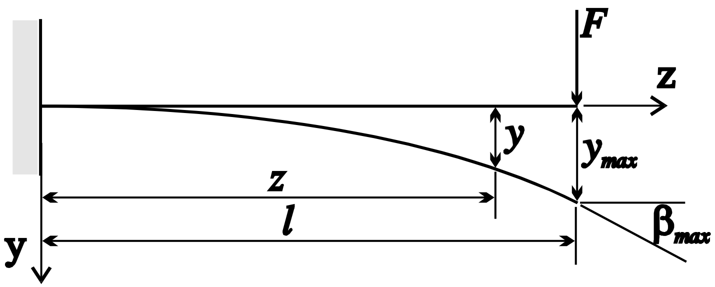


$$y_K = \frac{P(4l)^3}{3EI}$$

$$\beta = \frac{P(4l)^2}{2EI}$$

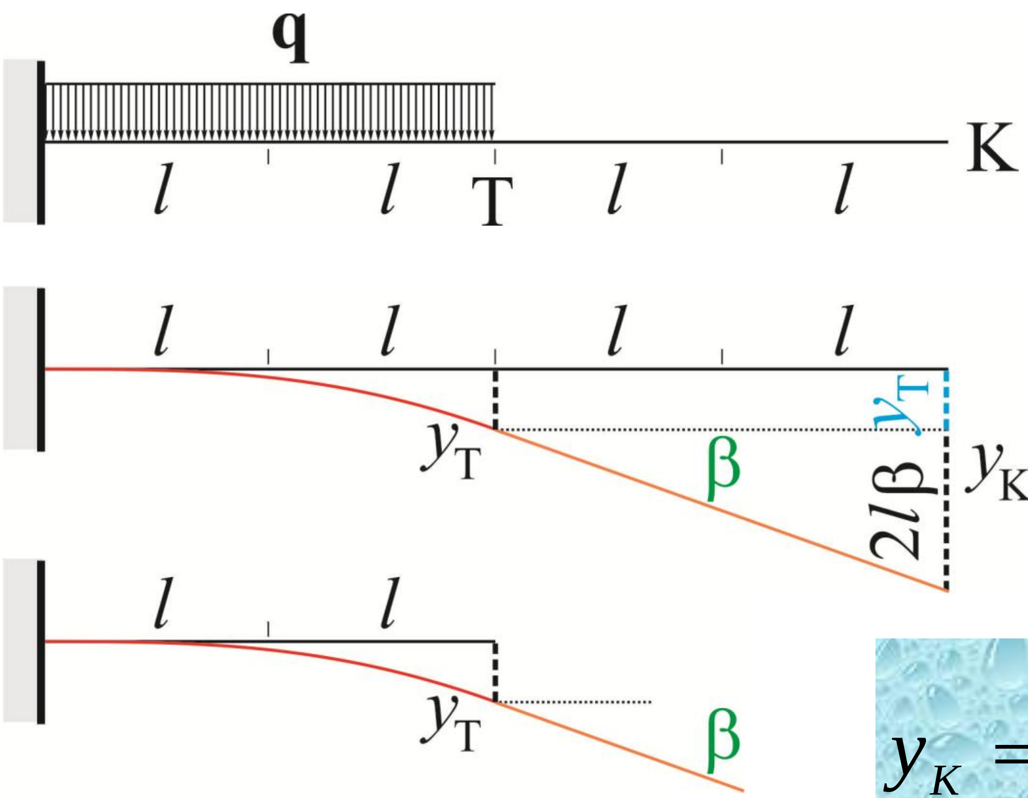
$$y_T = \frac{P(4l)^3}{6EI}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(3-\frac{3}{4}\right)$$

8. Konzola sa koncentrisanom silom na kraju



$$y = \frac{Fl^3}{6EI}\left(\frac{z}{l}\right)^2\left(3-\frac{z}{l}\right) \qquad y(l) = y_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$\beta_{\max} = \frac{Fl^2}{2EI}$$



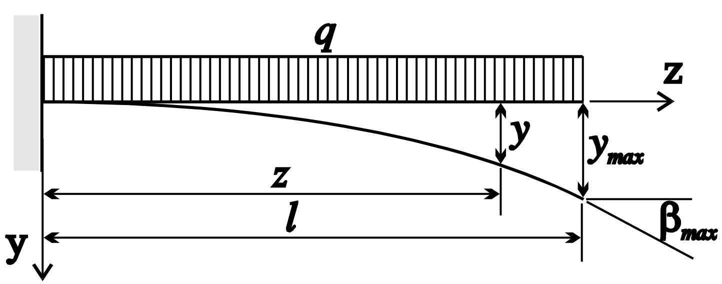
$$y_T = \frac{q(2l)^4}{8EI}$$

$$\beta = \frac{q(2l)^3}{6EI}$$

$$y_K = y_T + 2l\beta$$

$$y_K = \frac{q(2l)^4}{8EI} + 2l \cdot \frac{q(2l)^3}{6EI}$$

10. Konzola sa kontinualnim opterećenjem duž cele konzole



$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{z}{l}\right)^2\left[6 - 4\left(\frac{z}{l}\right) + \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]$$

$$y(l) = y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI} \qquad \beta_{\max} = \frac{ql^3}{6EI}$$

Superponiranje deformacija.
Deformacije izazvane uticajem više opterećenja jednake su algebarskom zbiru deformacija svakog opterećenja posebno.

Primer 4.1 Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti uglove nagiba kod oslonaca i ugib sredine?

Na osnovu principa superponiranja deformacija tražene deformacije (ugib i nagibe) definišu izrazi:

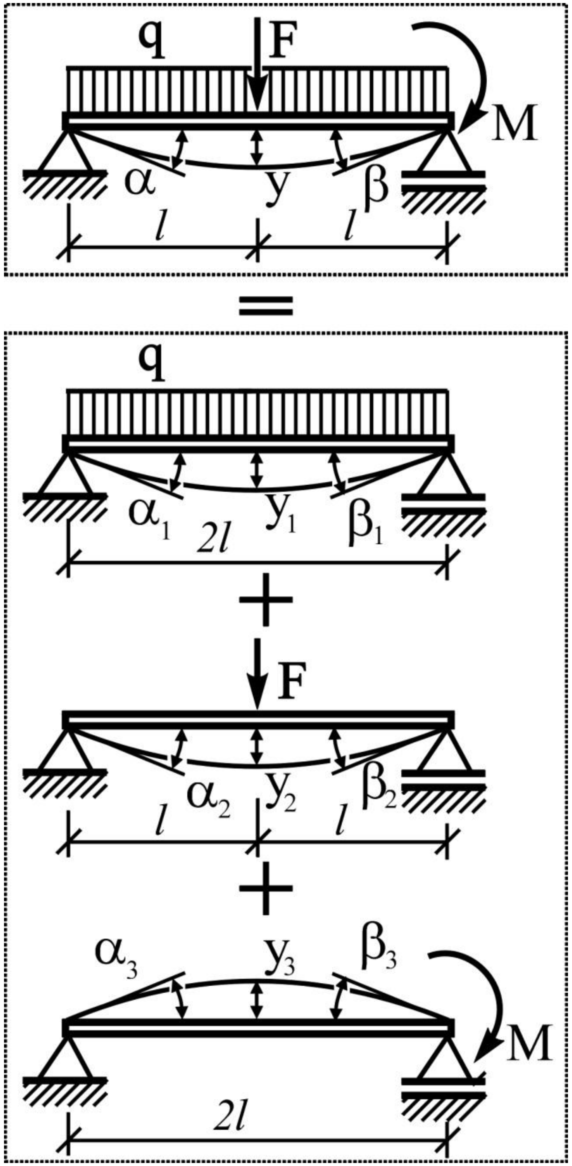
$\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\beta=\beta_1+\beta_2-\beta_3$, $y=y_1+y_2-y_3.$

Na osnovu tablica, potrebni ugibi i nagibi za pojedinačna opterećenja imaju vrednosti:

$$\alpha_1=\beta_1=\frac{q(2l)^3}{24EI},\quad y_1=\frac{5q(2l)^4}{384EI},$$

$$\alpha_2=\beta_2=\frac{F(2l)^2}{16EI},\quad y_2=\frac{F(2l)^3}{48EI},$$

$$\alpha_3=\frac{M(2l)}{6EI},\beta_3=\frac{M(2l)}{3EI},y_3=\frac{M(2l)^2}{16EI}.$$



Primer 4.2 Za konzolu prikazanu na slici odrediti ugibe na mestima C i B i nagib kraja?

