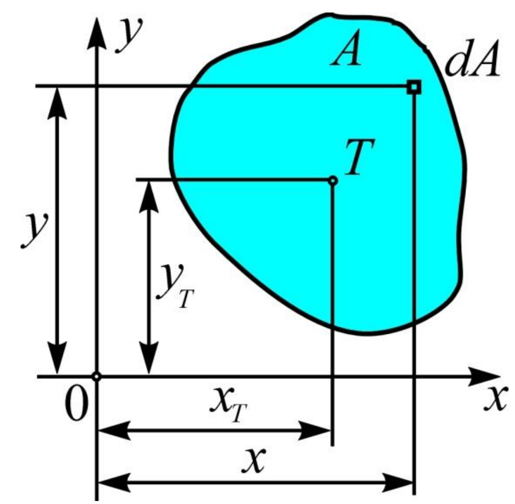
Definicije i osobine statičkog momenta površine poprečnog preseka za proizvoljnu osu. ***Definicija***



$S_x = \int_{(A)} y\,dA$ - statički moment površine A za osu x

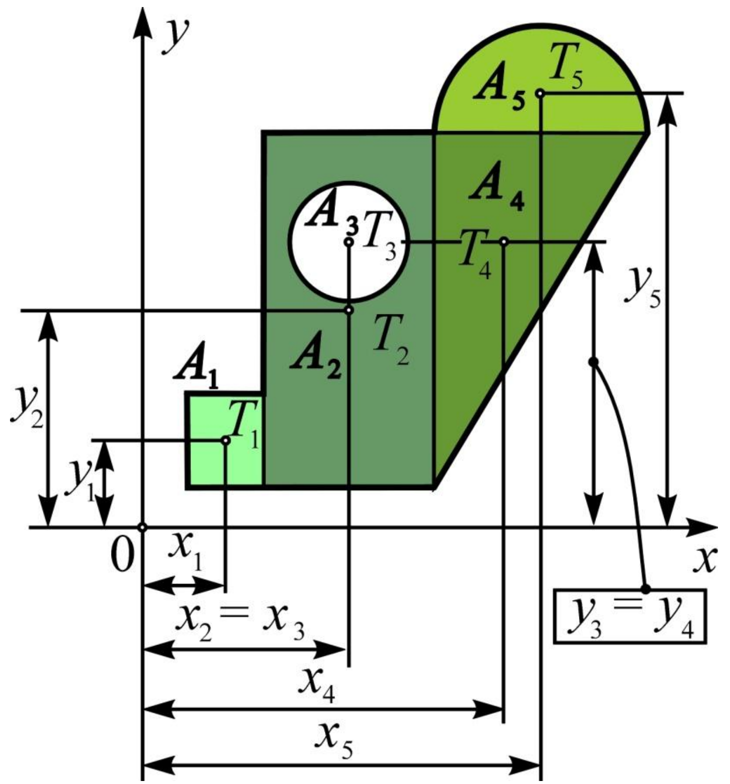
$S_y = \int_{(A)} x\,dA$ - statički moment površine A za osu y

Zbog $y_T = \dfrac{\int_{(A)} y\,dA}{A} = \dfrac{S_x}{A}$ i $x_T = \dfrac{\int_{(A)} x\,dA}{A} = \dfrac{S_y}{A}$,

imamo da je $S_x = A \cdot y_T$ i $S_y = A \cdot x_T$.

Ovo takođe znači da je statički moment površine za težišnu osu jednak je nuli.

Statički moment površine složenog preseka



$$S_x = \int_{(A_1)} y\,dA + \int_{(A_2)} y\,dA - \int_{(A_3)} y\,dA + \int_{(A_4)} y\,dA + \int_{(A_5)} y\,dA,$$

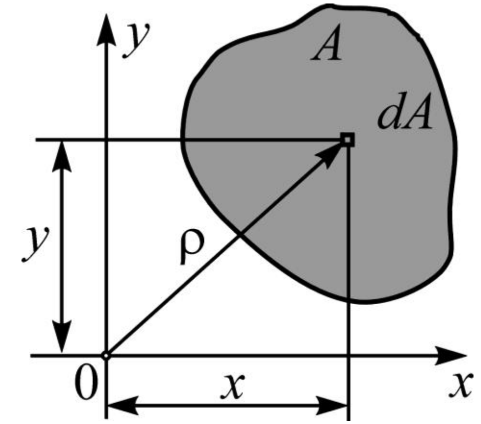
$$S_y = \int_{(A_1)} x\,dA + \int_{(A_2)} x\,dA - \int_{(A_3)} x\,dA + \int_{(A_4)} x\,dA + \int_{(A_5)} x\,dA,$$

$$S_x = \sum S_{xi} = A_1 y_1 + A_2 y_2 - A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5,$$

$$S_y = \sum S_{yi} = A_1 x_1 + A_2 x_2 - A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5.$$

U prethodnim izrazima x_i i y_i su x i y koordinate težišta elementarnih površina, A_i su njihove površine a sume su algebarske. Predznak ispred člana koji sadrži A_3 je negativan pošto se ta površina oduzima.

Definicije i osobine momenata inercije površine poprečnog preseka.



