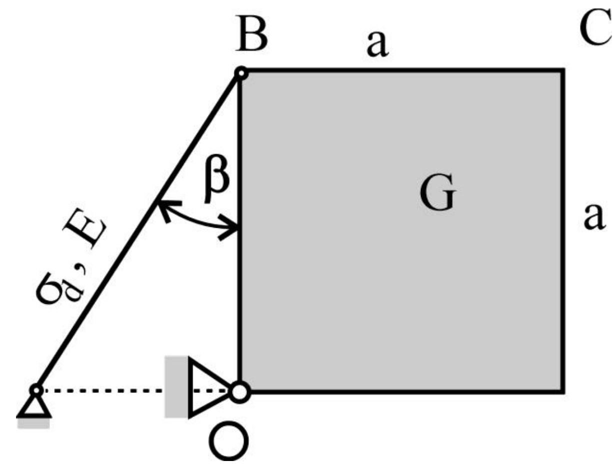
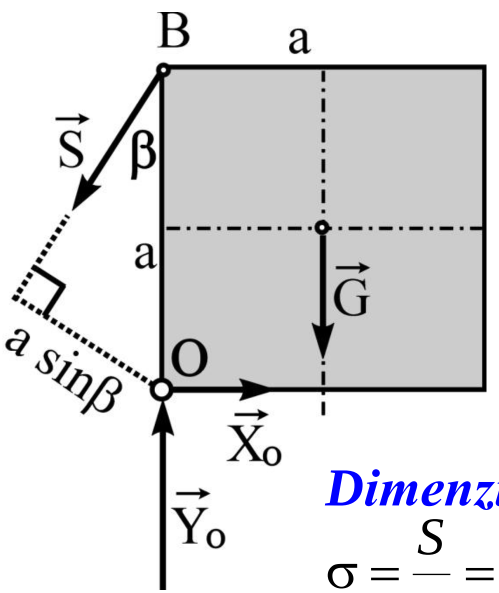
Primer 1.4 Homogena kvadratna kruta ploča težine *G* može da se obrće oko nepokretnog zgloba O. Nju održava u ravnoteži laki elastični štap, modula elastičnosti *E* i dozvoljenog napona σ_d, kao što je na slici prikazano. Dimenzionisati elastični štap (naći nejednakost koja definiše njegov poprečni presek *A*), a zatim, smatrajući veličinu *A* poznatom, odrediti pomeranje tačke C. Veličine: *a*, *G*, β, σ_d i *E* su poznate.



Dužina elastičnog štapa *L* je hipotenuza trougla kod kojeg su poznati ugao β i kateta *OB*, dužine *a*:

$$\cos\beta = \frac{a}{L} \Rightarrow L = \frac{a}{\cos\beta}.$$



Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na krutu ploču i određivanje sile u elastičnom štapu:

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow -G\cdot\frac{a}{2} + S\cdot a\sin\beta = 0 \Rightarrow \quad S = \frac{G}{2\sin\beta}.$$

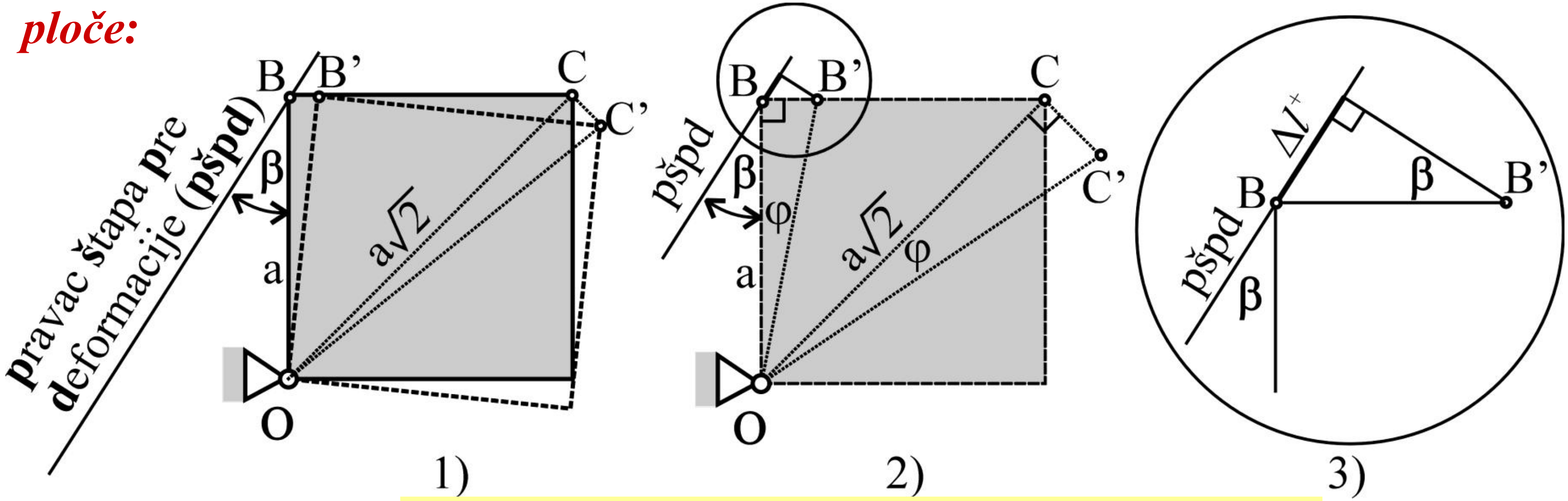
Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Dimenzionisanje (Određivanje veličine poprečnog preseka A):

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{G}{2\sin\beta\cdot A}, \quad \sigma \le \sigma_d \Rightarrow \frac{G}{2\sin\beta\cdot A} \le \sigma_d \Rightarrow \quad A \ge \frac{G}{2\sin\beta\cdot\sigma_d}.$$

U daljem tekstu veličina *A* se smatra poznatom.