Na osnovu principa superponiranja deformacija tražene deformacije (ugibe i nagib) definišu izrazi: $\beta = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3$,

$$y_C = y_{C1} + y_{C2} - y_{C3}, \quad y_B = y_{B1} + y_{B2} - y_{B3}.$$

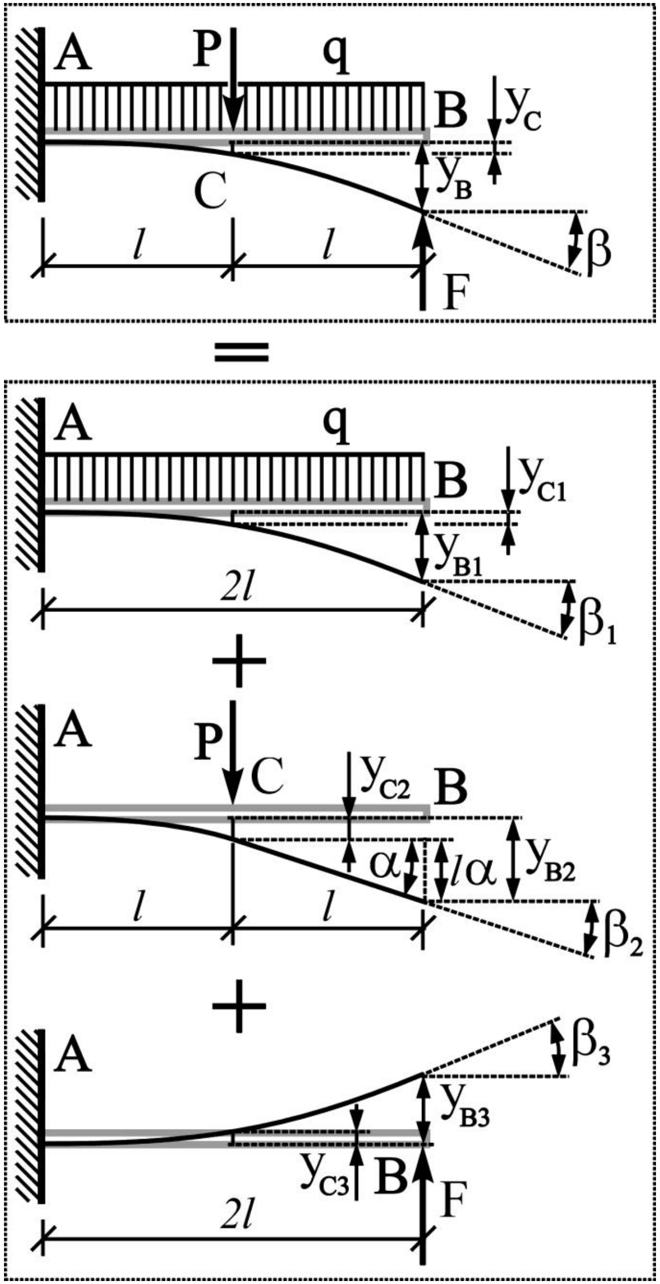
Na osnovu tablica, potrebni ugibi i nagibi za pojedinačna opterećenja imaju vrednosti:

$$y_{C1} = \frac{q(2l)^4}{24EI}\left(\frac{l}{2l}\right)^2\left[6 - 4\left(\frac{l}{2l}\right) + \left(\frac{l}{2l}\right)^2\right],$$

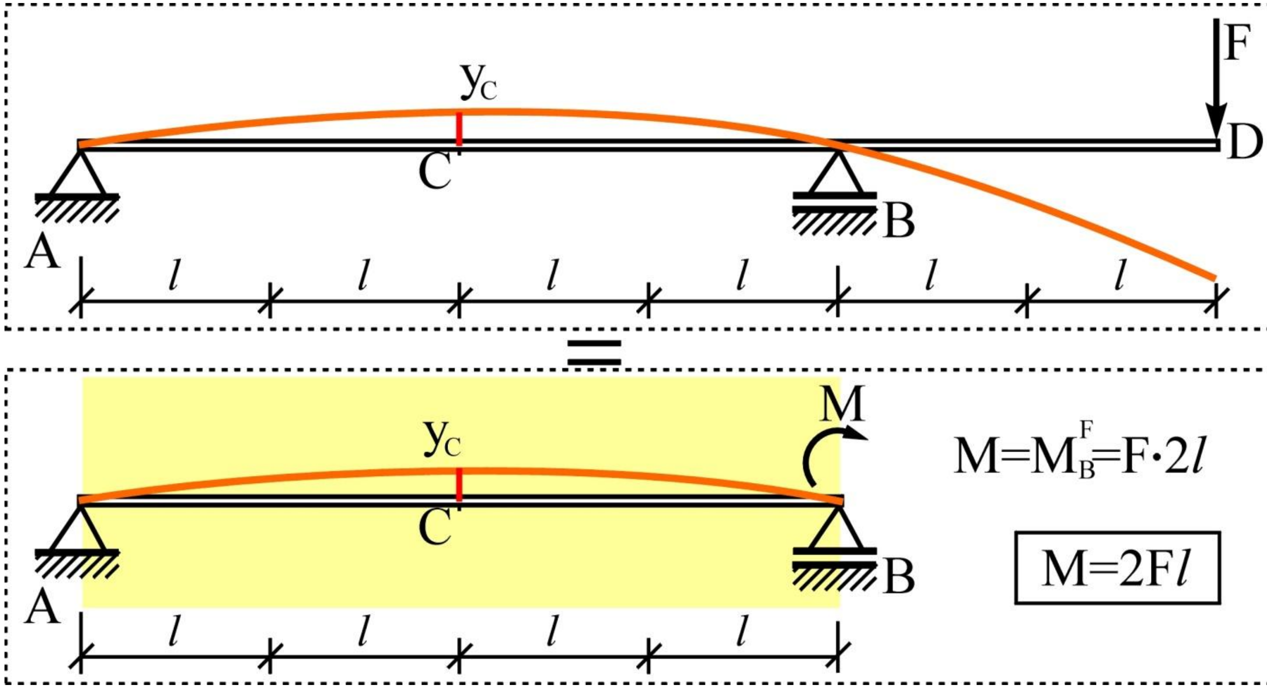
$$y_{B1} = \frac{q(2l)^4}{8EI}, \quad \beta_1 = \frac{q(2l)^3}{6EI}, \quad y_{B2} = y_{C2} + l\alpha,$$

$$\beta_3 = \frac{F(2l)^2}{2EI}, \quad y_{C2} = \frac{Pl^3}{3EI}, \quad \beta_2 = \alpha = \frac{Pl^2}{2EI},$$

$$y_{C3} = \frac{F(2l)^3}{6EI}\left(\frac{l}{2l}\right)^2\left(3 - \frac{l}{2l}\right), \quad y_{B3} = \frac{F(2l)^3}{3EI}.$$



Primer 4.3 Za gredu s prepustom prikazanu na slici odrediti ugib na mestu C?



