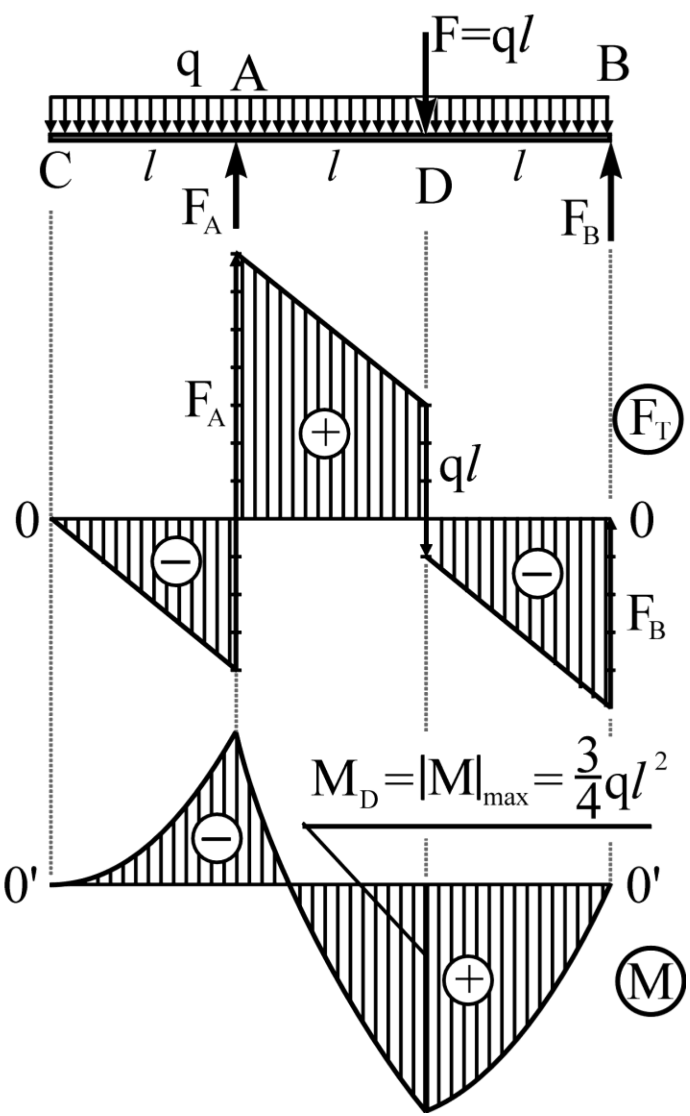
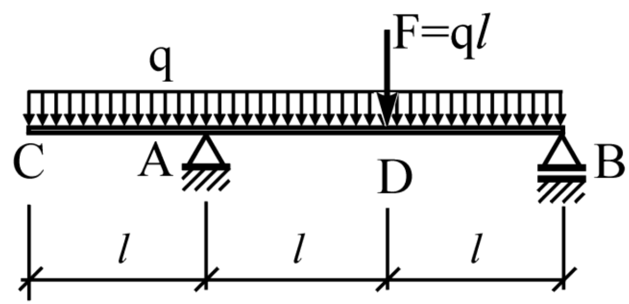
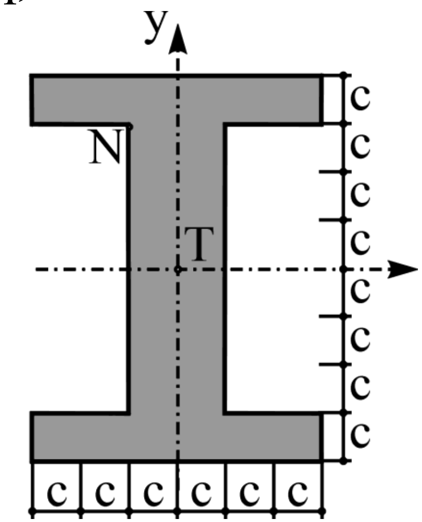
Primer 3.9 Za zadat gredni nosač: odrediti otpore oslonaca, nacrtati dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila, odrediti maksimalni normalni napon i tangencijalni napon u tački *N* preseka *B-ε*? Poznate veličine su q, *l* i c.







Jednačine ravnoteže:

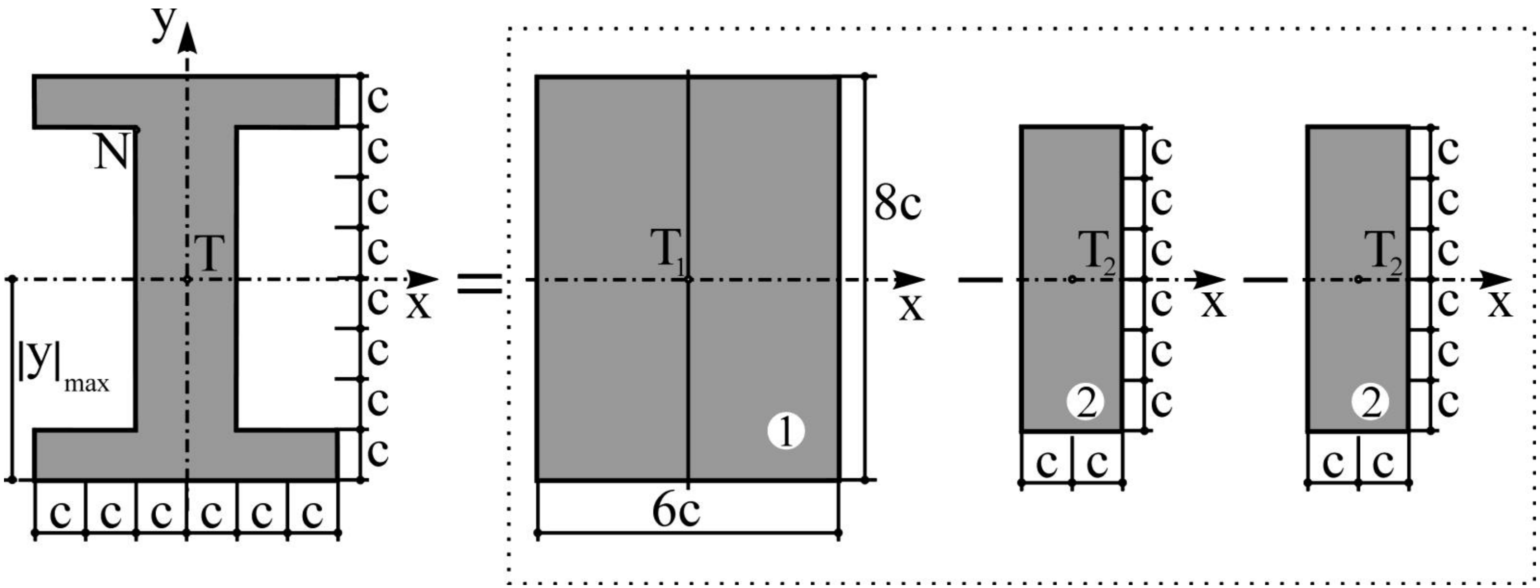
$$\sum M_{Ai} = -q \cdot 3l \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot l + F_B \cdot 2l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{5}{4} ql,$$

$$\sum Y_i = F_A - q \cdot 3l - ql + F_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{11}{4} ql.$$