Određivanje izduženja elastičnog štapa a zatim i pomeranja tačaka B i C krute ploče:



Izduženje štapa:

$$\Delta l^{+}=\frac{S\cdot L}{A\cdot E}=\frac{G\cdot a}{2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot A\cdot E}=\frac{G\cdot a}{\sin(2\beta)\cdot A\cdot E}.$$

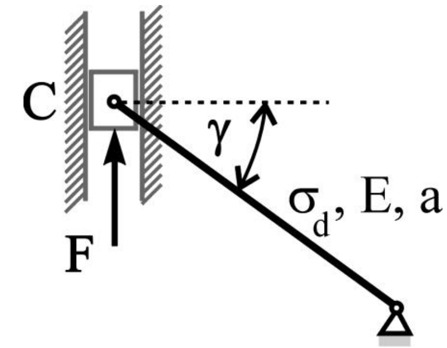
Veza između izduženja štapa i pomeranja tačke B vidi se preciznije na slici 3):

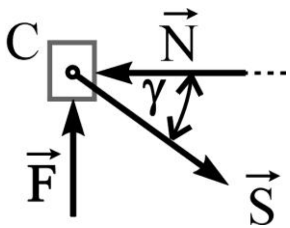
$$\sin\beta=\frac{\Delta l^{+}}{\overline{BB'}}\Rightarrow\quad \overline{BB'}=\frac{\Delta l^{+}}{\sin\beta}\quad=\frac{G\cdot a}{\sin\beta\cdot\sin(2\beta)\cdot A\cdot E}.$$

Veza između pomeranja tačaka B i C: $\Delta OBB'\sim\Delta OCC'\Rightarrow$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow\quad \overline{CC'}=\sqrt{2}\cdot\overline{BB'}=\frac{\sqrt{2}\cdot G\cdot a}{\sin\beta\cdot\sin(2\beta)\cdot A\cdot E}.$$

Primer 1.10 Laki klizač *C*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se kreće duž vertikalne glatke vođice. Njega održava u ravnoteži laki elastični štap, dužine a, modula elastičnosti *E* i dozvoljenog napona σ_d, kao što je na slici prikazano. Dimenzionisati elastični štap (naći nejednakost koja definiše njegov poprečni presek *A*), a zatim, smatrajući veličinu A poznatom, odrediti pomeranje tačke *C*. Veličine: *a*, *F*, γ, σ_d i *E* su poznate.





Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na klizač C i određivanje sile u elastičnom štapu:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \quad F - S \cdot \sin\gamma = 0 \Rightarrow \quad S = \frac{F}{\sin\gamma}.$$

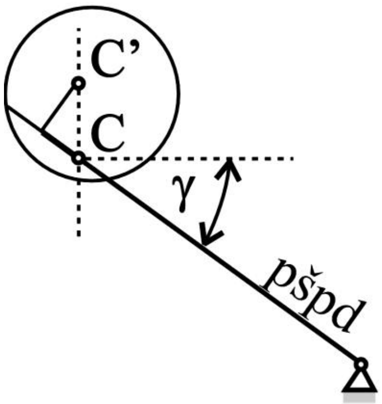
Drugi uslov ravnoteže ($\sum X_i = 0$) nije pisan zato što se ne traži reakcija glatke vođice.

Dimenzionisanje (Određivanje veličine poprečnog preseka A):

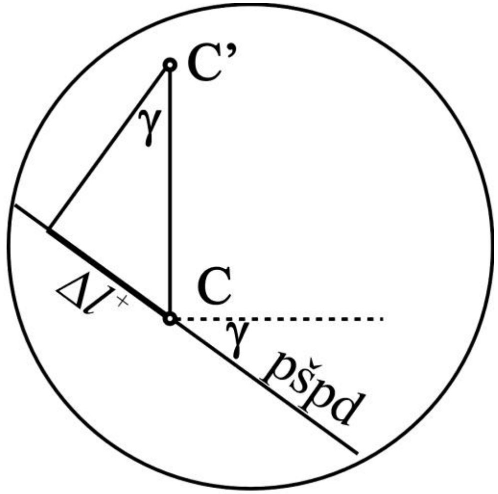
$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{F}{\sin\gamma \cdot A}, \quad \sigma \le \sigma_d \Rightarrow \quad \frac{F}{\sin\gamma \cdot A} \le \sigma_d \Rightarrow \quad A \ge \frac{F}{\sin\gamma \cdot \sigma_d}.$$

U daljem tekstu se veličina A, koja zadovoljava gornju nejednakost, smatra poznatom.