Kada se u primeru poput ovog traži bi-lo koja deformacija koja se nalazi između oslonaca najbolje je posmatrati prostu gredu sa spregom nad osloncem koji zamenjuje dejstvo opterećenja koje se nalazi na prepustu.

Direktno na osnovu tablice proste grede, sa spregom nad osloncem, dobija se:

$$y_C = \frac{M(4l)^2}{16EI} = \frac{2Fl \cdot (4l)^2}{16EI} = \frac{2Fl^3}{EI}.$$

Primer 4.4 U problemu iz primera 4.3 detaljnijom analizom odrediti ugibe na mestima C i D?

U tom cilju se prvo, originalnom sistemu sa prepustom, nad osloncem B dodaju dva uravnotežena sprega istih vrednosti kao u prethodnom primeru.

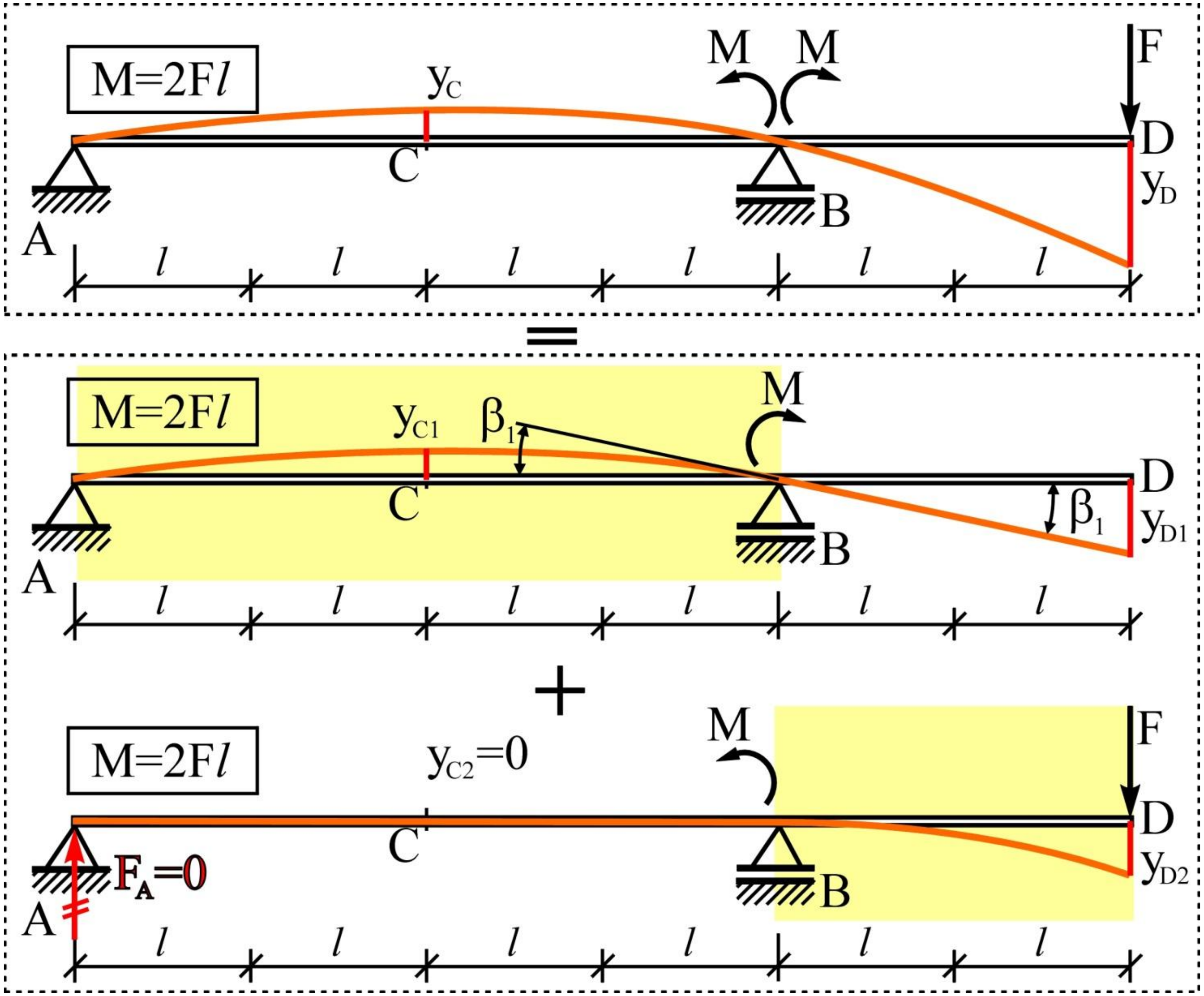
Zatim se opterećenje podeli kao na slici.

Za prvu dobijenu sliku sa samo jednim spregom koristi se tablica proste grede na osnovu koje se dobijaju y_{C1} i β_1:

$$y_{C1} = \frac{2Fl \cdot (4l)^2}{16EI},$$

$$\beta_1 = \frac{2Fl \cdot 4l}{3EI}.$$

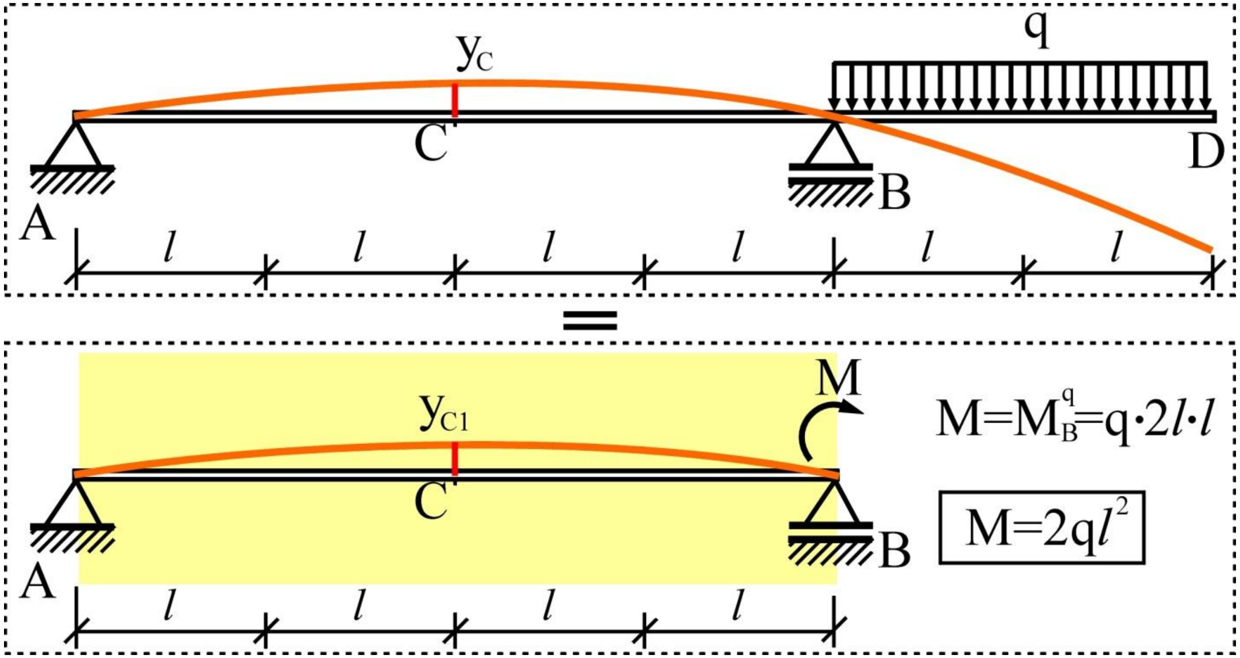
Dobijeno β_1 određuje y_{D1} po formuli $y_{D1} = 2l \cdot \beta_1$.