Napadni momenti :

$$M_A = \sum M_{Ai}^{l} = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^2}{2} = -2\frac{ql^2}{4},$$

$$M_D = \sum M_{Di}^{d} = +F_B \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = +3\frac{ql^2}{4}.$$

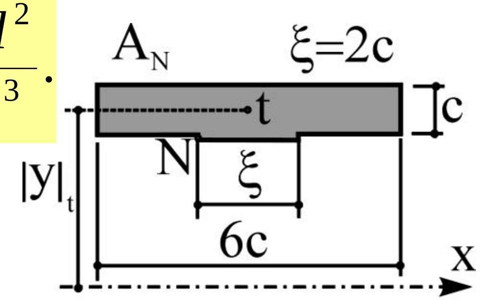


Određivanje momenta inercije za neutralnu osu:

$$I_x = I_x^{(1)} - 2I_x^{(2)} = \frac{(6c)\cdot(8c)^3}{12} - 2\frac{(2c)\cdot(6c)^3}{12} = 184c^4.$$

Određivanje otpornog momenta i maksimalnog normalnog napona:

$$|y|_{\max} = 4c \Rightarrow W_x = \frac{I_x}{|y|_{\max}} = 46c^3 \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{3}{184}\frac{ql^2}{c^3}.$$



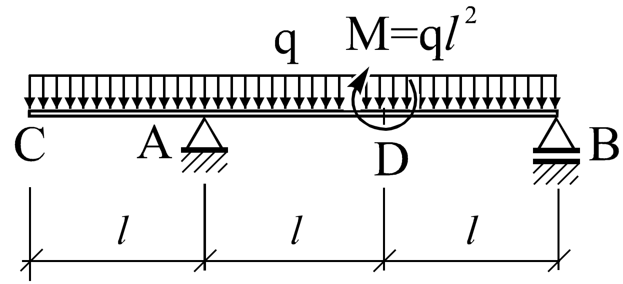
Određivanje tangencijalnog napona:

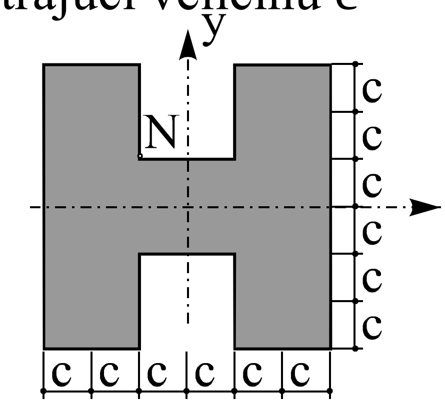
$$|F_T|_{B-\varepsilon} = 5ql/4,\; S_N = 6c^2\cdot(7c/2) = 21c^3 \Rightarrow$$

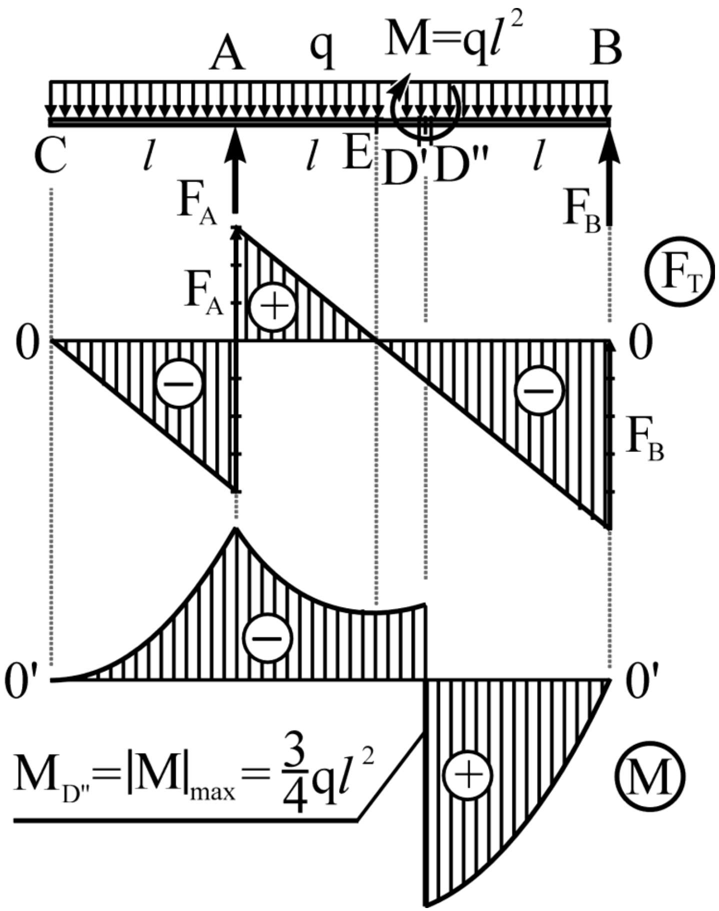
$$\tau_N = \frac{|F_T|_{B-\varepsilon}\cdot S_N}{I_x\cdot\xi} = \frac{(5ql/4)\cdot 21c^3}{184c^4\cdot 2c} = \frac{105}{1472}\frac{ql}{c^2}.$$

$$S_N = |S_x^{A_N}| = A_N\cdot|y|_t$$

Primer 3.10 Za zadat gredni nosač: odrediti otpore oslonaca, nacrtati dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila, dimenzionisati i smatrajući veličinu c poznatom odrediti tangencijalni napon u tački *N* preseka *A*-ε? Poznate veličine su q, l i σ_d.