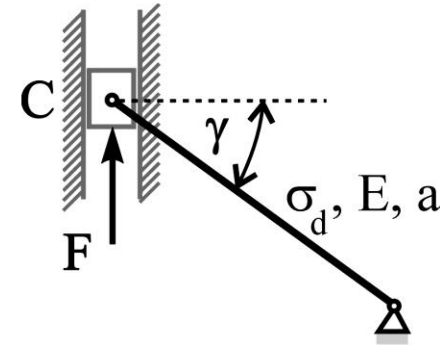
Određivanje izduženja elastičnog štapa a zatim i pomeranja tačke C:



1)



2)



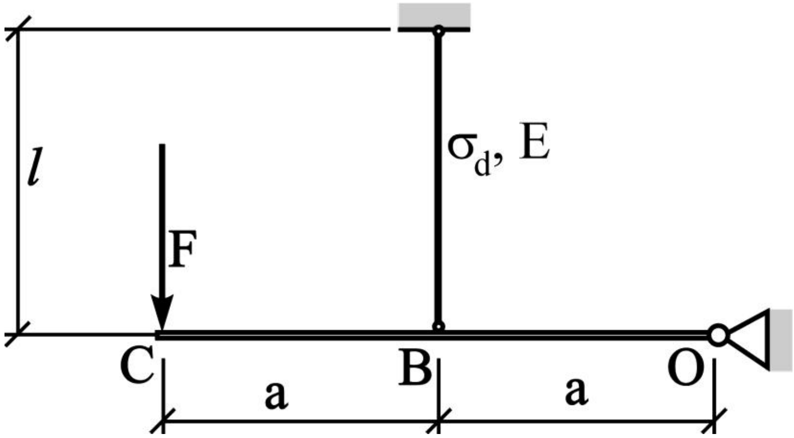
Izduženje štapa:

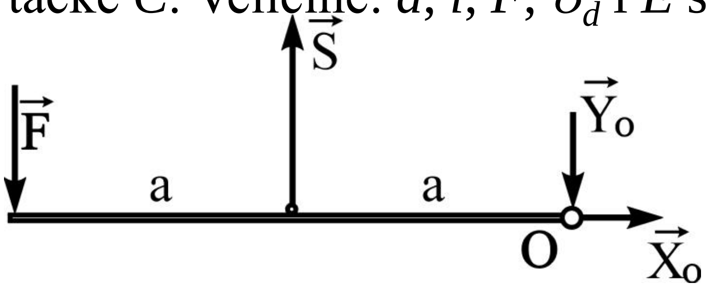
$$\Delta l^{+} = \frac{S \cdot a}{A \cdot E} = \frac{F \cdot a}{\sin\gamma \cdot A \cdot E}.$$

Veza između izduženja štapa i pomeranja tačke C vidi se preciznije na slici 2):

$$\sin\gamma = \frac{\Delta l^{+}}{\overline{CC'}} \Rightarrow \quad \overline{CC'} = \frac{\Delta l^{+}}{\sin\gamma} = \frac{F \cdot a}{\sin^{2}\gamma \cdot A \cdot E}.$$

Primer 1.11 Laki kruti štap *OC*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se obrće oko nepokretnog zgloba *O*. Njega u ravnoteži održava vertikalni elastični štap, modula elastičnosti *E* i dozvoljenog napona σ_d, kao što je na slici prikazano. Dimenzionisati elastični štap, a zatim, smatrajući veličinu poprečnog preseka *A* poznatom, odrediti pomeranje tačke *C*. Veličine: *a*, *l*, *F*, σ_d i *E* su poznate.





Uravnotežen sistem sila i spregova koji dejstvuje na laki kruti štap i određivanje sile u elastičnom štapu:

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow F \cdot 2a - S \cdot a = 0 \Rightarrow S = 2F.$$

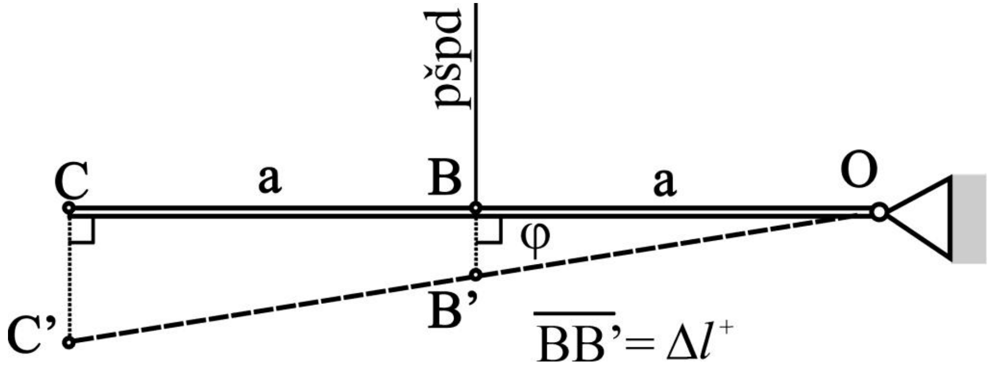
Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Dimenzionisanje (Određivanje veličine poprečnog preseka A):

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{2F}{A}, \sigma \le \sigma_d \Rightarrow \frac{2F}{A} \le \sigma_d \Rightarrow A \ge \frac{2F}{\sigma_d}.$$

U daljem tekstu veličina *A* se smatra poznatom.