$I_x = \int_{(A)} y^2 \, dA$ - Aksijalni moment inercije površine A za osu x

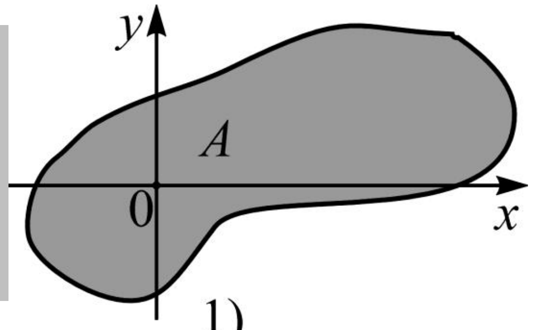
$I_y = \int_{(A)} x^2 \, dA$ - Aksijalni moment inercije površine A za osu y

$I_{xy} = \int_{(A)} xy \, dA$ - Centrifugalni moment inercije površine A za ose x i y

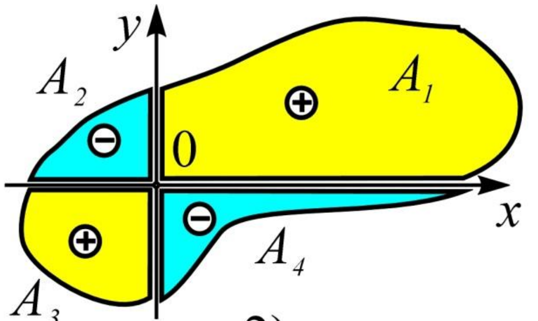
$I_0 = \int_{(A)} \rho^2 \, dA$ - Polarni moment inercije površine A za koordinatni početak 0

Zbog kvadrata i integralu aksijalni i polarni momenti inercije ne mogu biti negativni ali nasuprot tome centrifugalni može biti i negativan i pozitivan i jednak nuli.

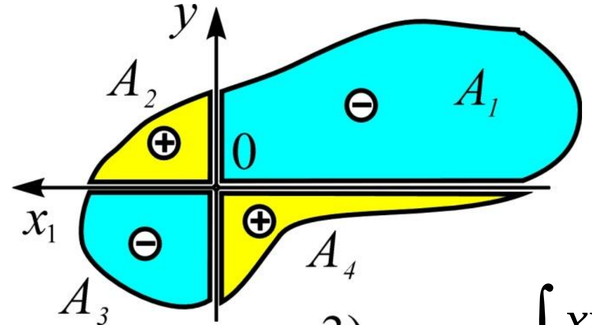
Proanalizirajmo da li je centrifugalni moment inercije površine A za ose x i y prikazane na slici 1 pozitivan ili negativan? Kako se menja centrifugalni moment inercije ako se promeni smer samo jedne ose, a kako obe?



1)



2)



3)

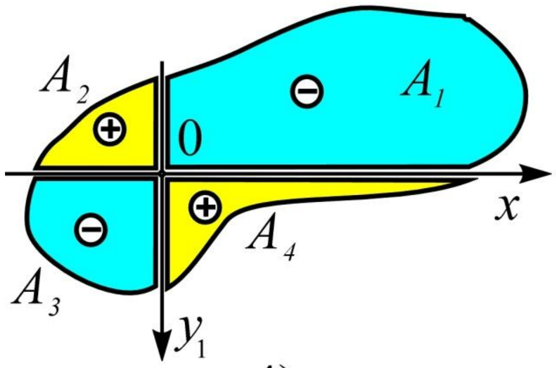
Ukupnu površinu A podelimo na A_1, A_2, A_3 i A_4 pa je:

$$\int_{(A)} xydA = \int_{(A_1)} xydA + \int_{(A_2)} xydA +$$

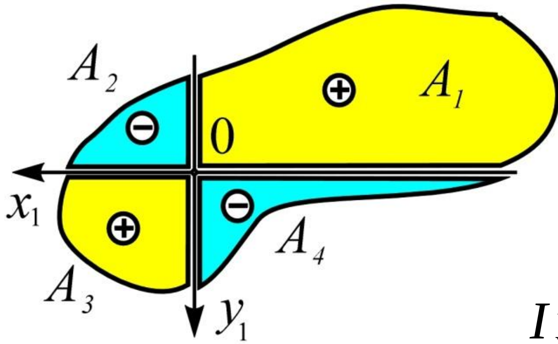
$$+\int_{(A_3)} xydA + \int_{(A_4)} xydA \Rightarrow$$

$$I_{xy}^{A} = I_{xy}^{A_1} + I_{xy}^{A_2} + I_{xy}^{A_3} + I_{xy}^{A_4}$$

$$I_{xy}^{A} = \left(I_{xy}^{A_1} + I_{xy}^{A_4}\right) + \left(I_{xy}^{A_3} + I_{xy}^{A_2}\right)$$



4)