Jednačine ravnoteže:

$$\sum M_{Ai} = -q\cdot 3l\cdot\frac{l}{2} - ql^2 + F_B\cdot 2l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{5}{4}ql,$$

$$\sum Y_i = F_A - q\cdot 3l + F_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{7}{4}ql.$$

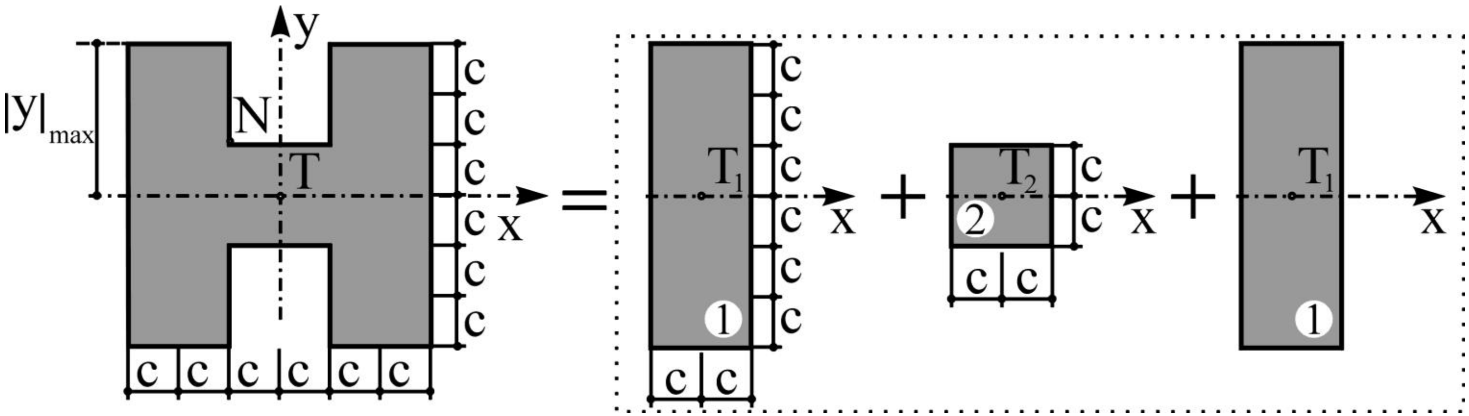
Napadni momenti :

$$M_A = \sum M_{Ai}^{l} = -q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = -\frac{ql^2}{2} = -2\frac{ql^2}{4},$$

$$M_E = \sum M_{Ei}^{l} = +F_A\frac{3l}{4} - q\cdot\frac{7l}{4}\cdot\frac{7l}{8} = -\frac{7ql^2}{32},$$

$$M_{D''} = \sum M_{D''i}^{d} = +F_B\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = +3\frac{ql^2}{4},$$

$$M_{D'} = \sum M_{D'i}^{d} = +F_B\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} - ql^2 = -1\frac{ql^2}{4}.$$



Određivanje momenta inercije za neutralnu osu:

$$I_x = 2I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 2\frac{(2c)\cdot(6c)^3}{12} + \frac{(2c)\cdot(2c)^3}{12} = \frac{220}{3}c^4.$$

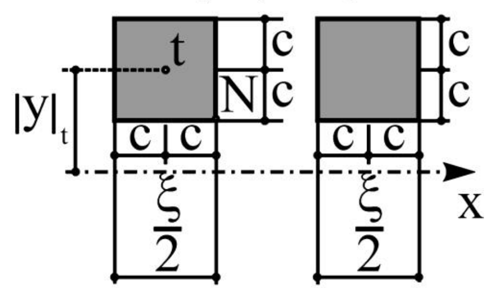
Određivanje otpornog momenta i dimenzionisanje: $|y|_{\max} = 3c \Rightarrow$

$$W_x = \frac{I_x}{|y|_{\max}} = \frac{220}{9}c^3 \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{27}{880}\frac{ql^2}{c^3} \le \sigma_d \Rightarrow \quad c \ge \sqrt[3]{\frac{27}{880}\frac{ql^2}{\sigma_d}}.$$

Određivanje tangencijalnog napona:

$A_N = 2(2c)^2 \qquad \xi = 4c$

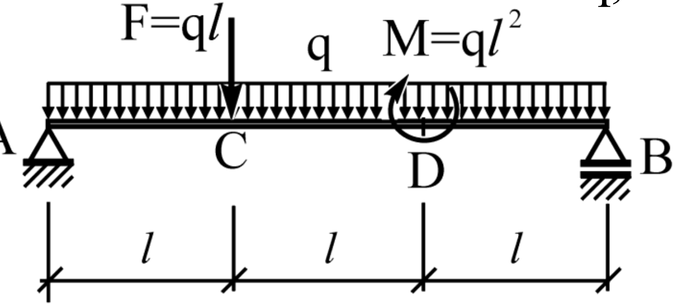
$$|F_T|_{A-\varepsilon} = ql, \quad S_N = 2\cdot 2c^2 \cdot 2c = 8c^3 \Rightarrow$$

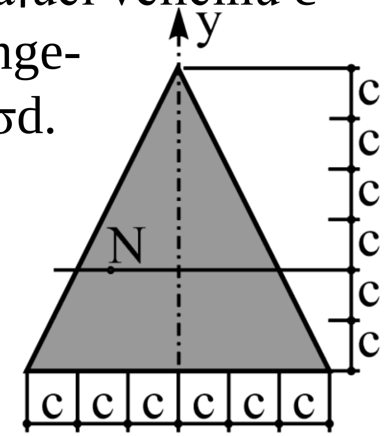


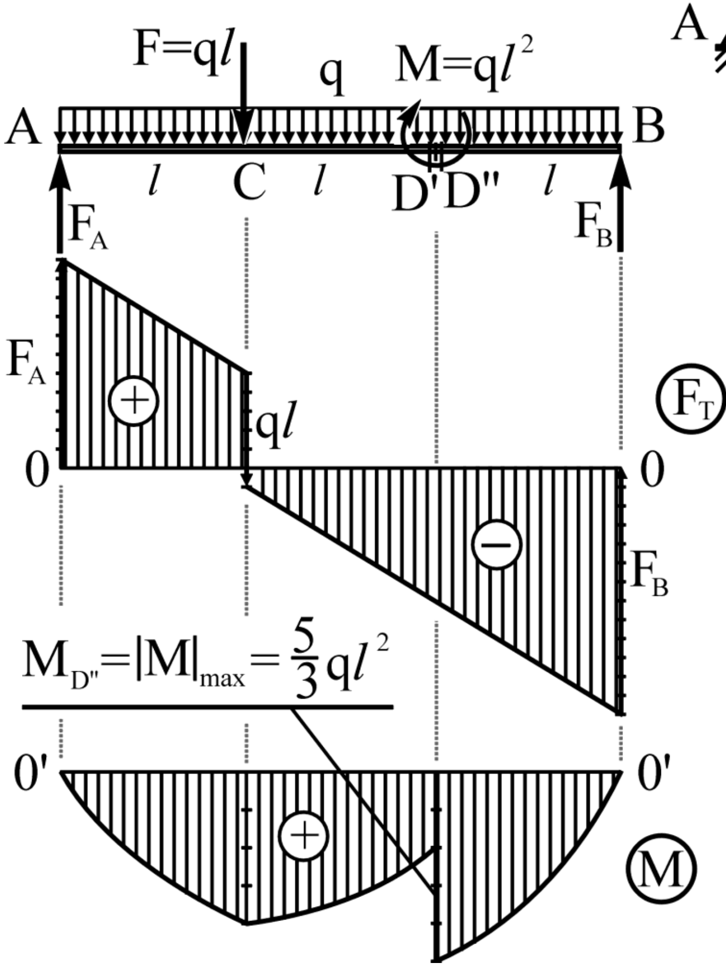
$$\tau_N = \frac{|F_T|_{A-\varepsilon}\cdot S_N}{I_x \cdot \xi} = \frac{ql\cdot 8c^3}{\frac{220}{3}c^4 \cdot 4c} = \frac{3}{110}\frac{ql}{c^2}.$$

