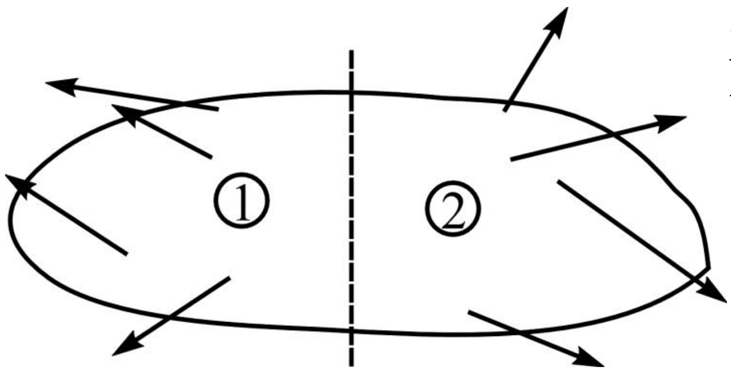
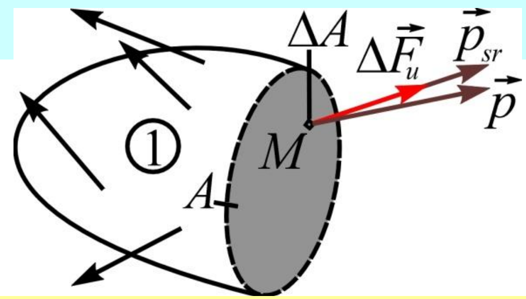
10.Totalni napon u tački preseka. Normalni i tangencijalni napon.



Zamislimo da je opterećeno elastično telo nekom proizvoljnom ravni presečeno na dva dela.

Odbačeni desni deo tela 2, na posmatrani levi 1, na svakoj elementarnoj površini preseka ΔA, dejstvuje elementarnom unutrašnjom silom $\Delta\vec{F}_u$.

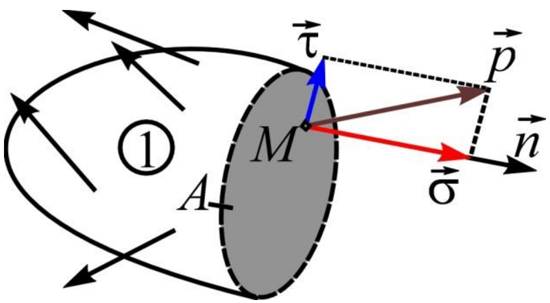


Srednji napon na toj elementarnoj površini je količnik $\Delta\vec{F}_u$ i ΔA:

$$\vec{p}_{sr} = \frac{\Delta\vec{F}_u}{\Delta A}.$$

Kada elementarna površina teži nuli srednji napon teži totalnom naponu $\vec{p}$ u tački M preseka:

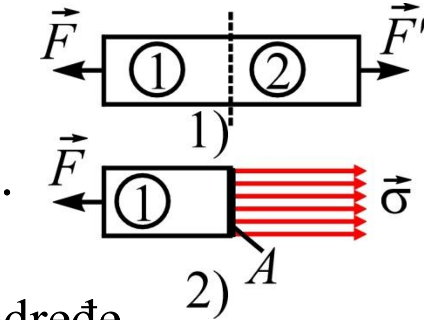
$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \vec{p}_{sr} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}_u}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_u}{dA}.$$



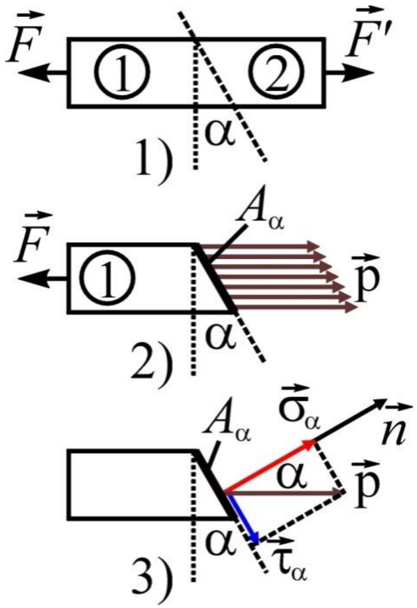
Komponenta totalnog napona u pravcu normale na presek $\vec{n}$ predstavlja normalni napon $\vec{\sigma}$, dok komponenta koja leži u ravni preseka predstavlja tangencijalni napon $\vec{\tau}$.

Kroz svaku tačku može se povući beskonačno mnogo ravni. Za svaku ravan totalni napon, a time i normalni i tangencijalni, imaće drugačije vrednosti. Skup napona za sve preseke koji prolaze kroz tačku karakteriše stanje napona u tački.

11.Naponi u kosom preseku aksijalno opterećenog štapa. Morov krug napona za ovaj slučaj.



Presecanjem zategnutog štapa ravni koja je upravna na osu štapa, površina poprečnog preseka je A a napon je $\sigma = \dfrac{F}{A}$.