Određivanje izduženja elastičnog štapa a zatim i pomeranja tačke C krutog štapa:



Izduženje štapa a samim tim i pomeranje tačke B:

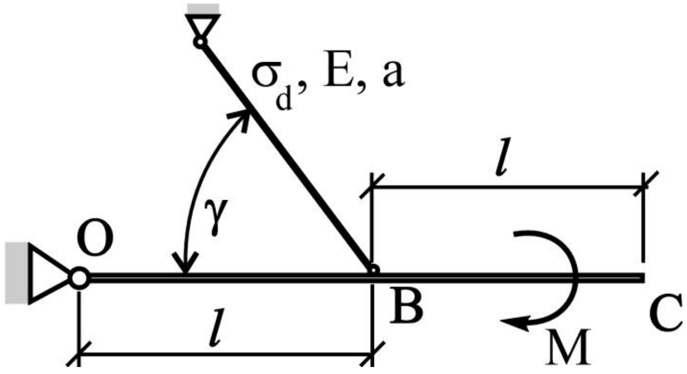
$$\Delta l^{+} = \frac{S \cdot l}{A \cdot E} = \frac{2F \cdot l}{A \cdot E} \Rightarrow \overline{BB'} = \frac{2F \cdot l}{A \cdot E}.$$

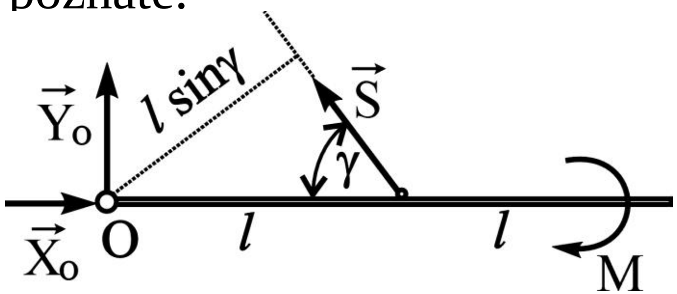
Veza između pomeranja tačaka B i C:

$$\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'} = \frac{4F \cdot l}{A \cdot E}.$$

Primer 1.12 Laki kruti štap *OC*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se obrće oko nepokretnog zgloba *O*. Njega u ravnoteži održava vertikalni elastični štap, modula elastičnosti *E* i dozvoljenog napona σ_d, kao što je na slici prikazano. Dimenzionisati elastični štap, a zatim, smatrajući veličinu poprečnog preseka *A* poznatom, odrediti pomeranje tačke *C*. Veličine: *a*, *l*, *F*, σ_d i *E* su poznate.





Uravnotežen sistem sila i spregova koji dejstvuje na laki kruti štap i određivanje sile u elastičnom štapu:

$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow S \cdot l \sin\gamma - M = 0 \Rightarrow S = \frac{M}{l \sin\gamma}.$$

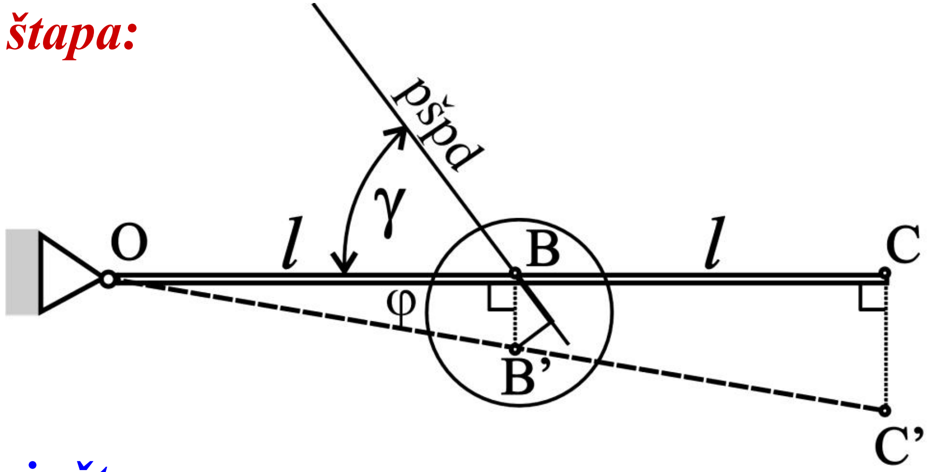
Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Dimenzionisanje (Određivanje veličine poprečnog preseka A):

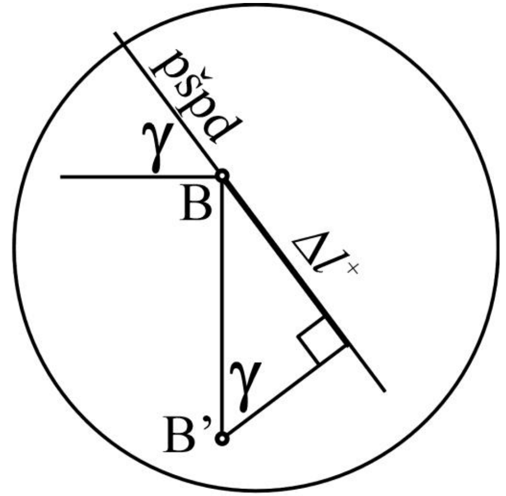
$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{M}{l \sin\gamma \cdot A}, \quad \sigma \le \sigma_d \Rightarrow \frac{M}{l \sin\gamma \cdot A} \le \sigma_d \Rightarrow A \ge \frac{M}{l \sin\gamma \cdot \sigma_d}.$$

U daljem tekstu veličina *A* se smatra poznatom.