$$S_N = \left|S_x^{A_N}\right| = 2\cdot \frac{A_N}{2}\cdot |y|_t$$

Primer 3.11 Za zadat gredni nosač: odrediti otpore oslonaca, nacrtati dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila, dimenzionisati i smatrajući veličinu c poznatom odrediti maksimalni normalni napon u preseku *C* i tangencijalni napon u tački *N* preseka *C*-*ε*? Poznate veličine su q, *l* i σd.







Jednačine ravnoteže:

$$\sum M_{Ai} = -q\cdot 3l\cdot\frac{3l}{2} - ql\cdot l - ql^2 + F_B\cdot 3l = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{13}{6}ql,$$

$$\sum Y_i = F_A - ql - q\cdot 3l + F_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{11}{6}ql.$$

Napadni momenti :

$$M_C = \sum M_{Ci}^{l} = F_A\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = +4\frac{ql^2}{3},$$

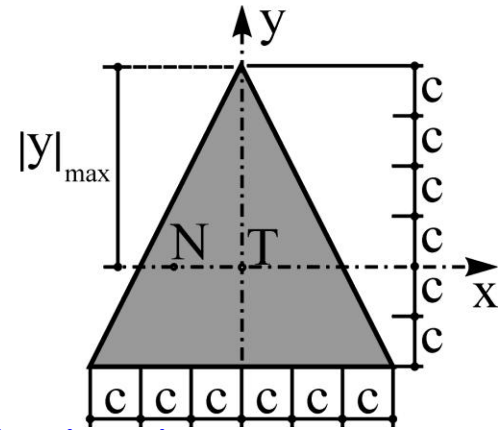
$$M_{D''} = \sum M_{D''i}^{d} = +F_B\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = +5\frac{ql^2}{3},$$

$$M_{D'} = \sum M_{D'i}^{d} = +F_B\cdot l - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} - ql^2 = +2\frac{ql^2}{3}.$$

Određivanje momenta inercije za neutralnu osu i otpornog momenta:

$$\text{Iz tablice} \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{(6c)\cdot(6c)^3}{36} = 36c^4.$$

$$|y|_{\max} = 4c \quad \Rightarrow \quad W_x = \frac{I_x}{|y|_{\max}} = \frac{36c^4}{4c} = 9c^3.$$



Određivanje maksimalnog normalnog napona i dimenzionisanje:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{5}{27}\frac{ql^2}{c^3}, \quad \sigma_{\max} = \frac{5}{27}\frac{ql^2}{c^3} \le \sigma_d \Rightarrow c \ge \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{5ql^2}{\sigma_d}}.$$

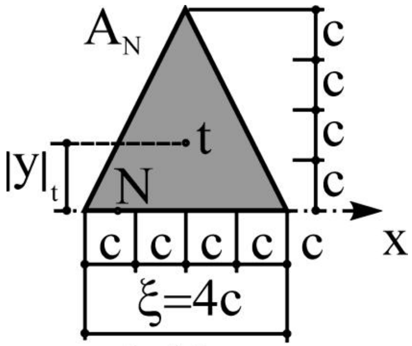
Određivanje maksimalnog normalnog napona u preseku C:

$$\sigma_{C\max} = \frac{|M|_C}{W_x} = \frac{\frac{4}{3}ql^2}{9c^3} = \frac{4}{27}\frac{ql^2}{c^3}.$$

Određivanje tangencijalnog napona:

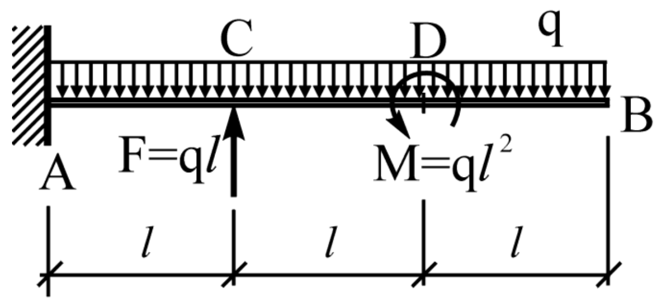
$$|F_T|_{C-\varepsilon} = \frac{5}{6}ql, \quad S_N = \frac{(4c)\cdot(4c)}{2}\cdot\frac{4c}{3} = \frac{32}{3}c^3$$

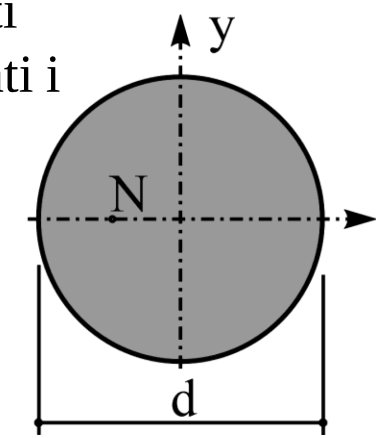
$$\Rightarrow \tau_N = \frac{|F_T|_{C-\varepsilon}\cdot S_N}{I_x\cdot\xi} = \frac{\frac{5}{6}ql\cdot\frac{32}{3}c^3}{36c^4\cdot 4c} = \frac{5}{81}\frac{ql}{c^2}.$$