Presecanjem istog štapa kosom ravni, određenoj uglom α, površina poprečnog preseka je $A_\alpha = \dfrac{A}{\cos\alpha}$, a totalni napon (dobijen iz uslova ravnote):

$$\sum Z_i = -F + p \cdot A_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F\cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha.$$

Projekcije totalnog napona daju normalni i tangencijalni napon u kosom preseku u zavisnosti od ugla α:

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha = \frac{\sigma}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right) = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha,$$

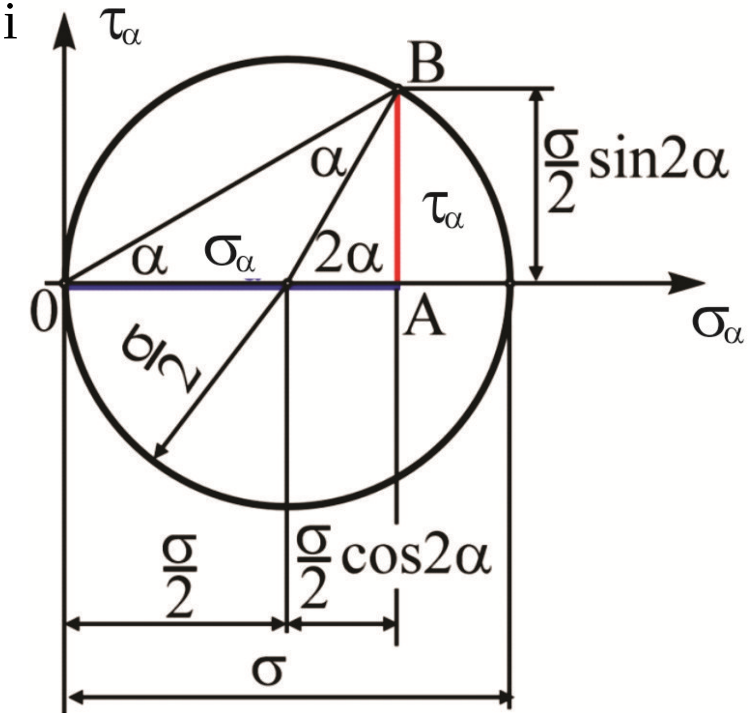
$$\tau_\alpha = p\sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha.$$

Dobijeni izrazi lako daju:

$\sigma_\alpha = \sigma,\ \tau_\alpha = 0$ za $\alpha = 0.$ $\sigma_\alpha = 0,\ \tau_\alpha = 0$ za $\alpha = \dfrac{\pi}{2}.$

$\tau_\alpha = \tau_{max}$ za $\sin 2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$

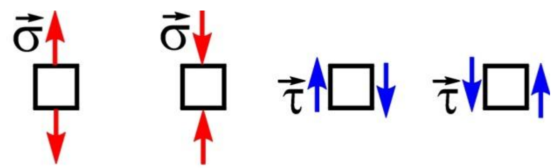
Eliminacijom ugla α iz dobijenih izraza $\sigma_\alpha(\alpha)$ i $\tau_\alpha(\alpha)$, dobiće se Morov krug napona u koordinatnom sistemu $\tau_\alpha\sigma_\alpha$:



$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\tau_\alpha)^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \underline{\left(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + (\tau_\alpha)^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2.$$



$\sigma>0$ $\sigma<0$ $\tau>0$ $\tau<0$

1) 2) 3) 4)

Kao što normalni naponi mogu biti, kako pozitivni (Sl.1), tako i negatvni (Sl.2), konvencija o predznaku tangencijalnih napona prikazana je na Sl.3 i Sl.4.

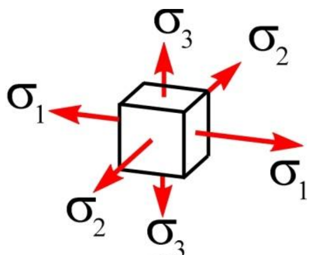
Odredimo sada vrednost tangencijalnog napona za ugao $\alpha+\pi/2$ na osnovu dobijenog izraza za $\tau_\alpha(\alpha)$:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma}{2}\sin(2\alpha+\pi) = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha = -\tau_\alpha.$$

12.Pojam o glavnim naponima

Površine u kojima tangencijalnih napona nema su glavne površine a normalni naponi koji dejstvuju u tim površinama su glavni naponi.

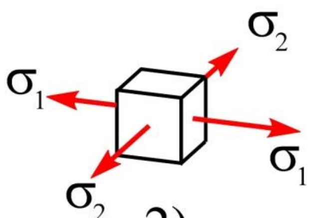
U teoriji elastičnosti se dokazuje da kroz svaku tačku napregnutog tela mogu da se postave tri međusobno upravne glavne površine. U jednoj od njih dejstvovaće maksimalni glavni napon σ_1, u drugoj σ_2, a u trećoj minimalni glavni napon σ_3.