Određivanje izduženja elastičnog štapa a zatim i pomeranja tačaka B i C krutog štapa:



1)



2)

Izduženje štapa:

$$\Delta l^{+} = \frac{S \cdot a}{A \cdot E} = \frac{M \cdot a}{l \sin\gamma \cdot A \cdot E}.$$

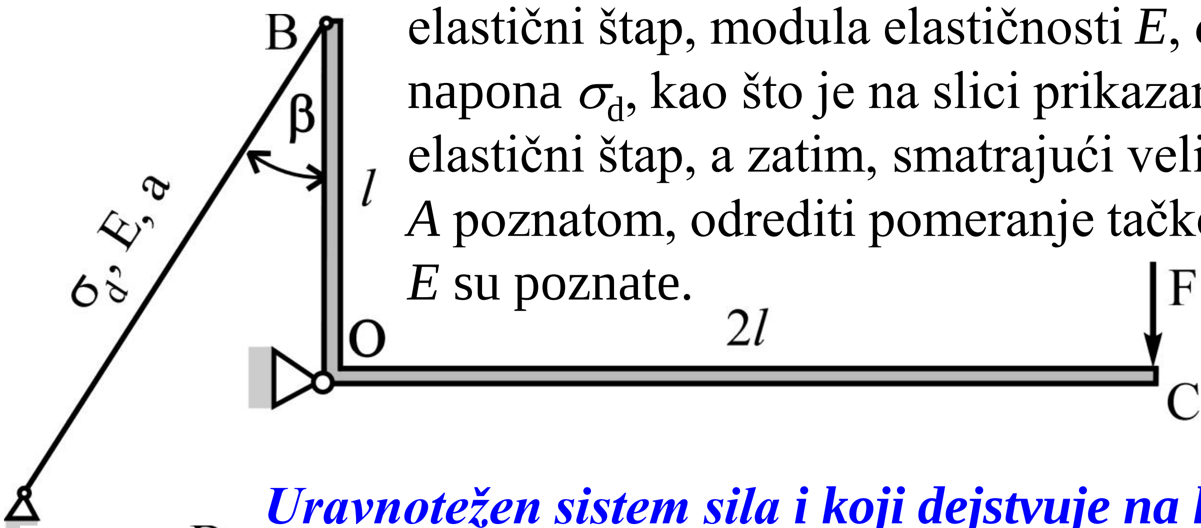
Veza između izduženja štapa i pomeranja tačke B vidi se preciznije na slici 2):

$$\sin\gamma = \frac{\Delta l^{+}}{\overline{BB'}} \Rightarrow \overline{BB'} = \frac{\Delta l^{+}}{\sin\gamma} = \frac{M \cdot a}{l \sin^{2}\gamma \cdot A \cdot E}.$$

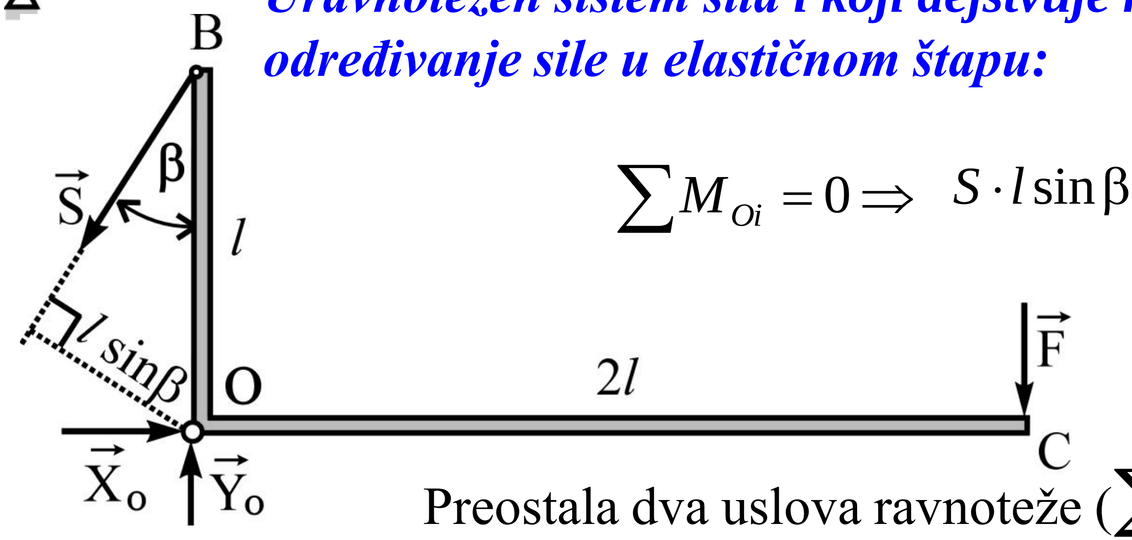
Veza između pomeranja tačaka B i C: $\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{2l}{l} = 2 \Rightarrow \overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'} = \frac{2 \cdot M \cdot a}{l \sin^{2}\gamma \cdot A \cdot E}.$$