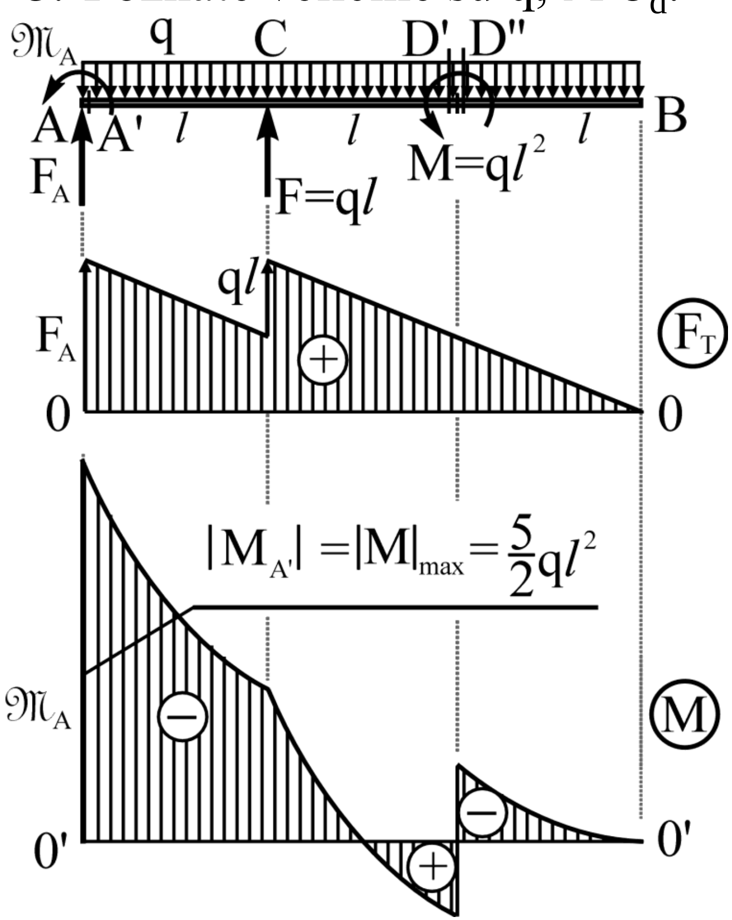


$$S_N = |S_x^{A_N}| = A_N \cdot |y|_t$$

Primer 3.12 Za zadatu konzolu: odrediti otpore oslonaca, nacrtati dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila, dimenzionisati i smatrajući veličinu d poznatom odrediti maksimalni normalni napon u preseku C i tangencijalni napon u tački *N* preseka *C*-ε? Poznate veličine su q, l i σ_d.







Jednačine ravnoteže:

$$\sum M_{Ai} = -q\cdot 3l\cdot \frac{3l}{2} + ql\cdot l + ql^2 + \mathrm{M}_A = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{M}_A = \frac{5}{2}ql^2,$$

$$\sum Y_i = F_A + ql - q\cdot 3l = 0 \Rightarrow F_A = 2ql.$$

Napadni momenti :

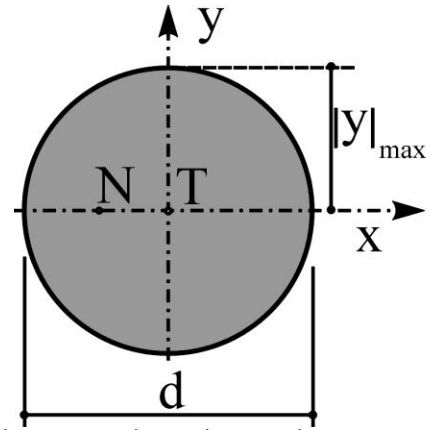
$$M_{A'} = \sum M^{l}_{A'i} = -\mathrm{M}_A = -\frac{5}{2}ql^2,$$

$$M_{D''} = \sum M^{d}_{D''i} = -q\cdot l\cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{2}ql^2,$$

$$M_{D'} = \sum M^{d}_{D'i} = -q\cdot l\cdot \frac{l}{2} + ql^2 = +\frac{1}{2}ql^2,$$

$$M_{C} = \sum M^{d}_{Ci} = -q\cdot 2l\cdot l + ql^2 = -ql^2.$$

Određivanje momenta inercije za neutralnu osu i otpornog momenta:



$$\text{Iz tablice} \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{d^4 \pi}{64}.$$

$$|y|_{\max} = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad W_x = \frac{I_x}{|y|_{\max}} = \frac{d^3 \pi}{32}.$$

Određivanje maksimalnog normalnog napona i dimenzionisanje:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{80}{\pi}\frac{ql^2}{d^3}, \quad \sigma_{\max} = \frac{80}{\pi}\frac{ql^2}{d^3} \leq \sigma_d \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{80 ql^2}{\pi \sigma_d}}.$$

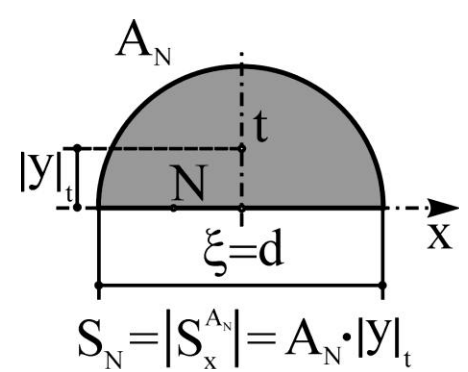
Određivanje maksimalnog normalnog napona u preseku C:

$$\sigma_{C\max} = \frac{|M|_C}{W_x} = \frac{ql^2}{\frac{d^3\pi}{32}} = \frac{32}{\pi}\frac{ql^2}{d^3}.$$

Određivanje tangencijalnog napona:

$$|F_T|_{C-\varepsilon} = ql, \quad S_N = \frac{d^2 \cdot \pi}{8} \cdot \frac{4\frac{d}{2}}{3\pi} = \frac{1}{12} d^3$$

$$\Rightarrow \tau_N = \frac{|F_T|_{C-\varepsilon} \cdot S_N}{I_x \cdot \xi} = \frac{ql \cdot \frac{1}{12} d^3}{\frac{d^4 \pi}{64} \cdot d} = \frac{16}{3}\frac{ql}{d^2}.$$



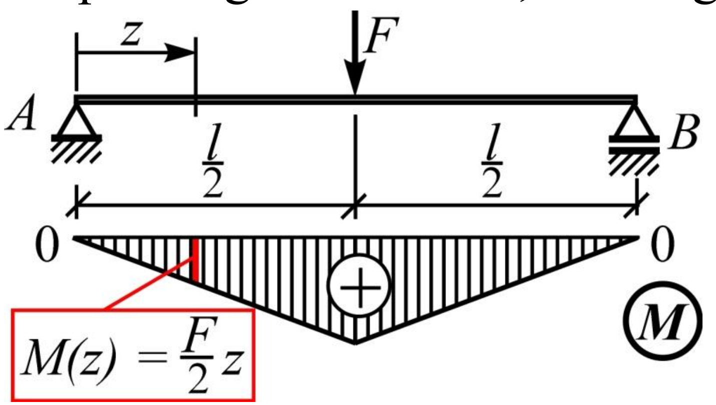
Nosač idealnog oblika: definicija, način određivanja.