1)

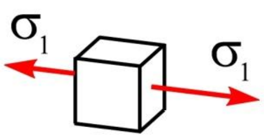
U zavisnosti od toga da li se u tački napregnutog tela pojavljuje jedan, dva ili sva tri glavna napona razlikujemo tri vrste naponskog stanja tela:

-prostorno stanje napona (Sl.1), gde je $\sigma_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3.$



2)

-ravno stanje napona (Sl.2), gde je $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 = 0.$

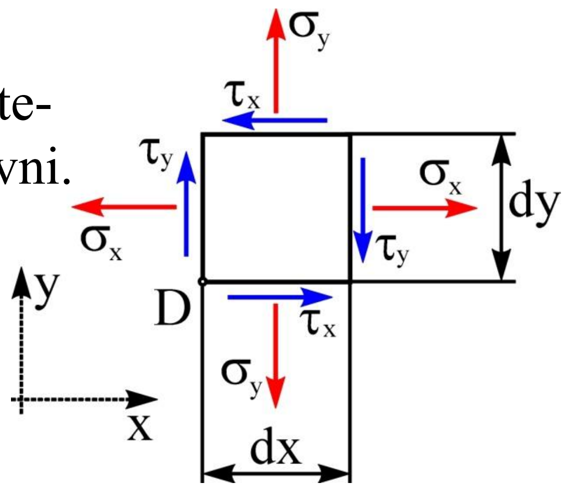


3)

-linearno stanje napona (Sl.3), gde je $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = 0.$

13.Ravno stanje napona.

U ravnom stanju napona se nalazi tanka ravna ploča opterećena po konturi opterećenjem koje koje leži u istoj ravni.



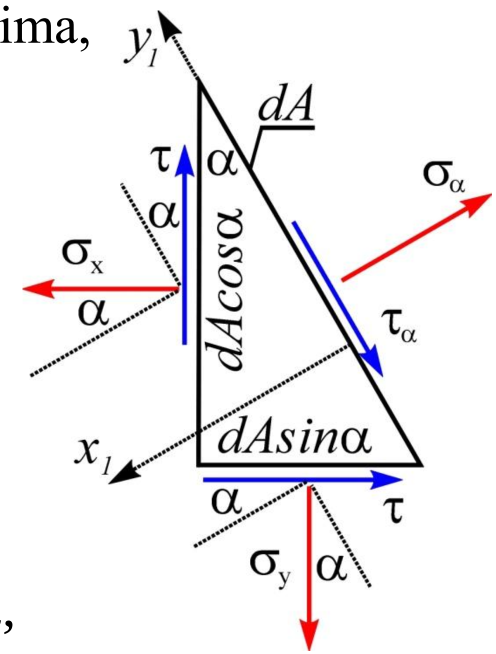
Teorema o uzajamnosti tangencijalnih napona.

Prikazani pravougaoni elementarni deo je debljine *b* i sile koje na njega dejstvuju dobijaju se množenjem napona i odgovarajućih površina.

Momentni uslov ravnože za prikazan elementarni deo daje:

$$\sum M_{Di}=0 \;\Rightarrow\; -\tau_y\cdot dy\cdot b\cdot dx+\tau_x\cdot dx\cdot b\cdot dy=0 \;\Rightarrow\; \tau_x=\tau_y \;\Rightarrow\; \tau_x=\tau_y=\tau.$$

Tangencijalni naponi u dvema, međusobno upravnim ravnima, imaju iste vrednosti ali suprotne smerove.



Naponi u proizvoljnoj tački za ravan određenu proizvoljnim uglom α ($\sigma_\alpha,\tau_\alpha$).

Uslovi ravnože za prikazan elementarni deo daju:

$$\sum X_{1i}=0 \;\Rightarrow\; -\sigma_\alpha\cdot dA+\sigma_x\cdot dA\cdot\cos^2\alpha+\sigma_y\cdot dA\cdot\sin^2\alpha-$$

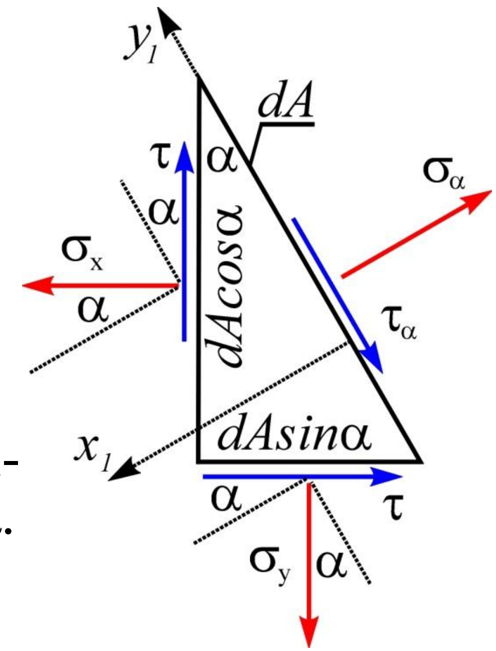
$$-\tau\cdot dA\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha-\tau\cdot dA\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_\alpha=\sigma_x\cdot\cos^2\alpha+\sigma_y\cdot\sin^2\alpha-\tau\cdot\sin 2\alpha,$$

$$\sum Y_{1i}=0 \Rightarrow -\tau_\alpha \cdot dA+\sigma_x \cdot dA\cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha -$$

$$-\sigma_y \cdot dA\cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau \cdot dA\cdot \cos^2\alpha - \tau \cdot dA\cdot \sin^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha$$



14.Glavni naponi pri ravnom stanju napona. Određivanje ravni u kojima se oni javljaju.

Glavne napone ćemo dobiti traženjem minimuma i maksimuma funkcije $\sigma_\alpha(\alpha)=\sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau \cdot \sin 2\alpha$.