Za drugu dobijenu sliku sa preostalim spregom i silom na prepustu, gde je y_{C2}=0, koristi se tablica konzole na osnovu koje se dobija y_{D2}: $y_{D2} = F(2l)^3 / 3EI$.

Konačno, tražene ugibe definišu izrazi: $y_C = y_{C1}, \quad y_D = y_{D1} + y_{D2}$.

Primer 4.5 Za gredu s prepustom prikazanu na slici odrediti ugib na mestu C?



Kada se u primeru poput ovog traži bilo koja deformacija koja se nalazi između oslonaca najbolje je posmatrati prostu gredu sa spregom nad osloncem koji zamenjuje dejstvo opterećenja koje se nalazi na prepustu.

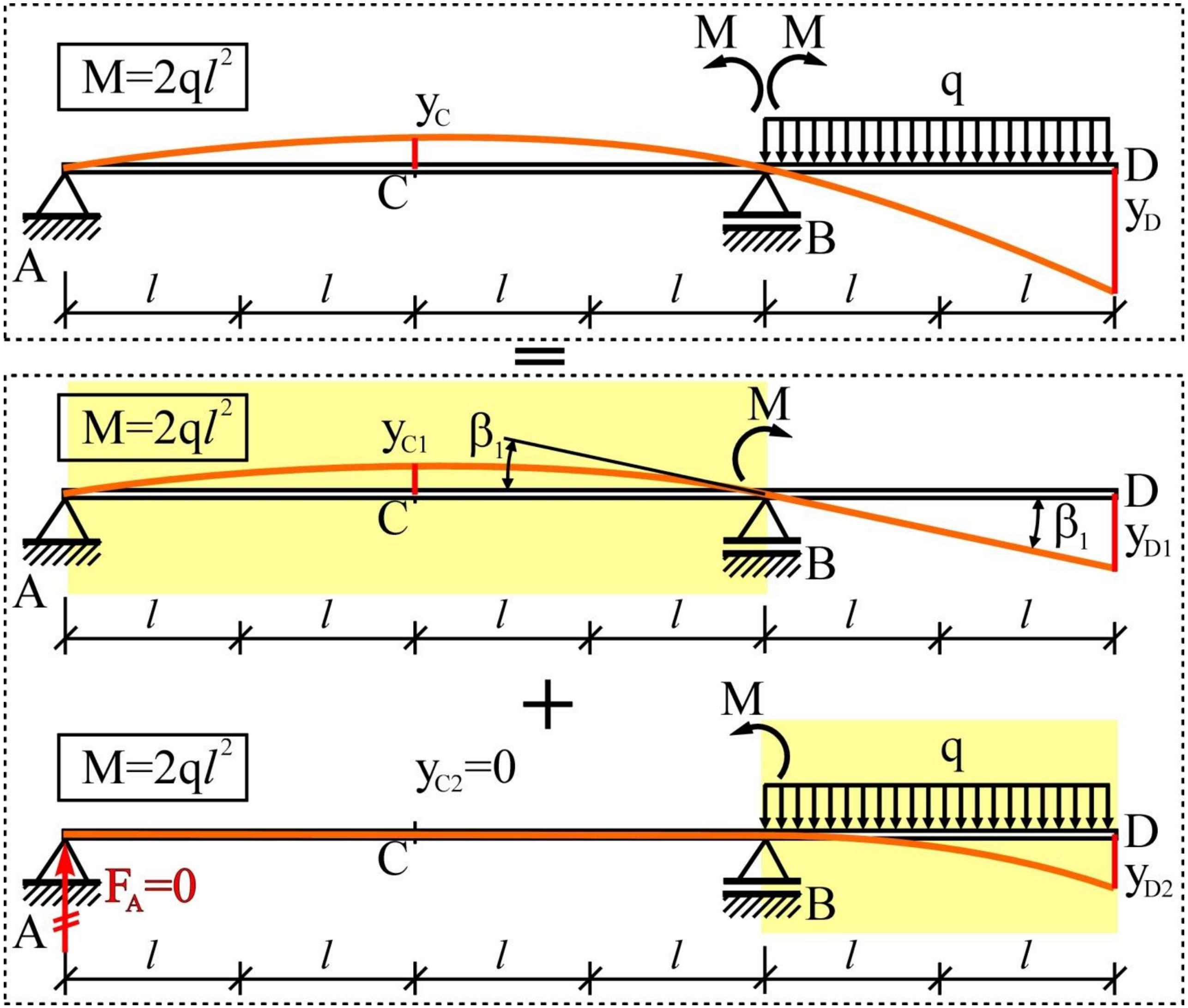
Direktno na osnovu tablice proste grede, sa spregom nad osloncem, dobija se:

$$y_C = \frac{M(4l)^2}{16EI} = \frac{2ql^2 \cdot (4l)^2}{16EI} = \frac{2ql^4}{EI}.$$

Primer 4.6 U problemu iz primera 4.5 detaljnijom analizom odrediti ugibe na mestima C i D?

U tom cilju se prvo, originalnom sistemu sa prepustom, nad osloncem B dodaju dva uravnotežena sprega istih vrednosti kao u prethodnom primeru.

Zatim se opterećenje podeli kao na slici.



Za prvu dobijenu sliku sa samo jednim spregom koristi se tablica proste grede na osnovu koje se dobijaju y_{C1} i β_1:

$$y_{C1} = \frac{2ql^2 \cdot (4l)^2}{16EI},$$

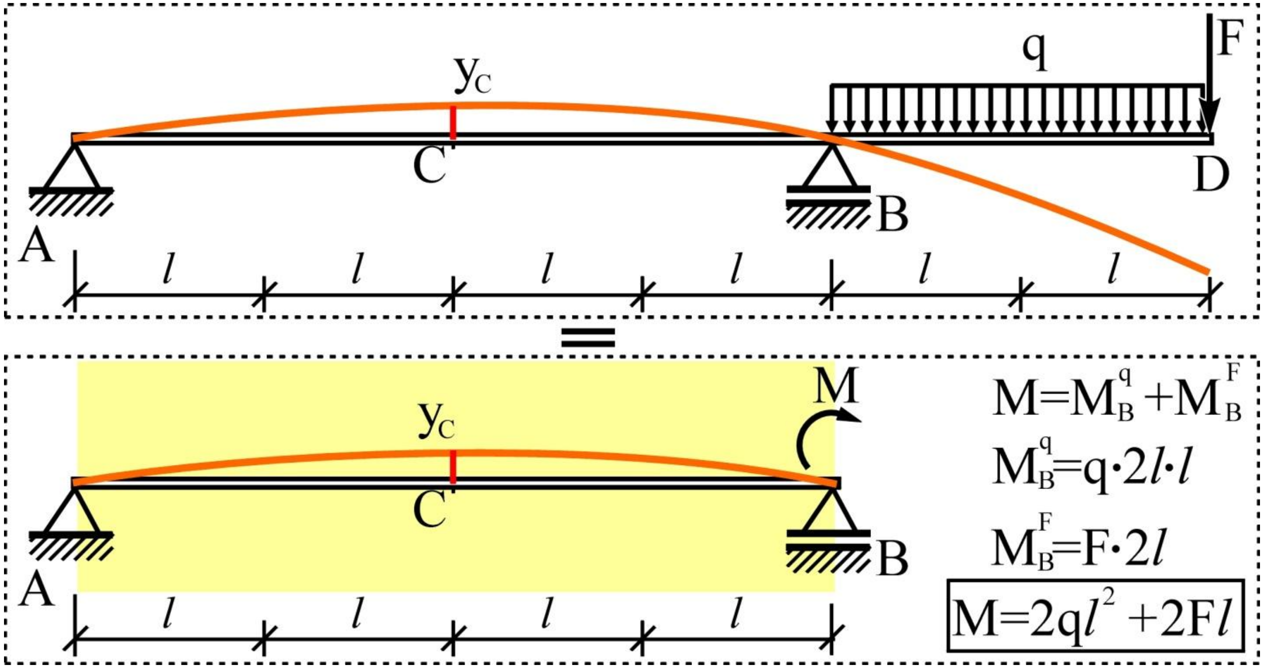
$$\beta_1 = \frac{2ql^2 \cdot 4l}{3EI}.$$

Dobijeno β_1 određuje y_{D1} po formuli $y_{D1} = 2l \cdot \beta_1$.