U opštem slučaju moment savijaja je fukcija koordinate z, tj. promenljiv je duž nosača. Cilj je da i poprečni presek, u cilju uštede materijala, bude takođe promenljiv duž nosača i da u svakom poprečnom preseku maksimalni normalni napon bude jednak dozvoljenom:

$$\sigma_{\max}(z) = const. = \sigma_d \Rightarrow \frac{|M(z)|}{W_x(z)} = \sigma_d \Rightarrow \boxed{W_x(z) = \frac{|M(z)|}{\sigma_d}.}$$

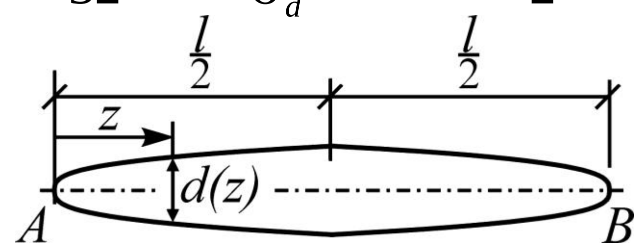
Primer 3.3

Za prostu gredu sa slike, kružnog poprečnog preseka, odrediti idealni oblik?



$$\boxed{W_x(z) = \frac{|M(z)|}{\sigma_d}} \Rightarrow \frac{d(z)^3 \pi}{32} = \frac{Fz/2}{\sigma_d}, \ 0 < z \le \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{d(z) = \sqrt[3]{\frac{16Fz}{\pi\sigma_d}}.}$$

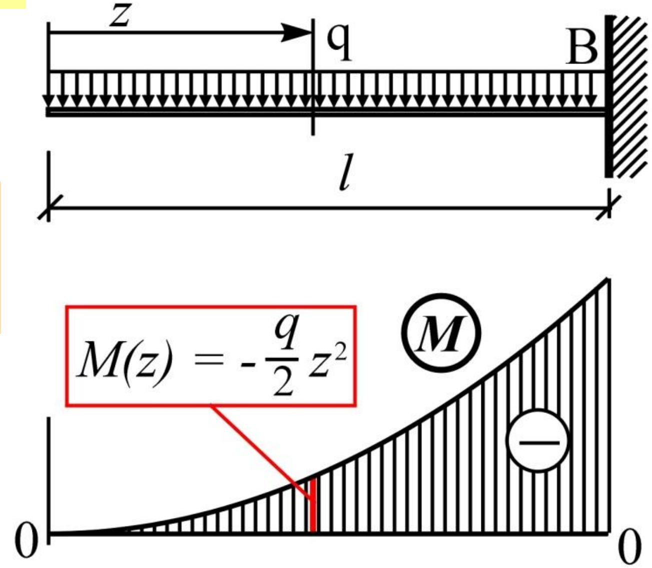


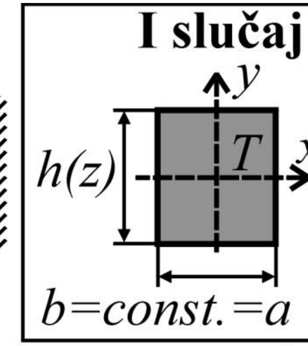
Primer 3.4 Za konzolu sa slike odrediti idealni oblik u oba slučaja?

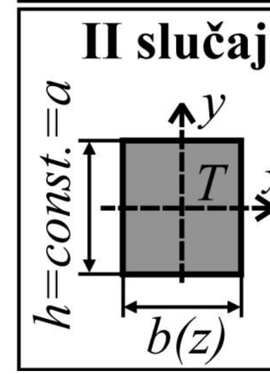
I slučaj-konstantna je širina preseka

$$W_x(z)=\frac{|M(z)|}{\sigma_d}\Rightarrow\frac{a\cdot h(z)^2}{6}=\frac{qz^2/2}{\sigma_d}$$

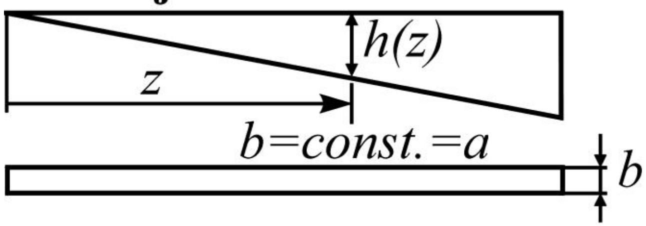
$$\Rightarrow\quad h(z)=\sqrt{\frac{3q}{a\sigma_d}}\cdot z.$$



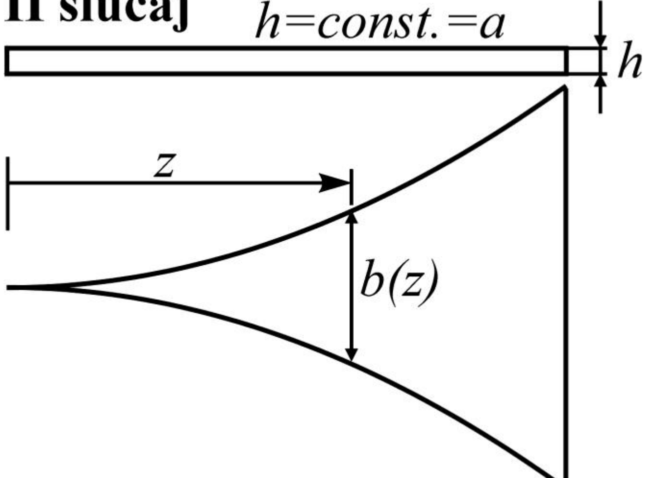




I slučaj



II slučaj



II slučaj-konstantna je visina preseka

$$W_x(z)=\frac{|M(z)|}{\sigma_d}\Rightarrow\frac{b(z)\cdot a^2}{6}=\frac{qz^2/2}{\sigma_d}\Rightarrow$$

$$b(z)=\frac{3q}{a^2\sigma_d}\cdot z^2.$$

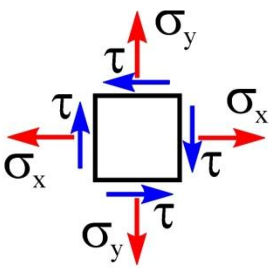
Napomena: Zbog tangencijalnih napona mora se korigovati suženje konzole na levom kraju.