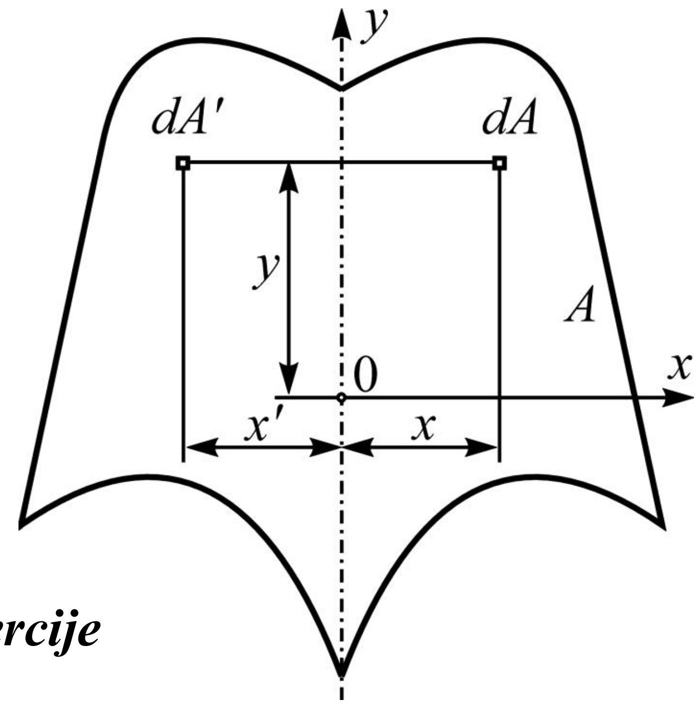
5)

U zadatom slučaju (Sl.2) centrifugalni momenti površina A_1 i A_3 moraju biti pozitivni pošto je za svaku tačku tih površina proizvod xy pozitivan. Slično tome centrifugalni momenti površina A_2 i A_4 moraju biti negativni pošto je za svaku tačku tih površina proizvod xy negativan. Zbog veličine i položaja tih površina jasno je $I_{xy}^{A_1} > I_{xy}^{A_4}$, $I_{xy}^{A_3} > I_{xy}^{A_2}$, zbog čega je $I_{xy}^{A} > 0$.

Ukoliko se promeni smer samo jedne od osa (Sl.3 i 4) centrifugalni moment inercije samo menja predznak $I_{x_1y}^{A} = I_{xy_1}^{A} = -I_{xy}^{A}$. Za x_1 i y_1 (Sl.5) $\Rightarrow I_{x_1y_1}^{A} = I_{xy}^{A}$.

Centrifugalni moment inercije za ose od kojih je bar jedna osa simetrije mora biti jednak nuli. Na prikazanoj slici, svakoj elementarnoj površini *dA* desno od ose y odgovara ista takva, kao slika u ogledalu, *dA'* levo od nje (x' = - x). Zbirni cenrtifugalni moment inercije ove dve elementarne površine mora biti jednak nuli jer je

$$I_{xy}^{dA} + I_{xy}^{dA'} = xydA + (-x)ydA = 0.$$

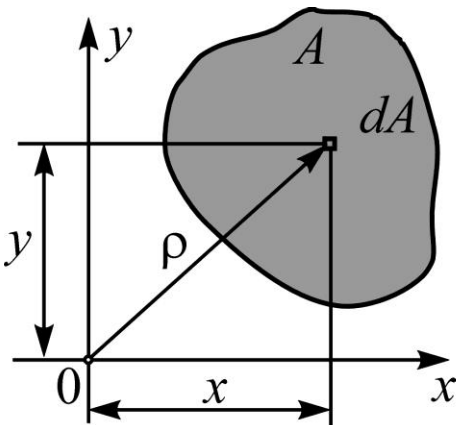


Veza između aksijalnih i polarnog momenta inercije

Pošto za svaku tačku površine A važi $\rho^2 = x^2 + y^2$ polarni moment inercije je

$$I_0 = \int_{(A)} \rho^2 \, dA = \int_{(A)} \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_{(A)} y^2 \, dA + \int_{(A)} x^2 \, dA \Rightarrow$$

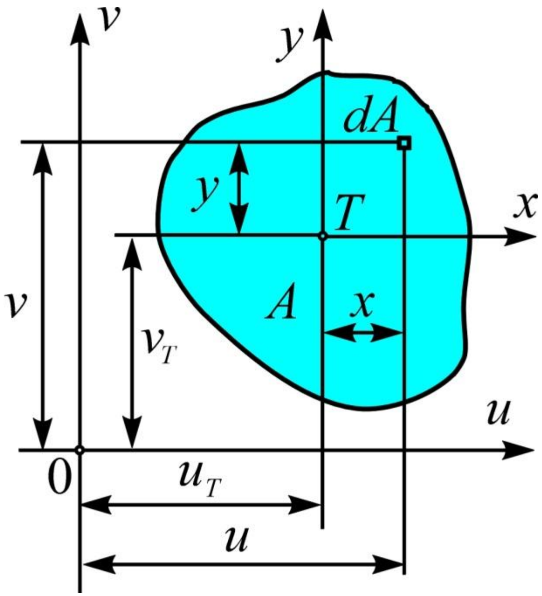
$I_0 = I_x + I_y,$ jer je $I_x = \int_{(A)} y^2 \, dA, \quad I_y = \int_{(A)} x^2 \, dA.$



Polarni moment inercije u odnosu na tačku 0 jednak je zbiru aksijalnih momenata inercije za dve međusobno upravne ose koje prolaze kroz tačku 0.

Veza između momenata inercije za dva paralelna koordinatna sistema.