Za tražena rešenja prvi izvod mora biti jednk nuli:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{1/2}} = \left.(\sigma_\alpha)'\right|_{\alpha=\alpha_{1/2}} = 0,$$

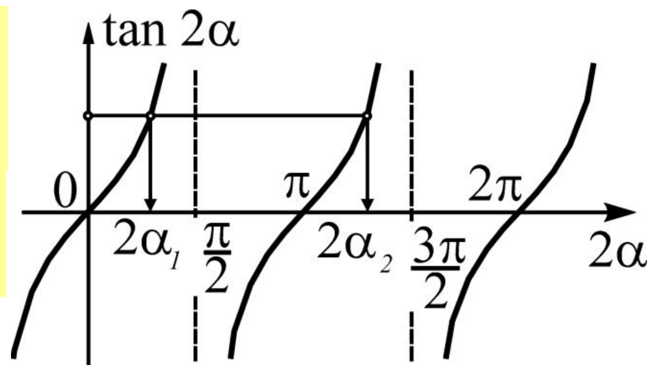
$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_\alpha)' = -\sigma_x \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sigma_y \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\tau \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_\alpha)' = -(\sigma_x - \sigma_y)\cdot \sin 2\alpha - 2\tau \cdot \cos 2\alpha$$

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{1/2}} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cdot \sin 2\alpha_{1/2} - 2\tau \cdot \cos 2\alpha_{1/2} = 0 \Rightarrow \tan 2\alpha_{1/2} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

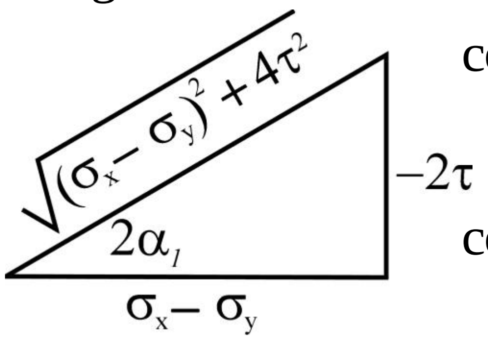
$$\tan 2\alpha_{1/2} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \; 2\alpha_1 = \arctan\left(-\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}\right),$$

$$\tan 2\alpha_2 = \tan 2\alpha_1 \Rightarrow 2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2},$$



Dobijeni izrazi definišu ravni u kojima se javljaju glavni naponi.

Za oadređivanje sinusa i kosinusa od $2\alpha_{1/2}$ iskoristimo i zamišljeni pravougli trougao sa slike:



$$\cos 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}, \quad \sin 2\alpha_1 = -\frac{2\tau}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}},$$

$$\cos 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}, \quad \sin 2\alpha_2 = \frac{2\tau}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}.$$

Za određivanje kvadrata sinusa i kosinusa preko kosinusa dvostrukog ugla isko-ristimo matematičke formule:

$$\sin^2\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\alpha_1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}\right),$$

$$\sin^2\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\alpha_2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau^2}}\right),$$

$$\cos^2\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha_1\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}}\right),$$

$$\cos^2\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha_2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}}\right).$$

Prvi glavni napon će se dobiti uvrštavanjem α_1 u izraz za $\sigma_\alpha(\alpha) : \sigma_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_1} = \sigma_1 \Rightarrow$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2}\left(1+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}}\right)+\frac{\sigma_y}{2}\left(1-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}}\right)+\frac{\tau\cdot 2\tau}{\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}}$$

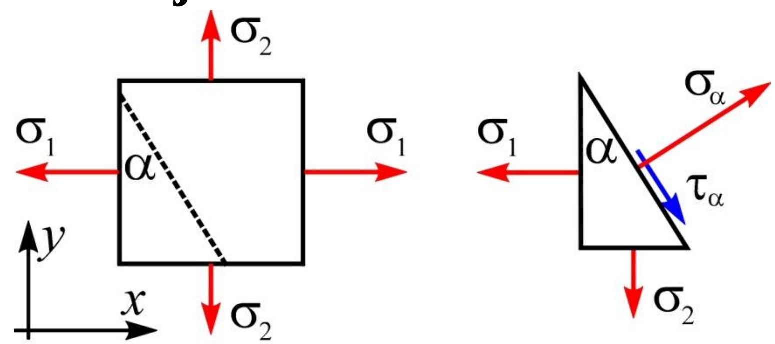
$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}{2\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}.$$

Istom procedurom, drugi glavni napon se dobija uveštavanjem α_2, u izraz $\sigma_\alpha(\alpha)$:

$$\sigma_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_2} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}{2\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}.$$

Dakle, glavne napone određuju formule: $\sigma_{1/2} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau^2}.$

15.Za ravnu ploču izloženu, po stranama, dejstvu glavnih napona, odrediti normalni i tangencijalni napon za ma koju ravan i nacrtati Morov krug napona.