Za drugu dobijenu sliku sa preostalim spregom i opterećenjem na prepustu, gde je $y_{C2}=0$, koristi se tablica konzole na osnovu koje je: $y_{D2} = q(2l)^4 / 8EI$.

Konačno, tražene ugibe definišu izrazi: $y_C = y_{C1}, \quad y_D = y_{D1} + y_{D2}.$

Primer 4.7 Za gredu s prepustom prikazanu na slici odrediti samo ugib na mestu C?



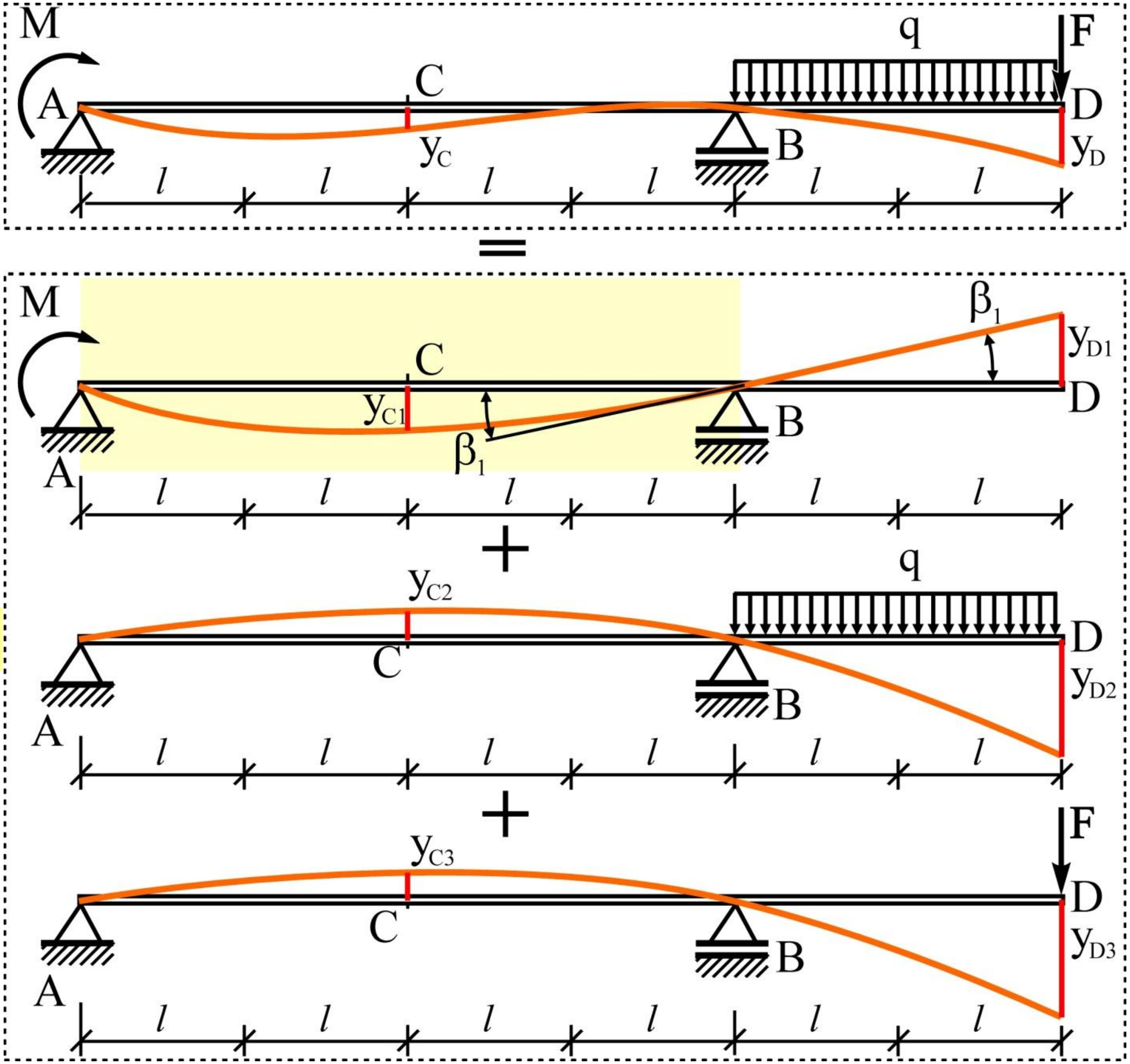
Kada se u primeru poput ovog traži bi-lo koja deformacija koja se nalazi između oslonaca najbolje je posmatrati prostu gredu sa spregom nad osloncem koji zamenjuje dejstvo celokupnog opterećenja koje se nalazi na prepustu.

Spreg mora biti jednak algebarskom zbiru momenata celokupnog opterećenja koje se nalazi na prepustu za tačku oslonca B.

Direktno na osnovu tablice proste grede, sa spregom nad osloncem, dobija se:

$$y_C = \frac{M(4l)^2}{16EI} = \frac{\left(2ql^2 + 2Fl\right)\cdot(4l)^2}{16EI}.$$

Primer 4.8 Za gredu s prepustom prikazanu na slici odrediti ugibe na mestima C i D?



Na osnovu principa superponiranja deformacija tražene ugibe definišu izrazi:

$$y_C = y_{C1} - y_{C2} - y_{C3},$$

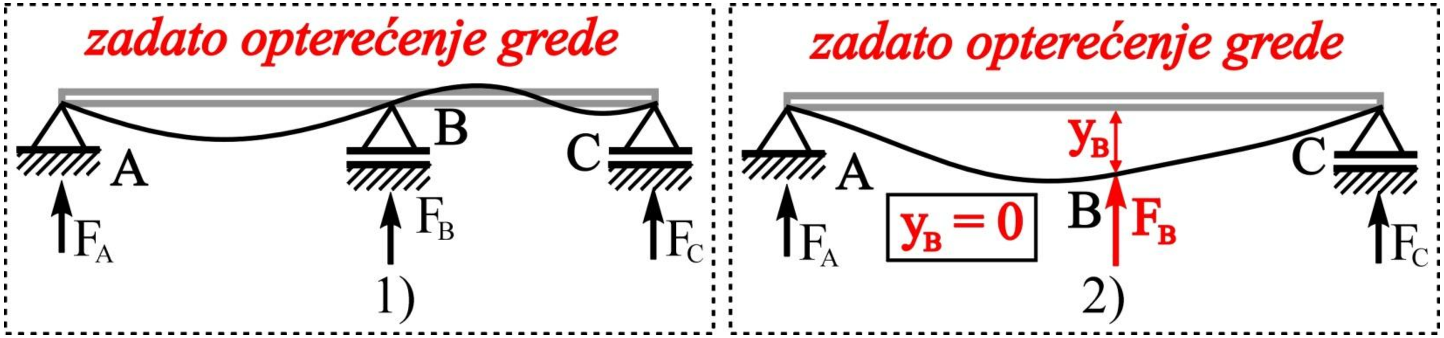
$$y_D = -y_{D1} + y_{D2} + y_{D3}.$$

Za prvu dobijenu sliku sa samo jednim spregom koristi se tablica proste grede na osnovu koje se dobijaju y_{C1} i β_1 (koje određuje y_{D1}):

$$y_{C1} = \frac{M(4l)^2}{16EI}, \beta_1 = \frac{M\,4l}{6EI} \Rightarrow y_{D1} = 2l \cdot \beta_1.$$