Ovde se podrazumeva da se radi o vezi između momenata inercije za težišne i njima paralelne ose. Ovde su težišne ose (ose koje prolaze kroz težište T) x i y a njima paralelne ose su u i v. Rastojanje između osa x i u je vT a između osa y i v je uT. Svaka elementarna površina dA ima svoje vrednosti svih koordinata (x, y, u i v). Veze između tih koordinata su:



$$u = u_T + x,\quad v = v_T + y \quad \Rightarrow$$

$$v^2 = (v_T + y)^2 = y^2 + {v_T}^2 + 2v_T y,\qquad u^2 = (u_T + x)^2 = x^2 + {u_T}^2 + 2u_T x,$$

$$uv = (u_T + x)(v_T + y) = xy + u_T v_T + u_T y + v_T x.$$

ŠTAJNEROVA TEOREMA

$$I_u = \int_{(A)} v^2\, dA = \int_{(A)} y^2 dA + {v_T}^2 \int_{(A)} dA + 2v_T \int_{(A)} y dA \Rightarrow I_u = I_x + {v_T}^2 A$$

$$I_v = \int_{(A)} u^2\, dA = \int_{(A)} x^2 dA + {u_T}^2 \int_{(A)} dA + 2u_T \int_{(A)} x dA \Rightarrow I_v = I_y + {u_T}^2 A$$

$$I_{uv} = \int_{(A)} uv\, dA = \int_{(A)} xy dA + u_T v_T \int_{(A)} dA + u_T \int_{(A)} y dA + v_T \int_{(A)} x dA \Rightarrow I_{uv} = I_{xy} + u_T v_T A$$

U prethodnom izvođenju članovi koji sadrže $\int\limits_{(A)} y dA$ i $\int\limits_{(A)} x dA$ jednaki su nula jer su to statički momenti površine za težišne ose.

Članove Štajnerove teoreme $I_u = I_x + v_T^{\,2} A$ nazivamo:

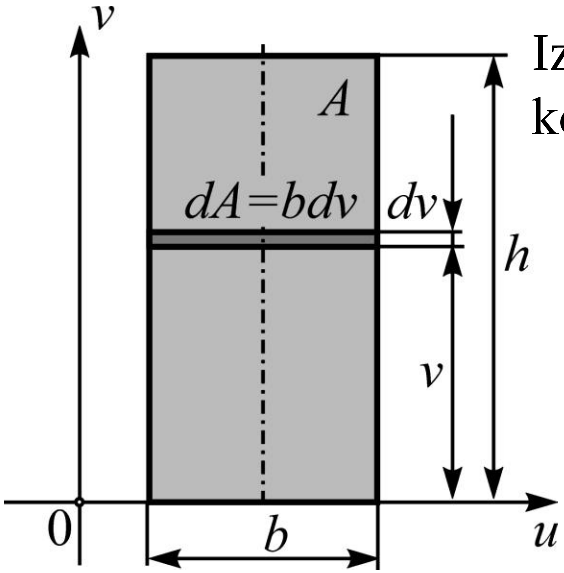
I_x -Moment inercije za težišnu osu (sopstveni moment inercije),

I_u -Moment inercije za osu, paralelnu težišnoj,

$v_T^{\,2} A$ -Proizvod kvadrata rastojanja osa i površine (položajni moment inercije).

Rečima iskazana Štajnerova teorema: Moment inercije za osu, paralelnu težišnoj, jednak je zbiru sopstvenog i položajnog momenta inercije.

Aksijalni momenti inercije za pravougaoni poprečni presek.

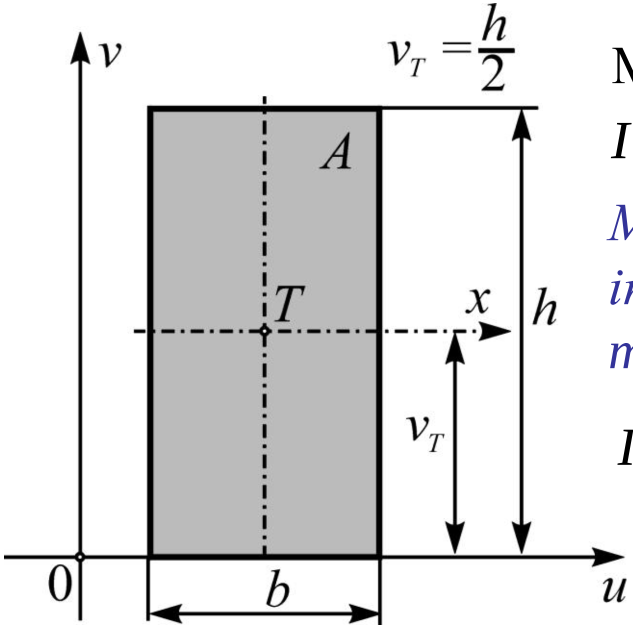


Izvedimo prvo po definiciji moment inercije za osu *u* na kojoj leži stranica dužine *b*:

$$I_u = \int\limits_{(A)} v^2 dA, \quad dA = b \cdot dv \quad \Rightarrow \quad I_u = b\int\limits_0^h v^2 dv \quad \Rightarrow$$

$$I_u = \frac{bh^3}{3}$$

Odredimo sada moment inercije pravougaonika za težišnu osu, koja je paralelna sa osom *u*, korišće-njem Štajnerove teoreme.