1) 2)

Dobijene formule:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau \cdot \sin 2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha,$$

izvedene u opštem slučaju, za $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ i $\tau = 0$, daju:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \ldots(1) \quad \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

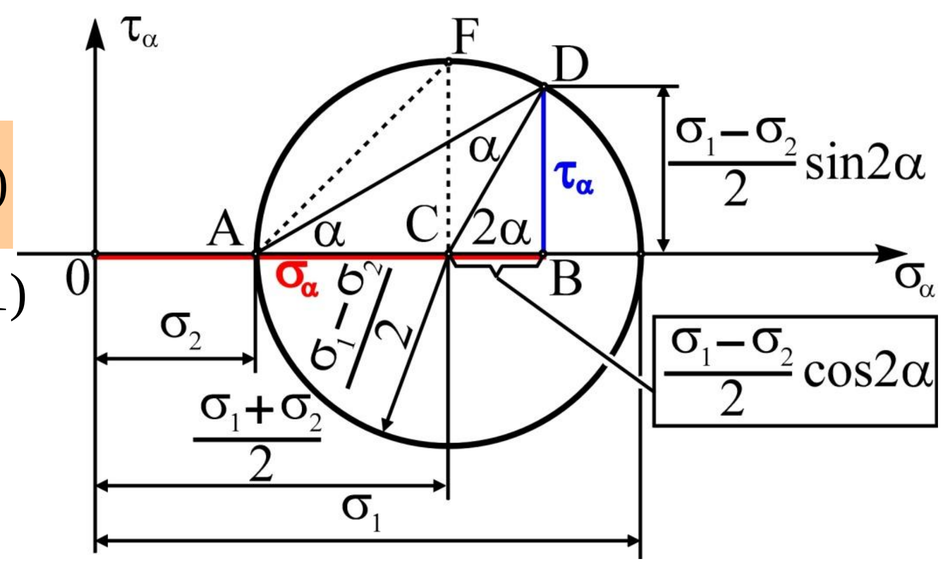
$$\Downarrow$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \ldots(2)$$

Kvadriranjem pa sabiranjem izraza (1) i (2), dobija se Morov krug napona:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$



16. Zapreminska dilatacija.

Zapremina elementarnog dela pre dejstva napona σ_x, σ_y i σ_z je $dV_0 = dx \cdot dy \cdot dz$, a nakon njihovog dejstva je $dV = (dx + \Delta dx)\cdot(dy + \Delta dy)\cdot(dz + \Delta dz)$.

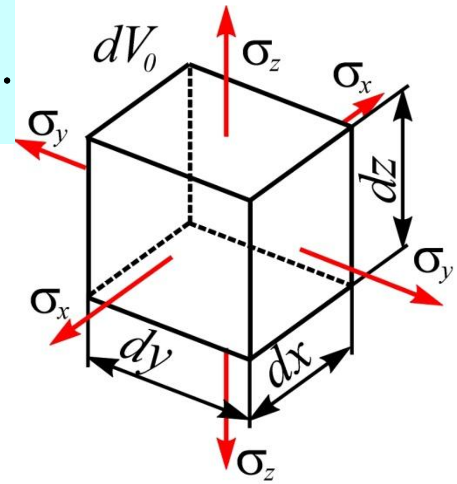
Zapreminska dilatacija: $\varepsilon_v = \dfrac{dV - dV_0}{dV_0}$.

$$\varepsilon_v = \frac{dV}{dV_0} - \frac{dV_0}{dV_0} \quad \Rightarrow$$

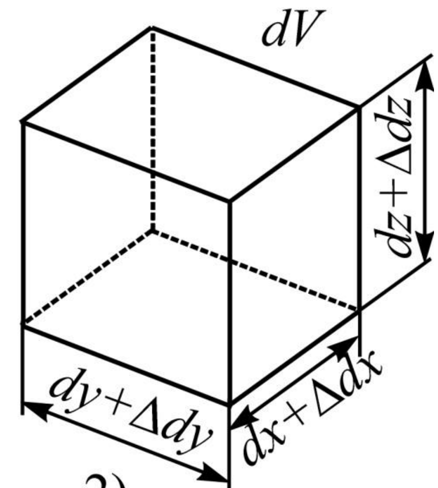
$$\varepsilon_v = \frac{dx + \Delta dx}{dx} \cdot \frac{dy + \Delta dy}{dy} \cdot \frac{dz + \Delta dz}{dz} - 1$$

$$\varepsilon_v = (1 + \varepsilon_x)\cdot(1 + \varepsilon_y)\cdot(1 + \varepsilon_z) - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z.$$



1)



2)

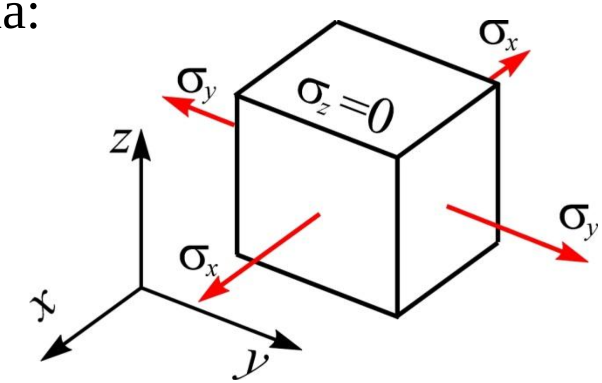
Zanemarujući male veličine drugog i viših redova dobijamo $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