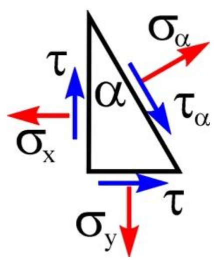
Glavni naponi pri savijanju grede.

Pri savijanju grede, u svakoj tački poprečnog preseka C, prema izrazima

$$\sigma_C = \frac{M}{I_x} y_C, \quad \tau_C = \frac{F_T}{I_x} \frac{S_C}{\xi}$$ definisani su normalni i tangencijalni naponi.

Kroz tačku C može se povući beskonačno mnogo ravni i za svaku od njih definisati normalni i tangencijalni napon (σ_α i τ_α) na način kako je to urađeno u teoriji ravnog stanja napona gde za elementarne deliće sa slike važe formule:



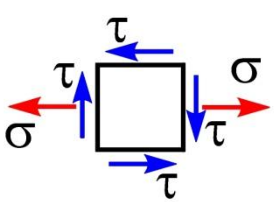


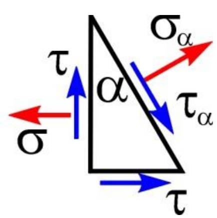
$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}, \ \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Za slučaj savijanja silama, kao specijalni slučaj ravnog stanja napona gde je σ_x iz gornje slike jednako σ, a σ_y=0 (videti donju sliku) gornje formule daju:



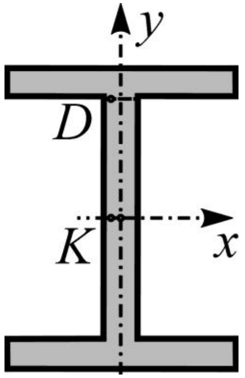


$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha - \tau \cdot \sin 2\alpha, \ \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha,$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \ \tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

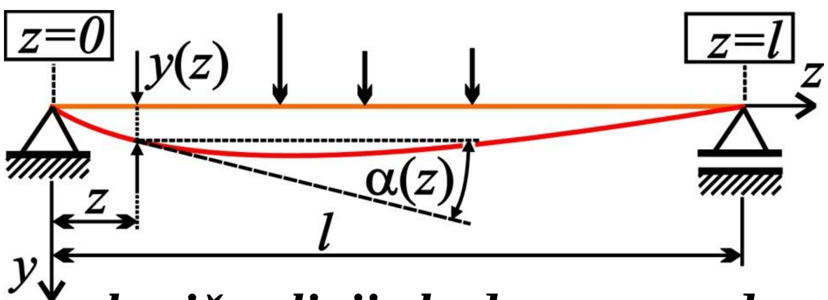
Iz strukture obrazca za glavni napon vidi se da je on veći od normalnog napona u istoj tački poprečnog preseka, pa se time može posaviti pitanje da li postupak primenjen za dimenzionisanje grede, prema maksimalnom normalnom naponu ispravan. Proračun je baziran na zadovoljenju uslova da je normalni napon, u najudaljenijim od neutralne ose tačkama preseka, sa maksimalnim momentom savijanja, manji od dozvoljenog. Pošto su baš u tim tačkama tangencijalni naponi jednaki nuli, vrednosti glavnog napona i maksimalnog normalnog su jednake i samim tim je i takav postupak dimenzionisanja ispravan. Međutim u ostalim tačkama preseka tangencijalni naponi imaju neke svoje vrednosti, pa je potrebno u nekim tačkama preseka proveriti da li su glavni naponi i maksimalni tangencijalni naponi u granicama njihovih dozvoljhenih vrednosti σ_d i τ_d.

Na primer, za poprečni presek sa slike, treba naći maksimalni glavni napon u tački D, u ma kom preseku nosača, u zavisnosti od napadnih momenata i transverzalnih sila, on bio, i proveriti da li je manji od dozvoljenog normalnog napona σ_d. Takođe bi trebalo odrediti maksimalni tangencijalni napon u tački K, u ma kom preseku nosača, u zavisnosti od transverzalnih sila, on bio, i proveriti da li je manji od dozvoljenog tangencijalnog napona τ_d. U slučaju da provere ne daju dobre rezultate dimenzije poprečnog preseka treba korigovati.

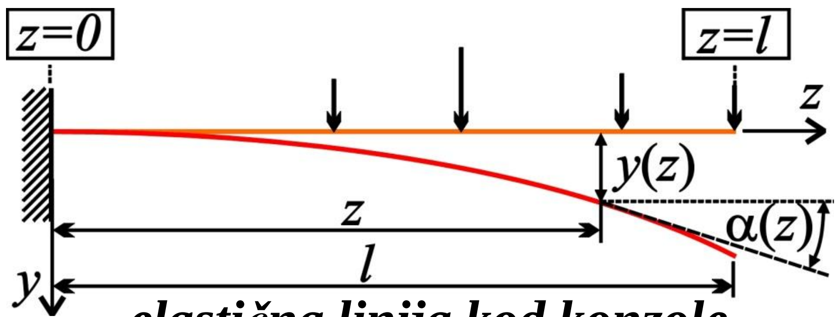


Izvođenje diferencijalne jednačine elastične linije

Elastična linija, čija je jednačina y(z), je krivolinijski oblik ose nosača izazvan opterećenjem. Koordinatni sistem ćemo uvek uzimati tako da je koordinatni početak na levom kraju nosača, gde je osa z usmerena u desnu stranu a osa y naniže. Za svako z se zna y (ugib) i α (ugao nagiba, nagib). Precizno rečeno $\tan\alpha = y'$, međutim pošto se radi o malim deformacijama i y‘ se smatra malom veličinom, imamo da je $\tan\alpha \approx \alpha$, zbog čega praktično važi da je $\alpha(z) = |y'(z)|$. To znači da se ugao nagiba (nagib) na ma kom mestu nosača, označen sa α, β ili drugačije, određuje preko prvog izvoda jednačine elastične linije. Jednačine elastičnih linija, u elementarnim slučajevima proste grede i konzole, dobijene su nakon integracija diferencijalne jednačine elastične linije gde se integracione konstante dobijaju iz graničnih uslova.



elastična linija kod proste grede



elastična linija kod konzole

Granični uslovi za prostu gredu su: y(0)=0 i y(*l*)=0, a za konzolu: y(0)=0 i y'(0)=0. Dakle, na mestu oslonaca ugibi su jednaki nuli a na mestu uklještenja i ugib i nagib.