Može se takođe reći da prema Štajnerovoj teoremi

$$I_u = I_x + v_T^{\,2} A \quad \Rightarrow \quad I_x = I_u - v_T^{\,2} A,$$

Moment inercije težišnu za osu, jednak je momentu inercije za njoj paralelnu osu umanjen za položajni moment inercije.

$$I_x = I_u - v_T^{\,2} \cdot A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Izračunavanje momenata inercije za složeni presek.

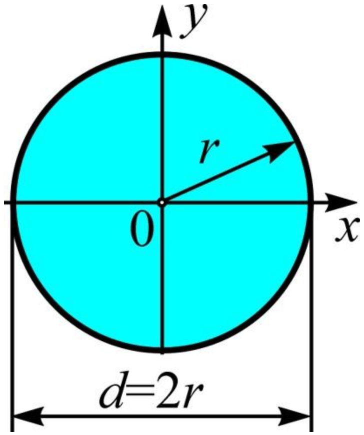
Moment inercije složene površine za neku osu (neke ose, ako se radi o centrifugalnom) jednak je algebarskom zbiru momenata inercije elementarnih površina za istu osu (iste ose). Na primer, složena površina je sačinjena od 4 elementarne (A_1, A_2, A_3 i A_4), tako da se ukupna složena površina A računa po formuli

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 - A_4.$$

Za momente inercije složene površine važili bi izrazi:

$$I_x^A = \sum I_x^{A_i} = I_x^{A_1} + I_x^{A_2} + I_x^{A_3} - I_x^{A_4}, \quad I_y^A = \sum I_y^{A_i} = I_y^{A_1} + I_y^{A_2} + I_y^{A_3} - I_y^{A_4},$$

$$I_{xy}^A = \sum I_{xy}^{A_i} = I_{xy}^{A_1} + I_{xy}^{A_2} + I_{xy}^{A_3} - I_{xy}^{A_4}.$$



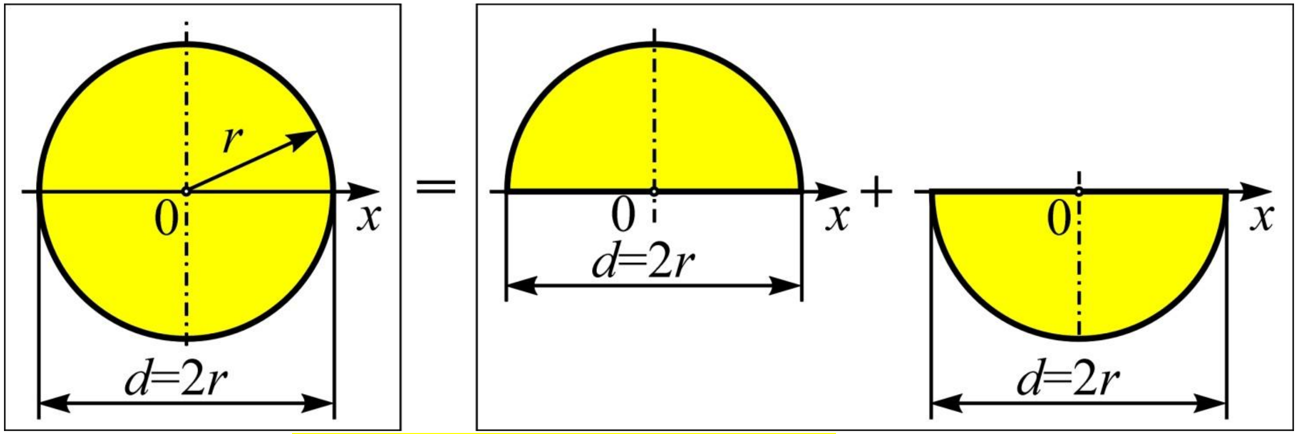
Aksijalni momenti inercije za kružni i polukružni presek.

momenti inercije za kružni presek

$$I_x = I_y,\ \ I_0 = I_x + I_y \ \Rightarrow\ 2I_x = I_0 \ \Rightarrow\ I_x = \frac{I_0}{2} = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{r^4\pi}{4}.$$

momenti inercije za polukružni presek

Gornja polovina kružnog preseka je A_1 a donja A_2. Ukupan kružni presek A je zbir ova dva:

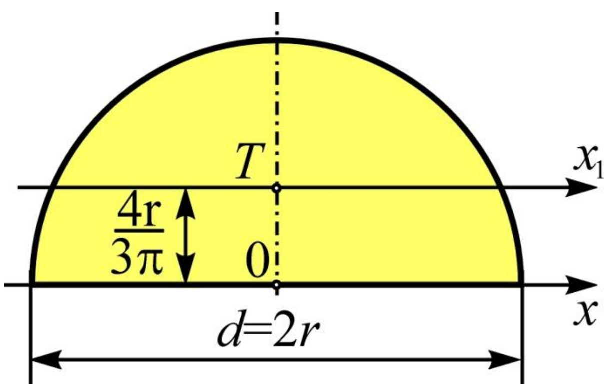


$$I_x^A = I_x^{A_1} + I_x^{A_2} = 2I_x^{A_1} \Rightarrow I_x^{A_1} = \frac{I_x^A}{2} \ \Rightarrow\ I_x^{A_1} = I_x = \frac{d^4\pi}{128} = \frac{r^4\pi}{8}.$$