17. Veza između normalnih napona i dilatacija pri ravnom stanju napona (σ_z=0).

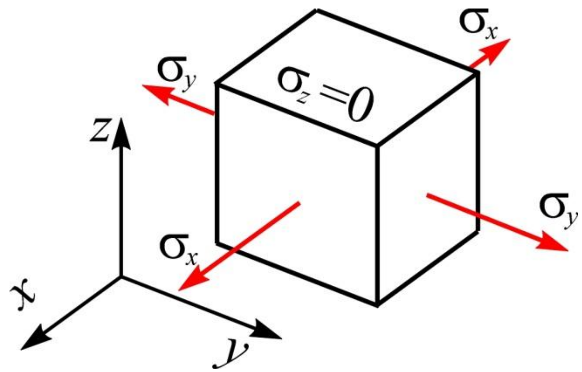
Odredimo prvo dilatacije u sva tri pravca preko napona:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right),$$



$$\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right).}$$



Rešavanjem prve dve jednačine po σ_x i σ_y dobiće se ti naponi preko dilatacija. Prvo ih svedemo na oblik:

$$\sigma_x - \mu\sigma_y = E\varepsilon_x \ldots (1)$$

$$\sigma_y - \mu\sigma_x = E\varepsilon_y \ldots (2)$$

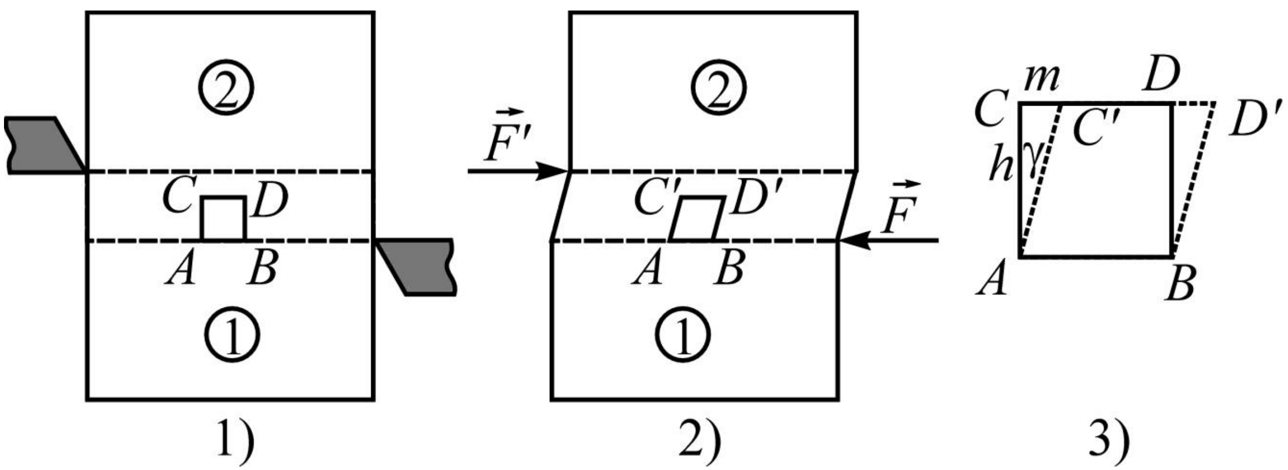
Zatim na način, niže naznačen, dobijamo tražene zavisnosti:

$$(1) + \mu \cdot (2) \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right),} \quad \mu \cdot (1) + (2) \Rightarrow \boxed{\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right).}$$

18.Deformacija i naponi pri čistom smicanju.

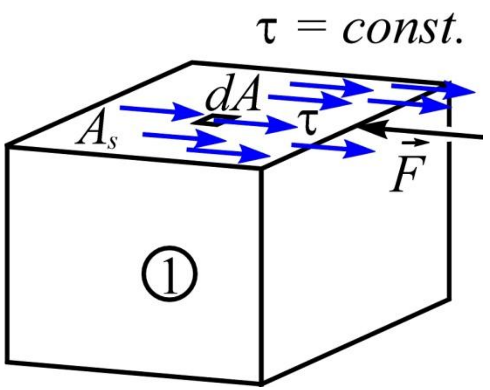
Deformacije pri smicanju: $\overline{CC'} = m$ je apsolutno klizanje. Relativno klizanje je $\frac{m}{h} = \tan\gamma \approx \gamma.$

γ - ugao klizanja.



Znak približno ($\approx$) stoji zbog toga što ugao γ [rad] obično ima malu vrednost.

Naponi pri smicanju (tangencijalni, pošto leže u smicajnoj površini) u svakoj tački smicajne površine imaju konstantnu vrednost. Jednačina ravnoteže, unutrašnjih sila usled tangencijalnih napona i prikazane sile $\vec{F}$ koja izaziva smicanje, daje:



$$\int_{(A_s)} \tau \, dA - F = 0 \;\Rightarrow\; \tau \int_{(A_s)} dA = F \;\Rightarrow\; \tau \cdot A_s = F \;\Rightarrow\; \tau = \frac{F}{A_s}$$

Intenzitet sile koja izaziva smicanje označavaćemo i sa F_s i nazivati smicajnom silom a smicajnu površinu ćemo označavati A_s.