Primer 1.13 Laki kruti ugaonik čine vertikalni štap OB dužine l i horizontalni OC dužine $2l$. Na ugaonik u tački C, koji može da se obrće oko nepokretnog zgloba O, dejstvuje vertikalna sila intenziteta F. Njega u ravnoteži održava elastični štap, modula elastičnosti E, dužine a i dozvoljenog napona σ_d, kao što je na slici prikazano. Dimenzionisati elastični štap, a zatim, smatrajući veličinu poprečnog preseka A poznatom, odrediti pomeranje tačke C. Veličine: a, l, F, σ_d i E su poznate.



Uravnotežen sistem sila i koji dejstvuje na laki kruti ugaonik i određivanje sile u elastičnom štapu:



$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow \quad S \cdot l \sin\beta - F \cdot 2l = 0 \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{2F}{\sin\beta}}.$$

Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Dimenzionisanje (Određivanje veličine poprečnog preseka A):

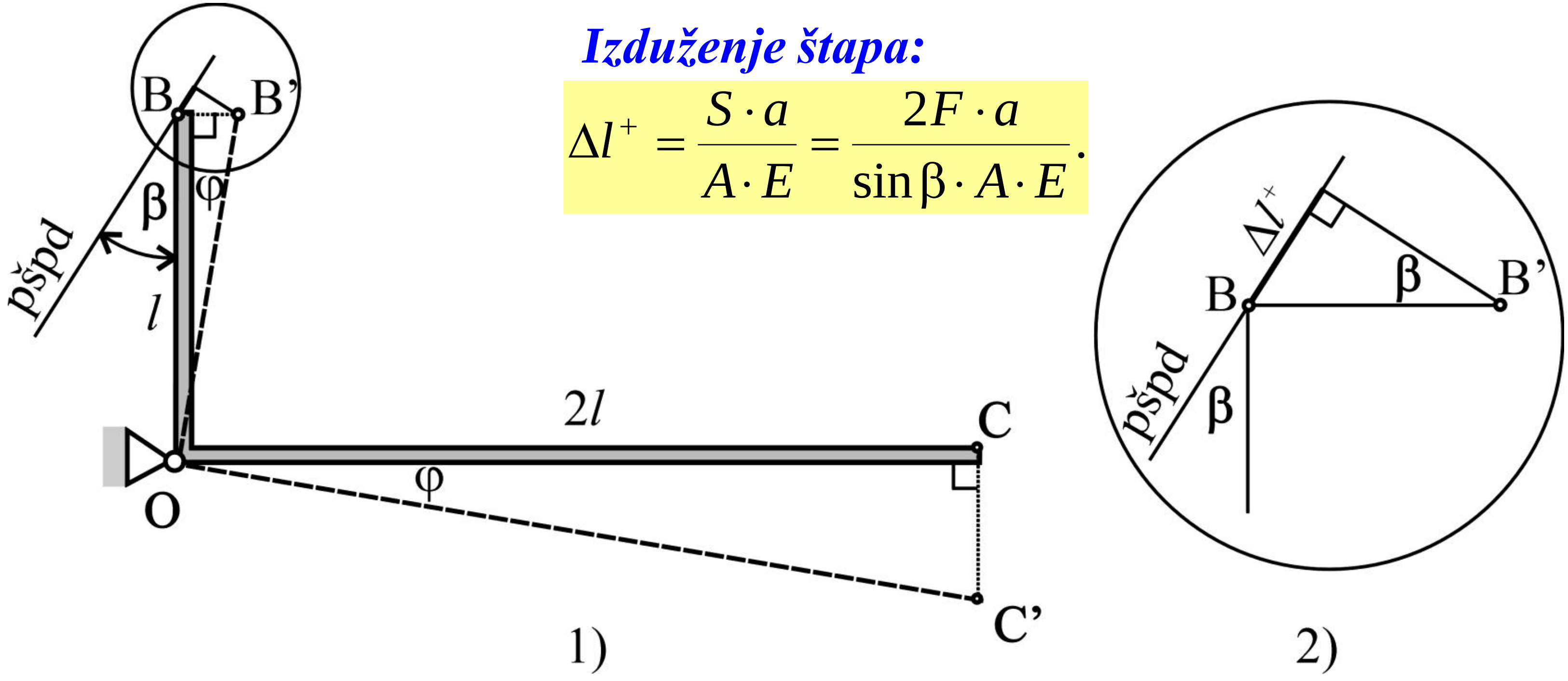
$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{2F}{\sin\beta \cdot A} \le \sigma_d \Rightarrow \quad A \ge \frac{2F}{\sin\beta \cdot \sigma_d}.$$