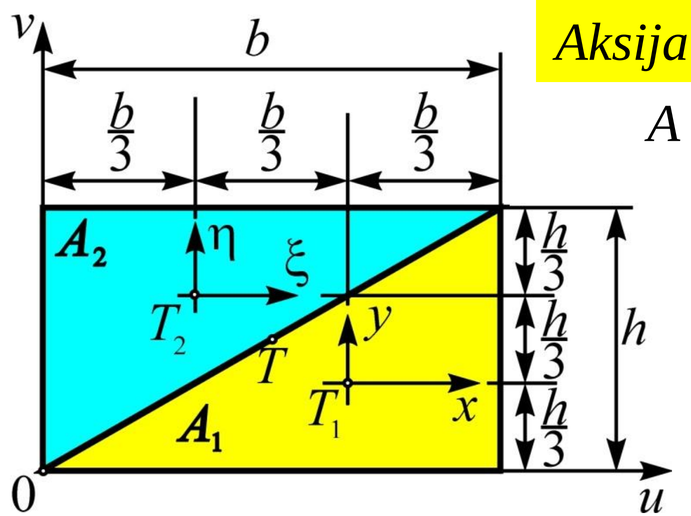
Sopstveni moment inercije polukružnog preseka

$$I_{x_1} = I_x - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 A = \frac{r^4\pi}{8} - \frac{16r^2}{9\pi^2}\frac{r^2\pi}{2} \ \Rightarrow$$

$$I_{x_1} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4.$$



Aksijalni i centrifugalni momenti inercije za trougaoni presek.



Aksijalni momenti inercije za težišnu osu

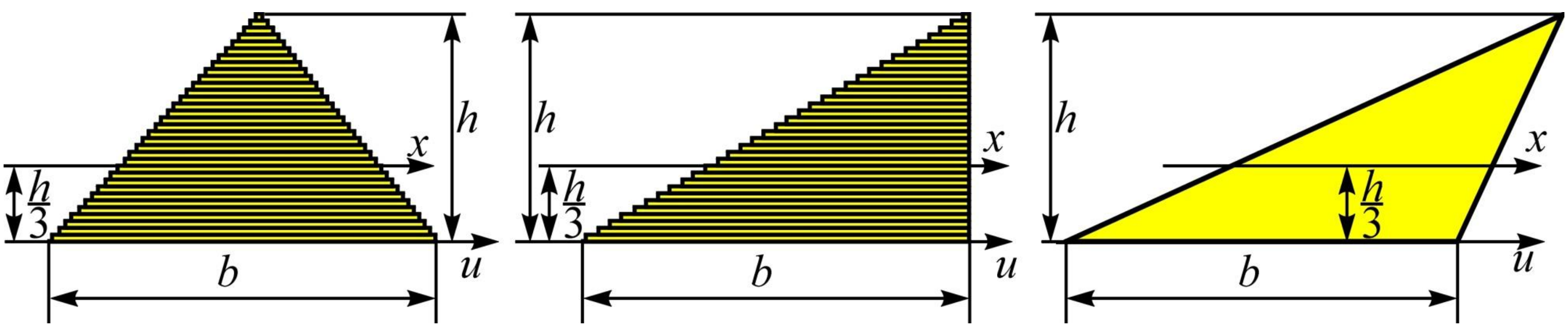
$$A = A_1 + A_2 = bh, \quad A_2 = A_1 = \frac{bh}{2}, \quad I_\xi^{A_2} = I_x^{A_1} = I_x,$$

$$I_u^{A} = \frac{bh^3}{3}, \quad I_u^{A_1} = I_x^{A_1} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 A_1 = I_x^{A_1} + \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2},$$

$$I_u^{A_2} = I_\xi^{A_2} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 A_2 = I_x^{A_1} + \frac{4h^2}{9}\frac{bh}{2}.$$

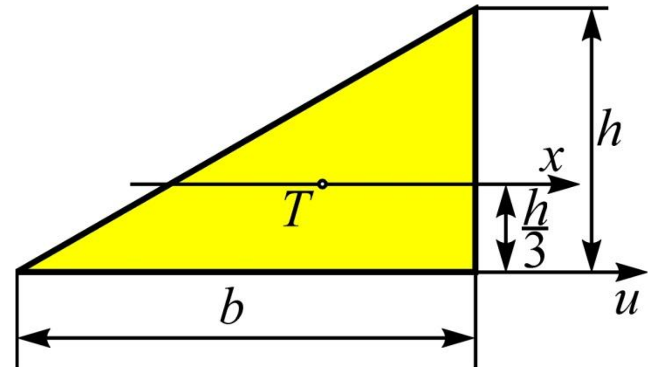
$$I_u^{A} = I_u^{A_1} + I_u^{A_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{bh^3}{3} = 2I_x + \frac{5bh^3}{18} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_x = \frac{bh^3}{36}.}$$

Izvedena formula važi za ma koji oblik trougla istih dimenzija *b* i *h* jer se radi o jednakim vrednostima elementarnih površina na jednakim rastojanjima od ose