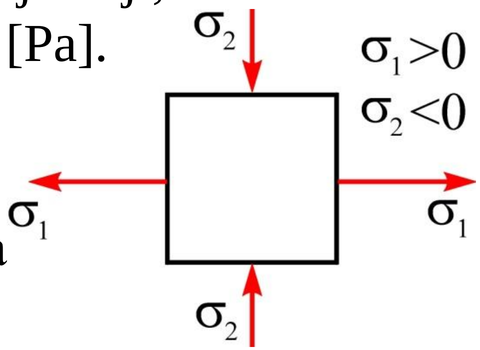
Hukov zakon (što je osnovni zakon Otpornosti materijala), koji govori o proporcionalnosti između napona i deformacija, kod tangencijalnih napona ima oblik

$\tau = G \cdot \gamma$,

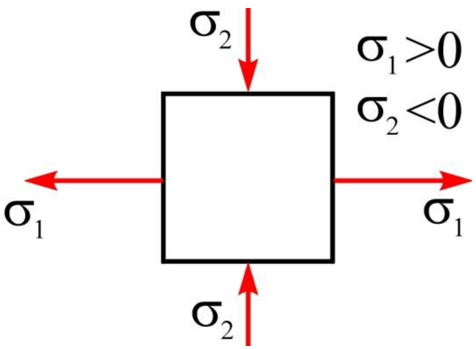
gde koeficijent proporcionalnosti G nosi naziv modul klizanja koji, kao i modul elastičnosti E, ima dimenziju napona [N/m^2] = [Pa].

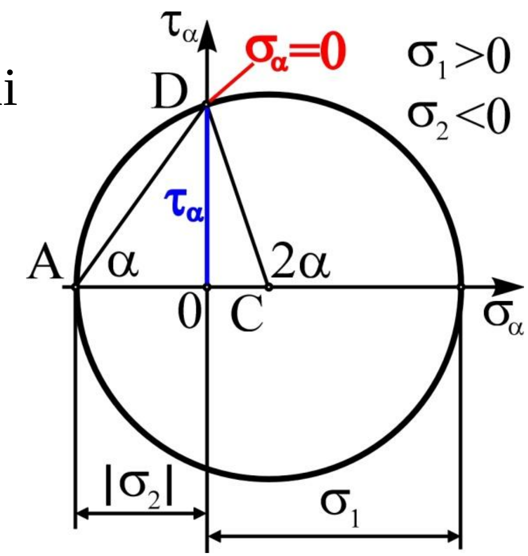
19.Kada pri ravnom stanju napona postoje ravni u kojima se javlja čisto smicanje.

Ravni preseka u kojima se javlja čisto smicanje su takve da u njima ima samo tangencijalnih napona, bez normalnih.



Takve ravni će postojati samo u slučaju prikazanom na slici, kada su glavni naponi σ_1 pozitivni a glavni naponi σ_2 negativni. To znači zatezanje u pravcu napona σ_1 a pritisak u pravcu napona σ_2 .





Iz Morovog kruga napona za takav slučaj jasno se vidi da tačka D Morovog kruga definiše takvu ravan (određuje odgovarajući ugao α).

Odgovarajući ugao α bi se mogao dobiti rešavanjem po α jednačine

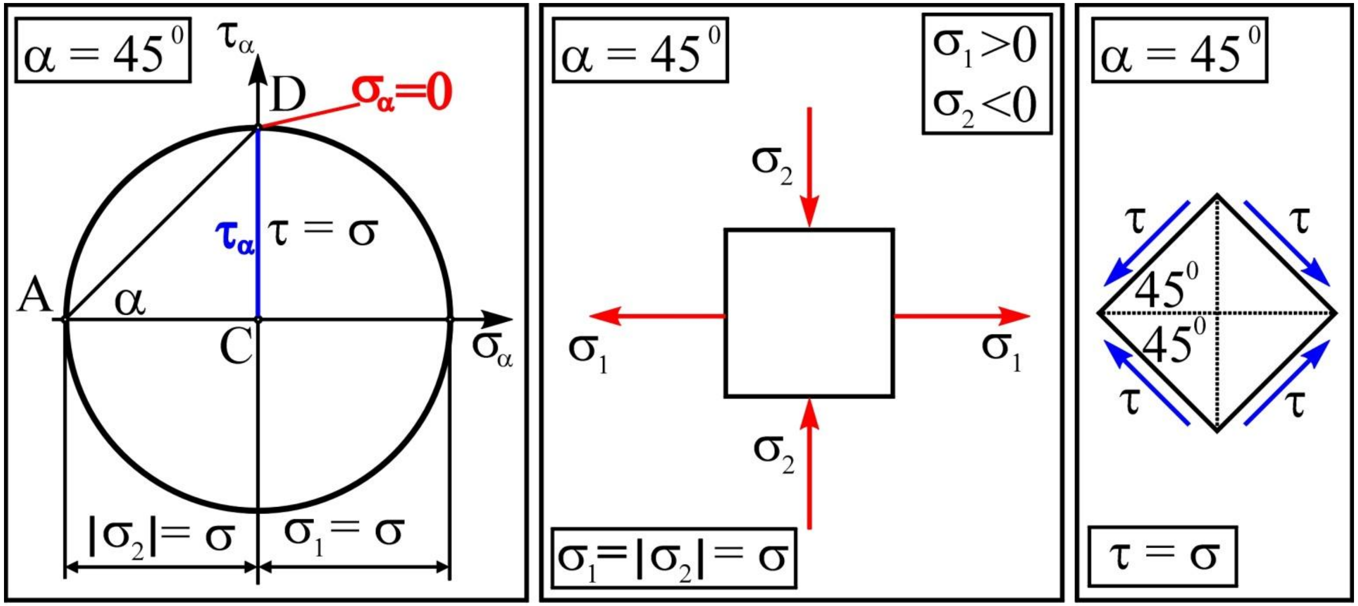
$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha$ (odnosno, $2\sigma_\alpha - (\sigma_1 + \sigma_2) = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha$), gde je σ_α=0.