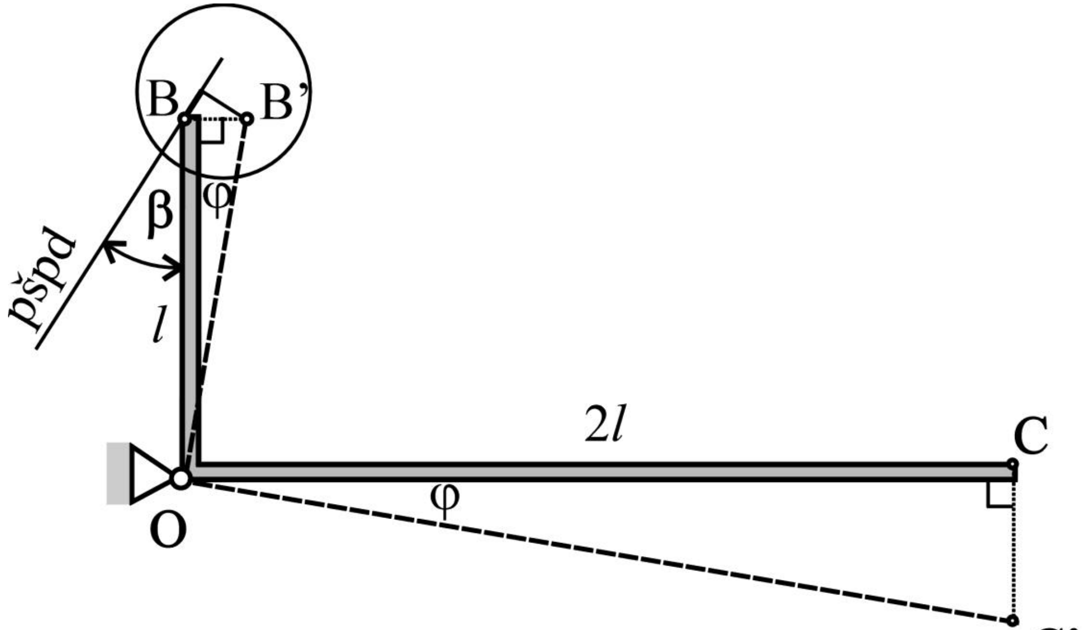
U daljem tekstu se veličina A, koja zadovoljava gornju nejednakost, smatra poznatom.

Određivanje izduženja elastičnog štapa a zatim i pomeranja tačaka B i C lakog krutog ugaonika:

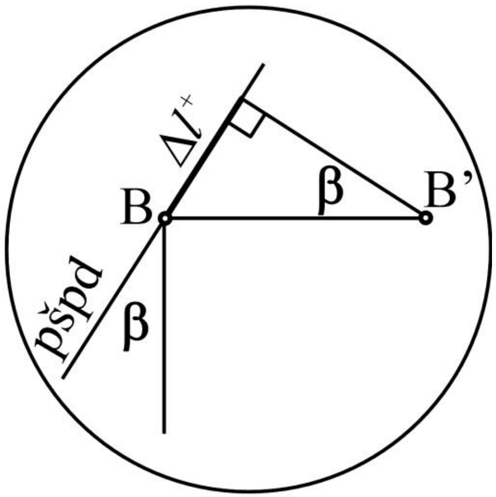
Izduženje štapa:

$$\Delta l^{+} = \frac{S \cdot a}{A \cdot E} = \frac{2F \cdot a}{\sin\beta \cdot A \cdot E}.$$





1)



2)

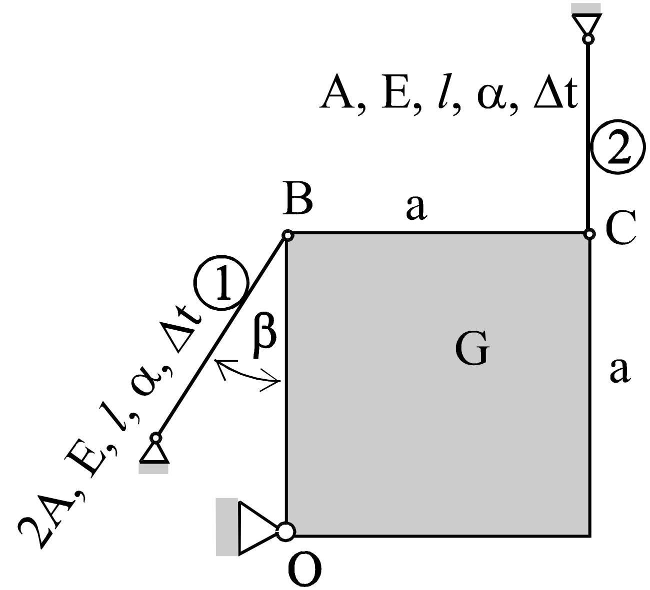
Veza između izduženja štapa i pomeranja tačke B vidi se preciznije na slici 2):