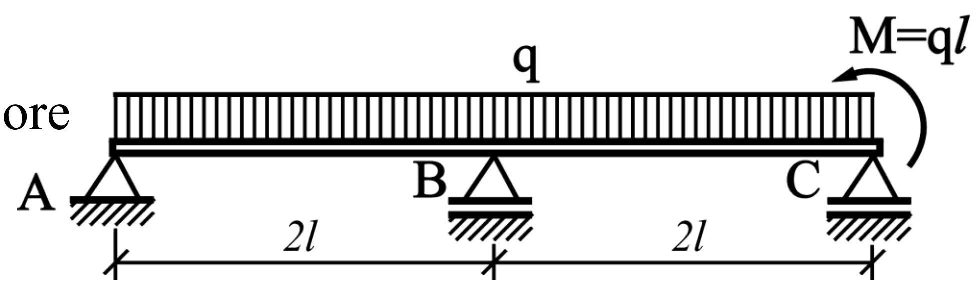
Dobijanje ugiba y_{C2}, y_{C3}, y_{D2} i y_{D3} prikazano je u primerima 4.3-4.6.

Otpori oslonaca kao statički prekobrojne veličine

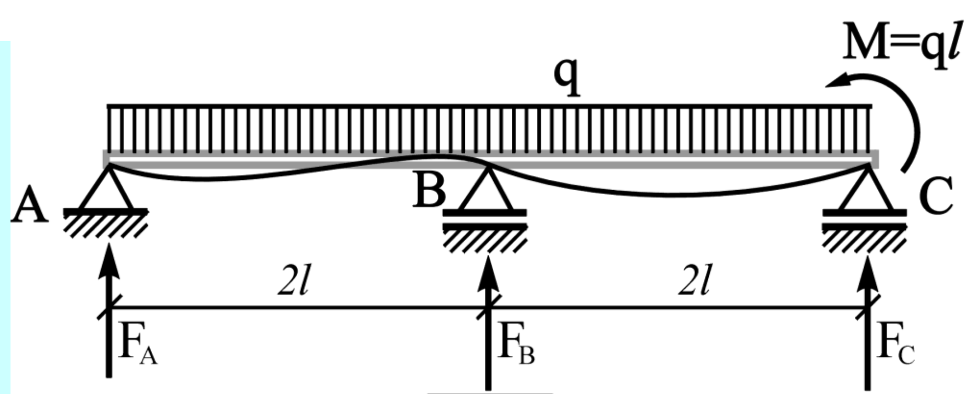


Pokažimo ideju ove metode kod statički neodređene grede na tri oslonca (Sl.1). Ovde se koristi činjenica da je ugib na mestu oslonca jednak nuli. Zamislimo da smo uklonili srednji oslonac i zamenili ga odgovarajućom silom F_B koja se javlja u njemu (Sl.2). Tu silu zvaćemo statički prekobrojnom veličinom. Dobila bi se prosta greda AC i mogućnost da se korišćenjem principa superponiranja deformacija odredi izraz za ugib y_B preko zadatog opterećenja i statički prekobrojne veličine. Ovde je GUD (**G**eometrijski **U**slov **D**eformacije) $y_B = 0$. Dopunska jednačina, dobijena iz GUD-a, odrediće statički prekobrojnu veličinu F_B, nakon čega će statički uslovi ravnoteže sistema sa slike 1 moći da odrede preostale nepoznate F_A i F_C.

Primer 4.9 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod "Otpor oslonca kao statički prkobrojna". Poznate veličine su q i l.

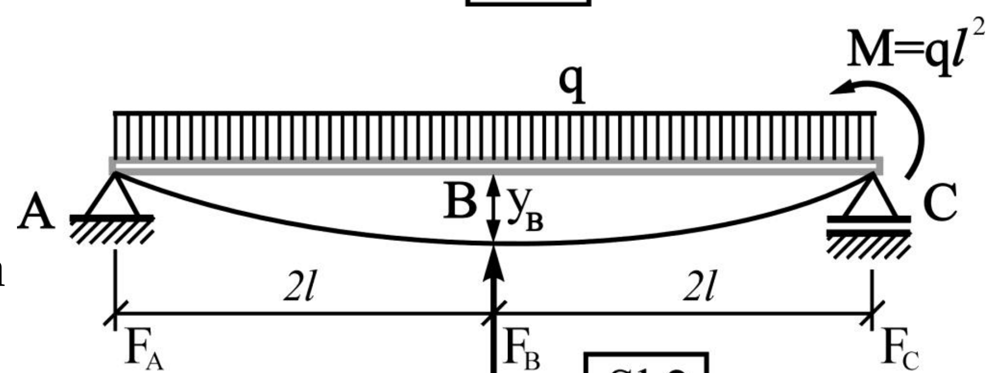


Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i F_C, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.



Сл.1

Zamišljenom zamenom srednjeg oslonca B statički prekobrojnom silom F_B, dobija se prosta greda (Sl.2), gde se geometrijski uslov deformacije (GUD) dobija iz uslova da je ugib na mestu oslonca B jednak nuli, tj. $y_B = 0$. GUD daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini F_B:



Sl.2

$$\frac{5q\cdot(4l)^4}{384EI} + \frac{ql^2\cdot(4l)^2}{16EI} - \frac{F_B\cdot(4l)^3}{48EI} = 0.$$

Ovde je: $y_B = y_1 + y_2 - y_3$,

$$y_1 = \frac{5q \cdot (4l)^4}{384EI}, \quad y_3 = \frac{F_B \cdot (4l)^3}{48EI},$$

$$y_2 = \frac{M \cdot (4l)^2}{16EI} = \frac{ql^2 \cdot (4l)^2}{16EI}.$$

Rešenje dobijene jednačine je:

$$F_B = \frac{13}{4} ql.$$

Određivanje preostalih otpora oslonaca (Sl.1):

$$\sum M_{Ai} = 0 \Rightarrow$$

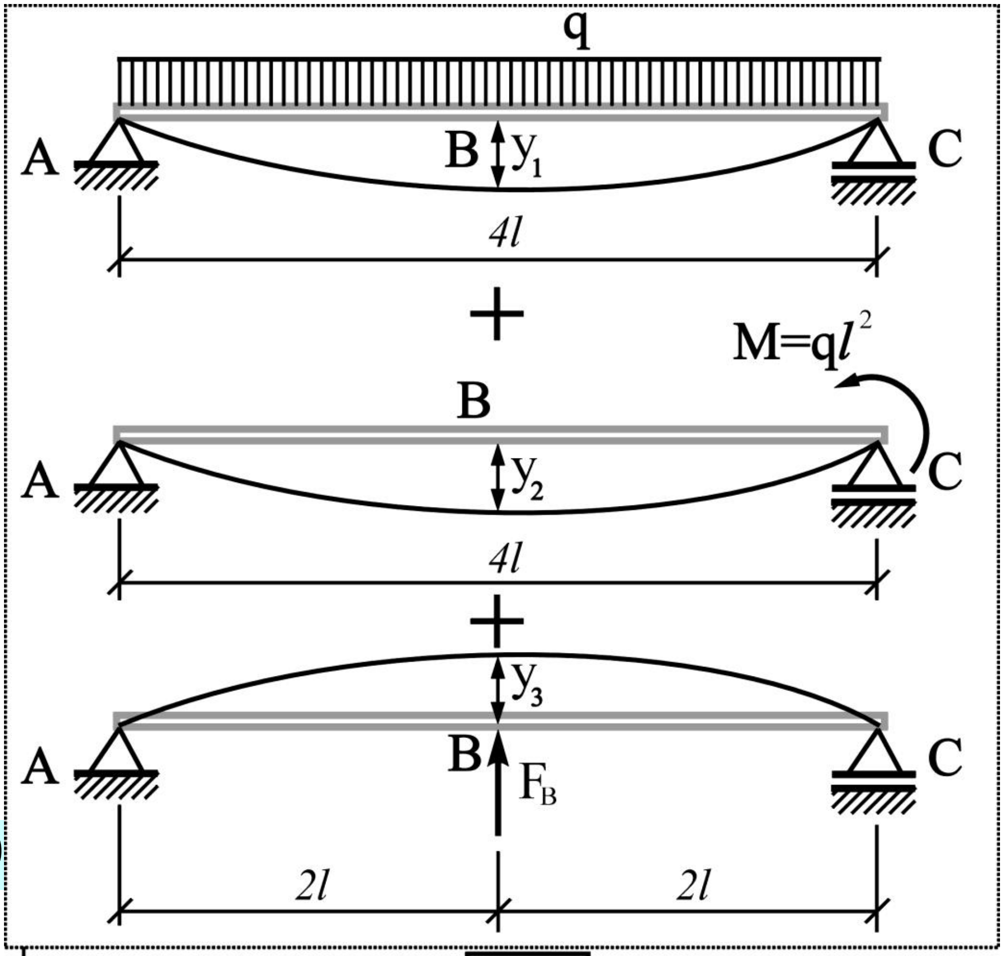
$$-q \cdot 4l \cdot 2l + F_B \cdot 2l + F_C \cdot 4l + M = 0$$