Aksijalni momenti inercije za osu u

$$I_u = I_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 A_1 = \frac{bh^3}{36} + \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2} \Rightarrow \quad \boxed{I_u = \frac{bh^3}{12}.}$$



Centrifugalni moment inercije

$$A = A_1 + A_2 = bh,\ A_2 = A_1 = \frac{bh}{2},\ I_{\xi\eta}^{A_2} = I_{xy}^{A_1} = I_{xy},$$

$$I_{uv}^{A} = 0 + \frac{b}{2}\frac{h}{2}A = \frac{b^2h^2}{4},$$

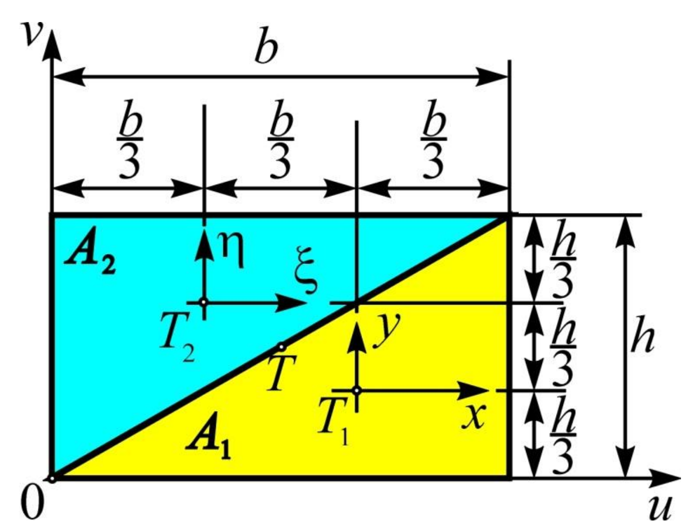
“0” je centrifugakni moment inercije pravougaonika za težišne ose zato što su one ose simetrije

$$I_{uv}^{A_1} = I_{xy}^{A_1} + \frac{2b}{3}\frac{h}{3}A_1 = I_{xy} + \frac{b^2h^2}{9},$$

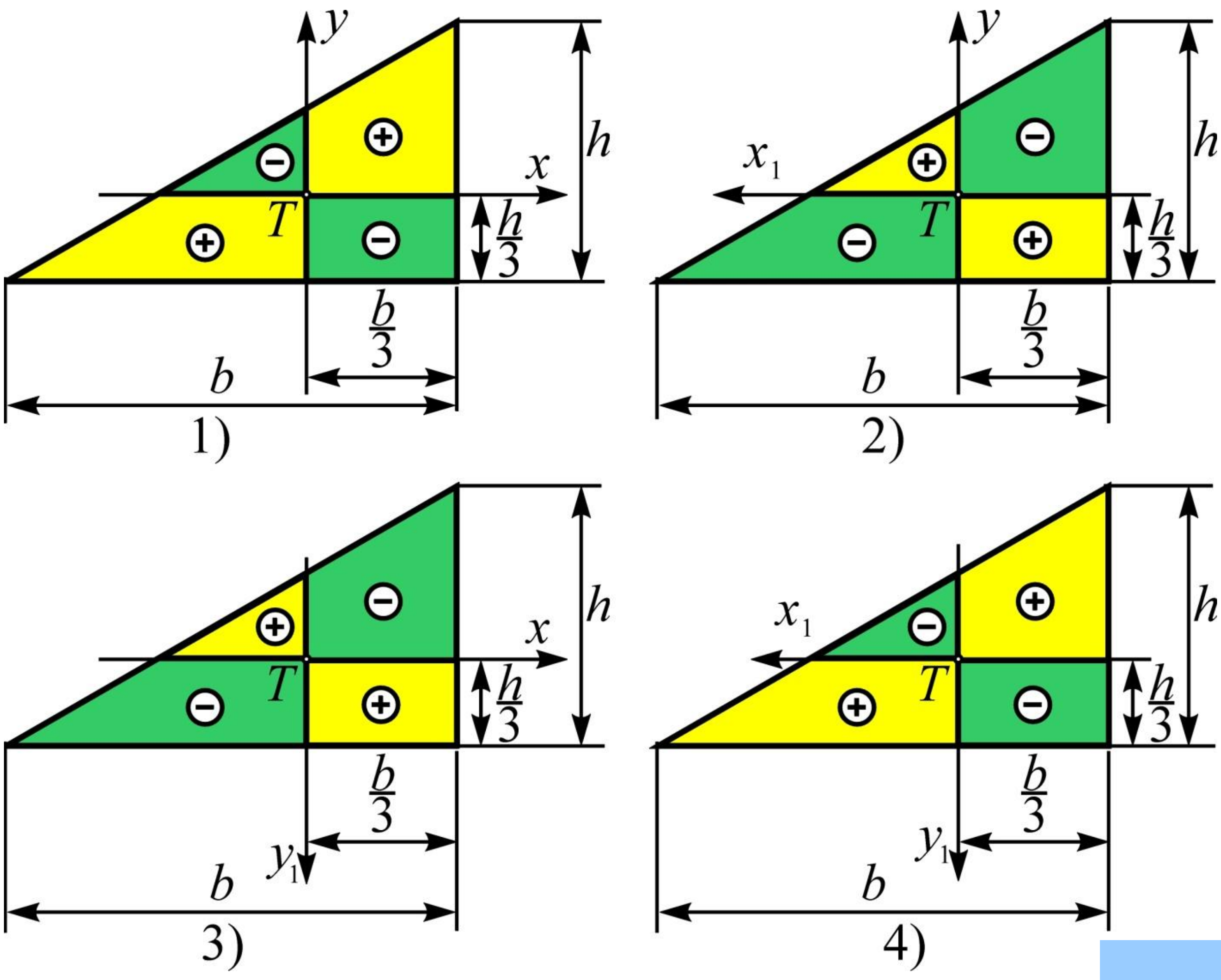
$$I_{u}^{A_2} = I_{\xi\eta}^{A_2} + \frac{b}{3}\frac{2h}{3}A_2 = I_{xy} + \frac{b^2h^2}{9}.$$