Za izvođenje diferencijalne jednačine elastične linije polazi se od ranije dobijene relacije koja povezuje njen poluprečnik krivine ρ i veličine E, I_x i M: $\frac{E}{\rho}=\frac{M}{I_x}\Rightarrow$ $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_x}$.....(1)

S obzirom da je za male deformacije $(y')^2\approx 0$, poznata formula iz diferencijalne geometrije za poluprečnik krivine $\rho=\left[1+(y')^2\right]^{3/2}/y''$, daje $\rho=\frac{1}{y''}\Rightarrow$ $\frac{1}{\rho}=y''$.....(2)

Na osnovu jednakosti (1) i (2) i činjenice da je, prema usvojenoj konvenciji o znaku momenta savijanja i smeru ose y, moment pozitivan kada je drugi izvod funkcije y po z negativan, diferencijalna jednačina elastične linije ima oblik:

$$y''=-\frac{M}{EI_x}\text{.....(3)}$$

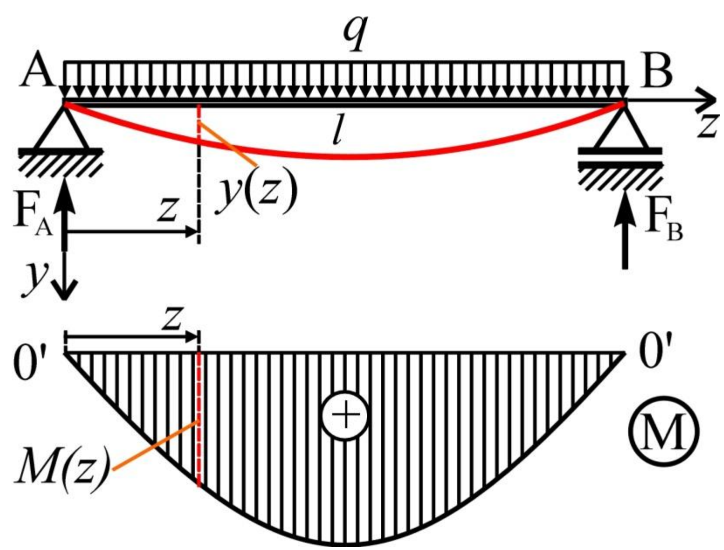
U slučajevima koje ćemo proučavati važiće da je $EI_x=const.$, $M=M(z)\Rightarrow$ $y''=y''(z)$.

Elastična linija za prostu gredu opterećenu ravnomernim kontinualnim opterećenjem:

$$y''=-\frac{M(z)}{EI_x},\ y''=\frac{dy'}{dz},\ M(z)=\frac{ql}{2}z-\frac{q}{2}z^2\Rightarrow$$

$$dy'=-\frac{1}{EI_x}\left(\frac{ql}{2}z-\frac{q}{2}z^2\right)dz\Rightarrow$$

$$y'=-\frac{1}{EI_x}\int\left(\frac{ql}{2}z-\frac{q}{2}z^2\right)dz+C_1\Rightarrow$$



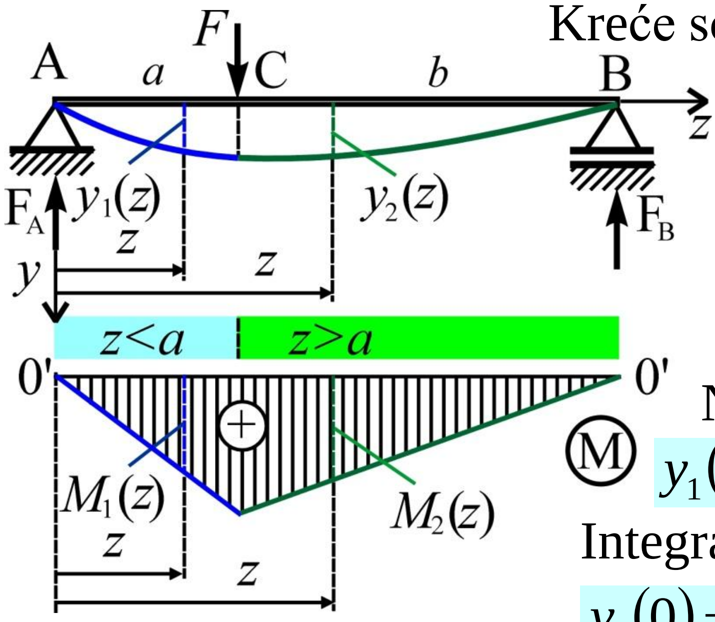
$$y' = -\frac{1}{EI_x}\left(\frac{ql}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{q}{2}\frac{z^3}{3}\right) + C_1,\ y' = \frac{dy}{dz} \Rightarrow dy = -\frac{1}{EI_x}\left(\frac{ql}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{q}{2}\frac{z^3}{3}\right)dz + C_1 dz \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{EI_x}\int\left(\frac{ql}{2}\frac{z^2}{2} - \frac{q}{2}\frac{z^3}{3}\right)dz + C_1\int dz + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{EI_x}\left(\frac{ql}{4}\frac{z^3}{3} - \frac{q}{6}\frac{z^4}{4}\right) + C_1 z + C_2$$

Određivanje integracionih konstanti:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,\ y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{ql^3}{24EI_x} \Rightarrow y = -\frac{1}{EI_x}\left(\frac{ql}{4}\frac{z^3}{3} - \frac{q}{6}\frac{z^4}{4}\right) + \frac{ql^3}{24EI_x}z$$

Princip dobijanja elastične linije kada postoje dve funkcije momenta savijanja:



Kreće se od dve diferencijalne jednačine elastične linije.

Prva $y_1'' = -\frac{M_1(z)}{EI_x}$, odnosi se na interval $0 < z < a$.

Druga $y_2'' = -\frac{M_2(z)}{EI_x}$, odnosi se na interval $a < z < a+b$.

Nakon njihovih integracija po dva puta dobija se:

$$y_1(z) = f_1(z) + C_1 \cdot z + C_2,\ y_2(z) = f_2(z) + C_3 \cdot z + C_4.$$

Integracione konstante C_1, C_2, C_3 i C_4 određuju uslovi:

$$y_1(0) = 0,\ \ y_1(a) = y_2(a),\ \ y_1'(a) = y_2'(a),\ \ y_2(a+b) = 0.$$

Konačni oblik jednačine elastične u tablicama je dat u obliku: $y = y_1(z)\| + g(z)$,
sa značenjem $y = y_1(z)$ za $0 \leq z \leq a$ i $y = y_1(z) + g(z) = y_2(z)$ za $a \leq z \leq a + b$.