20.Veza između modula elastičnosti i modula klizanja.

Za dobijanje ove veze iskoristimo činjenicu što se za $\sigma_1 = \sigma$ a $\sigma_2 = -\sigma$ dobija da je ravan u kojoj se ljavlja čisto smicanje određena uglom $\alpha = 45^0$ i što vrednost tangencijalnog napona $\tau_\alpha = \tau$ u toj ravni takođe iznosi σ.

Ove činjenice lako proizlaze iz poznatih formula:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$



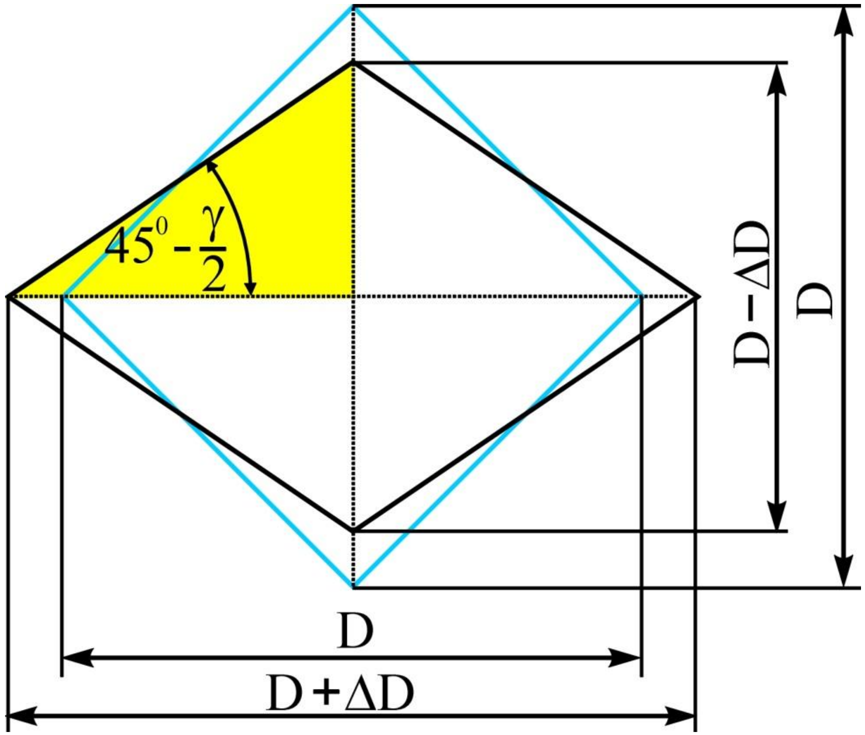
1) 2) 3)

Morov krug napona, glavni naponi i kvadratni element, u čijim ravnima imamo čisto smicanje, u opisanom slučaju, prikazani su na slikama 1), 2) i 3).

U ovakvom slučaju, dilatacije u horizontalnom *x* i vertikalnom *y* pravcu imaju istu brojnu vrednost ε ali suprotne predznake:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} + \mu \frac{\sigma}{E} = + \frac{\sigma}{E}(1+\mu) = \varepsilon, \quad \varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E} - \mu \frac{\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{E}(1+\mu) = -\varepsilon.$$

Ovo znači da će se horizontalna dijagonala dužine *D* kvadratnog elementa (Sl.3) izdužiti za istu vrednost ΔD za koju će se vertikalna skratiti. Ugao kod levog temena tog kvadrata će se smanjiti u odnosu na 90^0 za ugao klizanja γ i iznosiće $90^0 - \gamma$, a njegova polovina će biti $45^0 - \gamma/2$.



Za prikazani pravougli trougao važi:

$$\tan\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(D-\Delta D)/2}{(D+\Delta D)/2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\frac{D-\Delta D}{D}}{\frac{D+\Delta D}{D}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sin 45^0 \cos\frac{\gamma}{2} - \cos 45^0 \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos 45^0 \cos\frac{\gamma}{2} + \sin 45^0 \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1-\frac{\Delta D}{D}}{1+\frac{\Delta D}{D}}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1-(\gamma/2)}{1+(\gamma/2)} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ jer je: $\sin 45^0 = \cos 45^0, \quad \sin\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} \approx 1, \quad \frac{\Delta D}{D} = \varepsilon.$

Iz prethodne jednačine se lako može dobiti da je $\gamma = 2\varepsilon.$

Uvrštavanjem u dobijenu jednakost $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{G}$ i $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1+\mu)$ dobija se:

$$\frac{\sigma}{G} = 2\frac{\sigma}{E}(1+\mu) \quad \Rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$