$$I_{uv}^{A} = I_{uv}^{A_1} + I_{uv}^{A_2} \Rightarrow \frac{b^2h^2}{4} = 2I_{xy} + 2\frac{b^2h^2}{9} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}.}$$



Centrifugalni momenti inercije menja samo predznak pri promeni smera jedne od osa:



Sl.1

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}.$$

Sl.2

$$I_{x_1 y} = -I_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

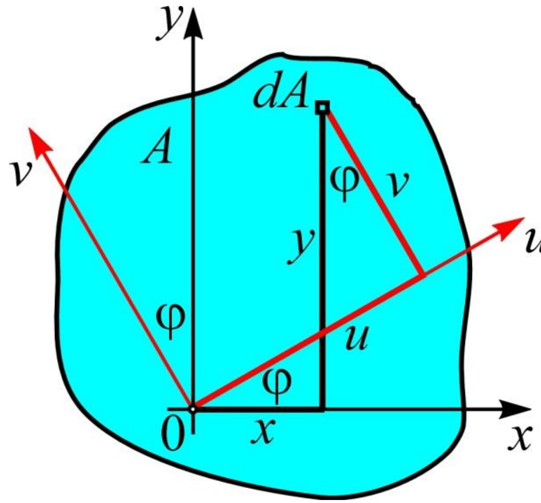
Sl.3

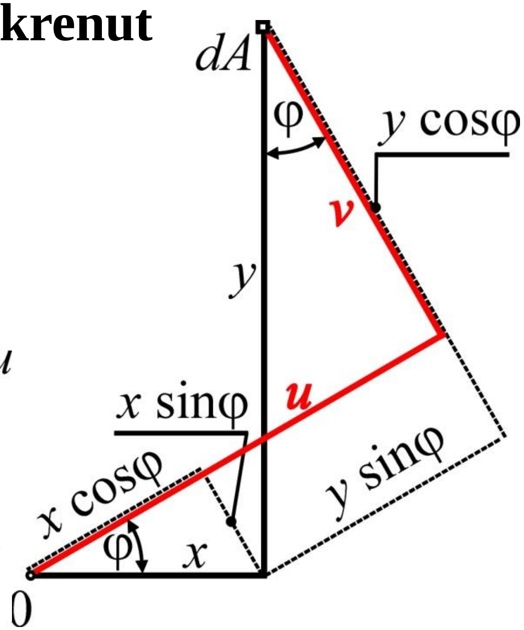
$$I_{x y_1} = -I_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Sl.4

$$I_{x_1 y_1} = -\left(-I_{xy}\right) = I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{72}.$$

Momenti inercije za zakrenut koordinatni sistem.





Koordinate elementarne površine *dA*, u zakrenutom *uv* kordinatnom sistemu, izražene preko ugla zakretanja φ i njenih *x* i *y* koordinata su:

$$u = y\sin\varphi + x\cos\varphi,$$
$$v = y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$

Na osnovu dobijenih veza dobijamo pomoćne izraze:

$$u^2 = (y\sin\varphi + x\cos\varphi)^2 = y^2\sin^2\varphi + x^2\cos^2\varphi + xy2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$v^2 = (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2 = y^2\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi - xy2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$uv = (y\sin\varphi + x\cos\varphi)(y\cos\varphi - x\sin\varphi) = (y^2 - x^2)\sin\varphi\cos\varphi + xy(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Na osnovu definicija i osnovnih matematičkih identiteta dobijamo:

$$I_v = \int_{(A)} u^2 dA = \sin^2\varphi \int_{(A)} y^2 dA + \cos^2\varphi \int_{(A)} x^2 dA + \sin 2\varphi \int_{(A)} xy dA \quad \Rightarrow$$

$$I_v = I_x \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi,$$

$$I_u = \int_{(A)} v^2 dA = \cos^2 \varphi \int_{(A)} y^2 dA + \sin^2 \varphi \int_{(A)} x^2 dA - \sin 2\varphi \int_{(A)} xy dA \quad \Rightarrow$$

$$I_u = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$I_{uv} = \int_{(A)} uv dA = \frac{\sin 2\varphi}{2} \int_{(A)} \left(y^2 - x^2\right) dA + \cos 2\varphi \int_{(A)} xy dA \quad \Rightarrow$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi.$$