$$\Rightarrow F_C = \frac{1}{8} ql.$$

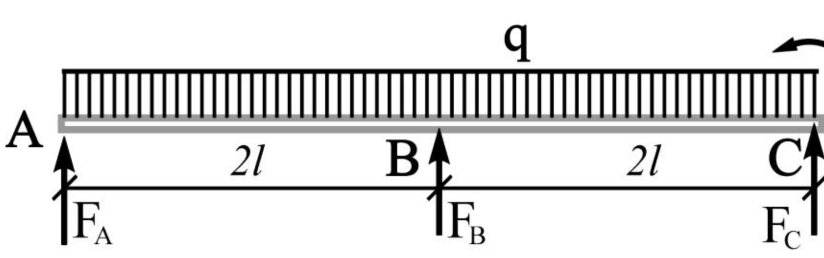
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow$$

$$F_A + F_B + F_C - q \cdot 4l = 0$$

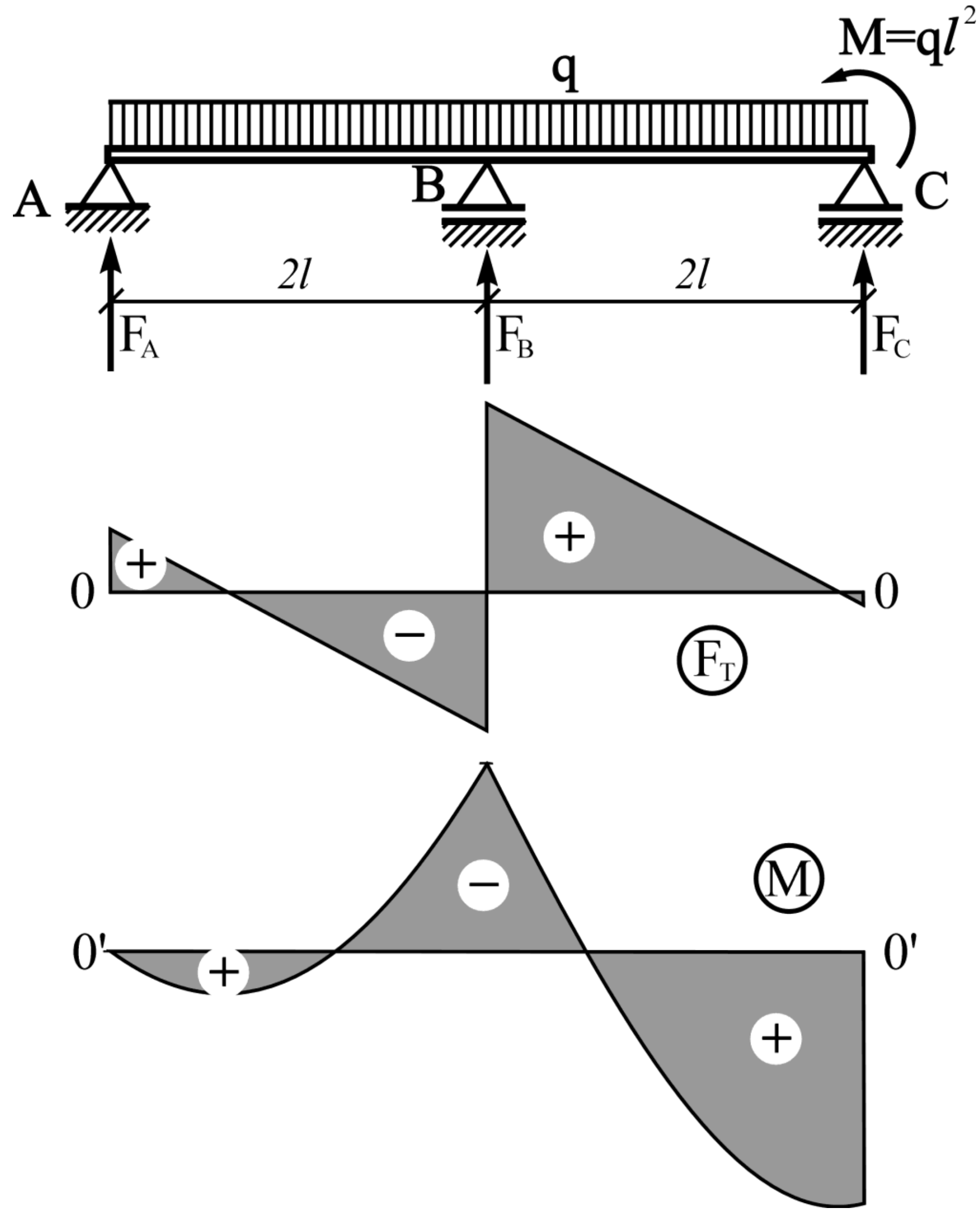
$$\Rightarrow F_A = \frac{5}{8} ql.$$



deformacije uz Sl.2

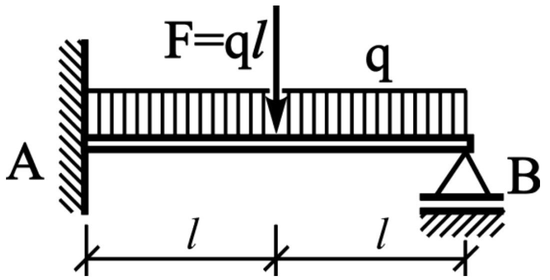


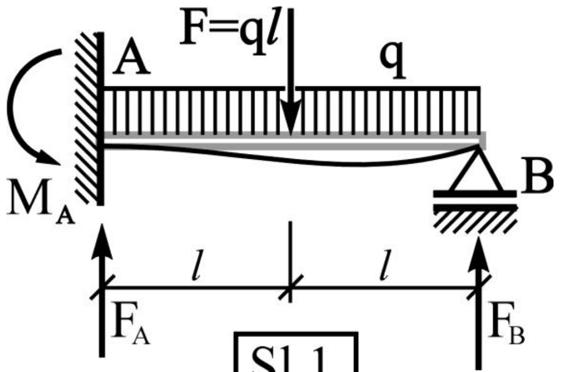
Sl.1



Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.

Primer 4.10 Za zadat statički neodređen gredni nosač odrediti otpor oslonaca *B* i reakcije u ukleštenju *A*. Koristiti metod ”Otpor oslonca kao statički prkobrojna”. Poznate veličine su q i *l*.

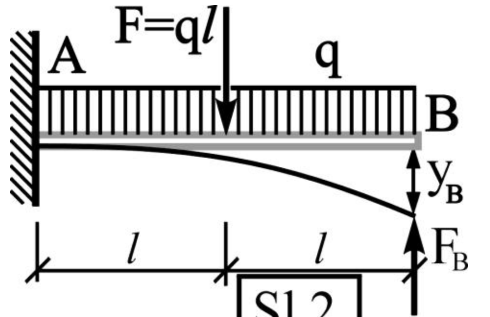




Sl.1

Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i M_A, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.

Zamišljenom zamenom oslonca *B* statički prekobrojnom silom F_B, dobija se konzola (Sl.2), gde se geometrijski uslov deformacije (GUD) dobija iz uslova da je ugib na mestu oslonca *B* jednak nuli, tj. $y_B = 0$. GUD daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini F_B :



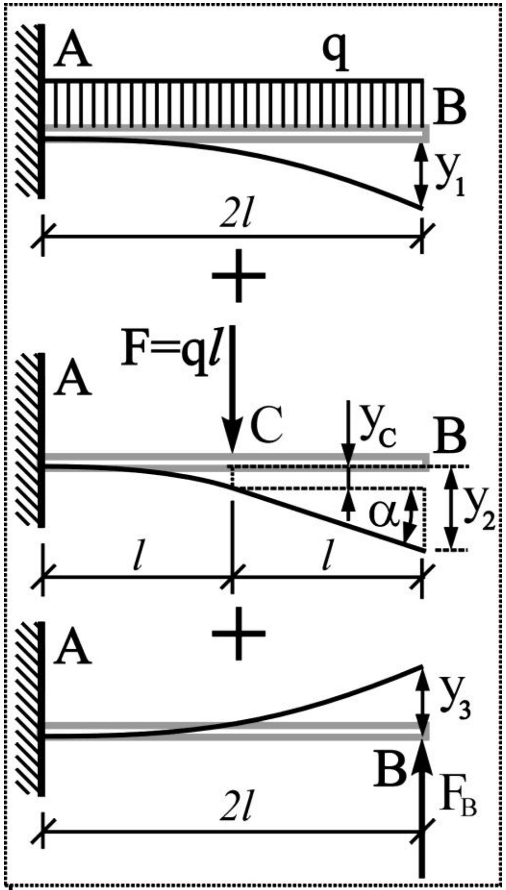
Sl.2

$$\frac{q\cdot(2l)^4}{8EI}+\frac{ql\cdot l^3}{3EI}+l\cdot\frac{ql\cdot l^2}{2EI}-\frac{F_B\cdot(2l)^3}{3EI}=0.$$

Ovde je: $y_B = y_1 + y_2 - y_3$,

$$y_1 = \frac{q\cdot(2l)^4}{8EI}, \quad y_2 = y_C + l\cdot\alpha = \frac{ql\cdot l^3}{3EI} + l\cdot\frac{ql\cdot l^2}{2EI},$$

$$y_C = \frac{F\cdot l^3}{3EI} = \frac{ql\cdot l^3}{3EI}, \quad \alpha = \frac{F\cdot l^2}{2EI} = \frac{ql\cdot l^2}{2EI}, \quad y_3 = \frac{F_B\cdot(2l)^3}{3EI}.$$



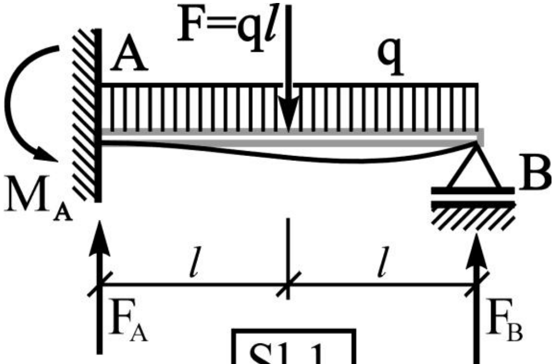
deformacije uz Sl.2

Rešenje dobijene jednačine je: $F_B = \frac{17}{16}ql.$

Određivanje preostalih otpora oslonaca (Sl.1):

$$\sum M_{Ai} = 0 \Rightarrow -q\cdot 4l\cdot 2l + F_B\cdot 2l + F_C\cdot 4l + M = 0$$

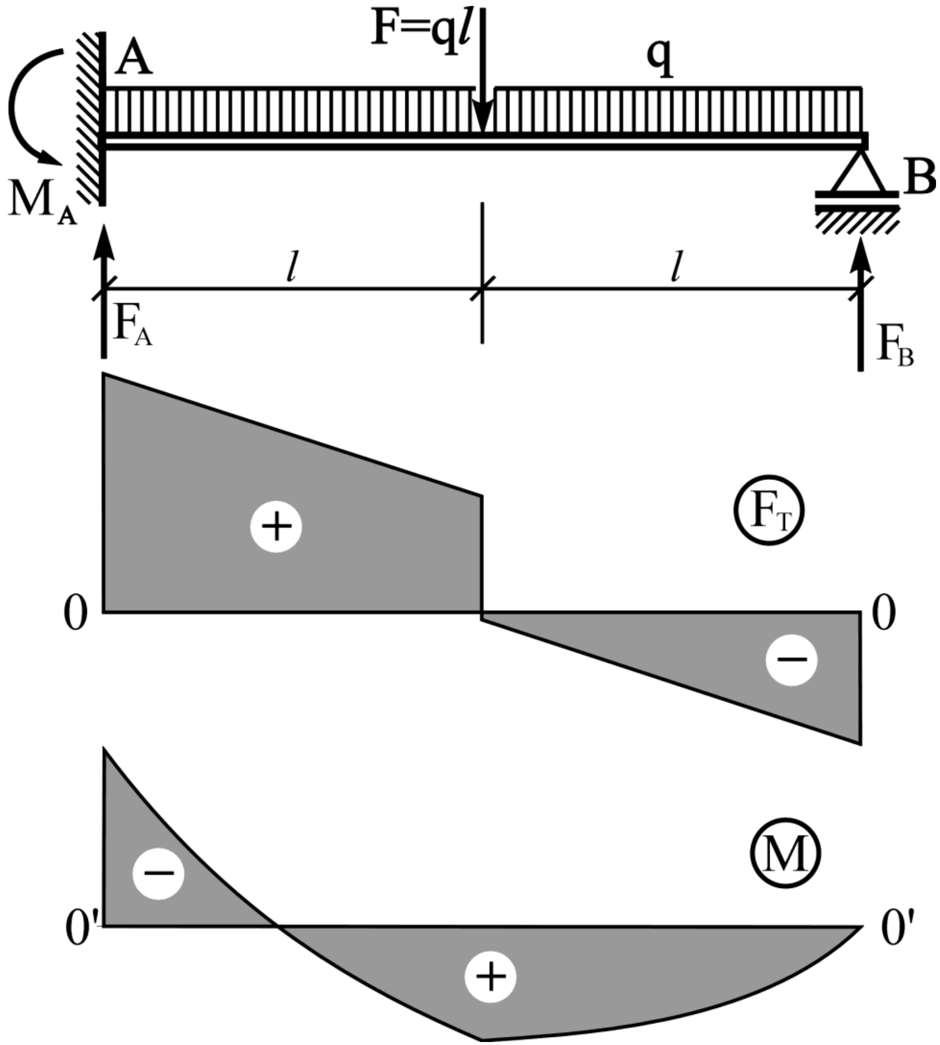
$$\Rightarrow M_A = \frac{7}{8}ql^2.$$



Sl.1

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F - q\cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$F_A = \frac{31}{16}ql.$$



Za izračunate vrednosti reakcija veza, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.