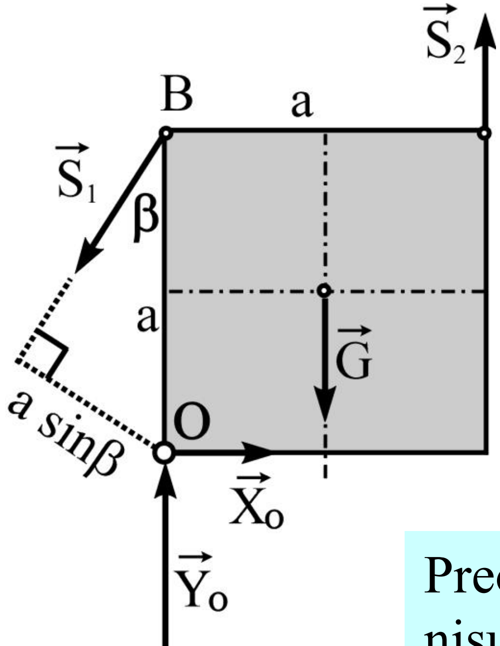
$$\sin\beta = \frac{\Delta l^{+}}{\overline{\overline{BB'}}} \Rightarrow \quad \overline{BB'} = \frac{\Delta l^{+}}{\sin\beta} \quad = \frac{2F\cdot a}{\sin^{2}\beta\cdot A\cdot E}.$$

Veza između pomeranja tačaka B i C: $\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{\overline{BB'}}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{2l}{l} = 2 \Rightarrow \quad \overline{CC'} = 2\cdot\overline{BB'} \quad = \frac{4F\cdot a}{\sin^{2}\beta\cdot A\cdot E}.$$

Primer 1.9 Homogena kvadratna kruta ploča, težine G, može da se obrće oko nepokretnog zgloba O. Nju održavaju u ravnoteži laki elastični štapovi 1 i 2, kao što je na slici prikazano. Površine poprečnih preseka štapova definiše veličina *A*, modul elastičnosti je *E* a dužine štapova iznose *l*. Temperatura oba štapa je povišena za *Δt* a koeficijent toplotnog širenja je α. Odrediti napone u elastičnim štapovima? Veličine: *a, G, β, A, l,* α, *Δt* i *E* su poznate.





Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na krutu ploču i dobijanje statičke jednačine u kojoj su jedine nepoznate sile u elastičnim štapovima

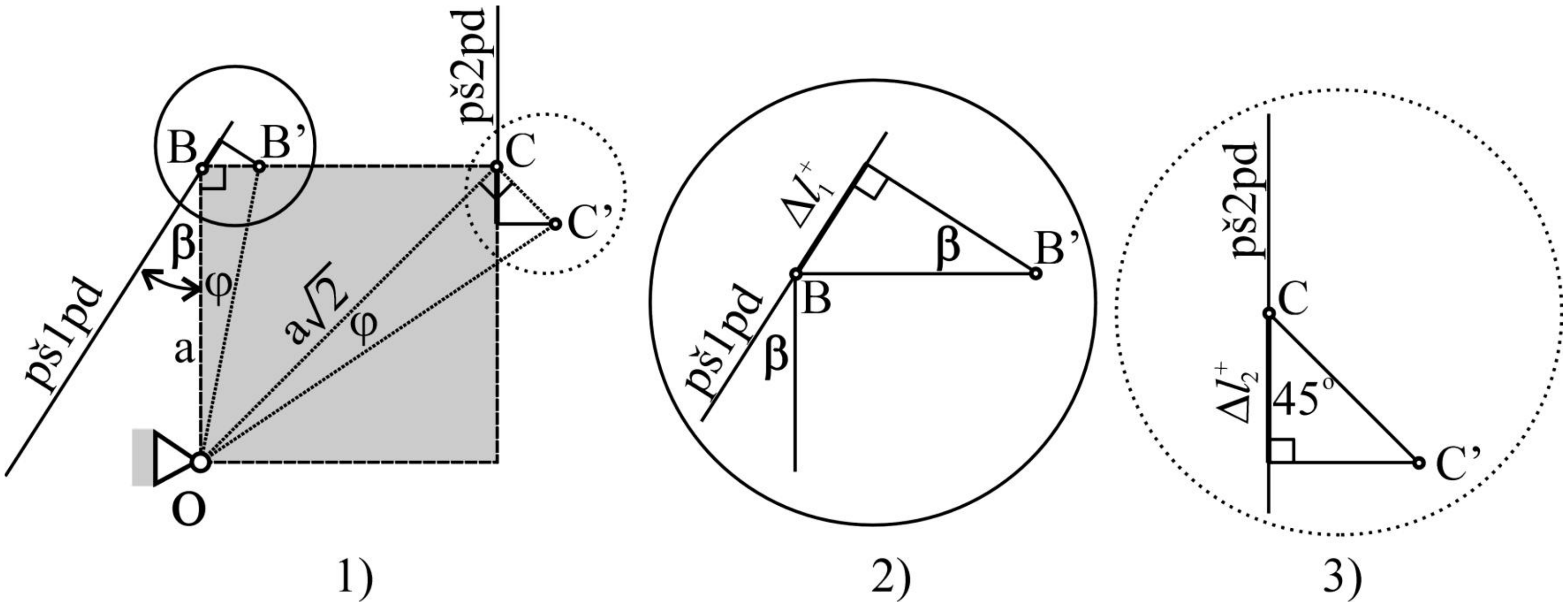
$$\sum M_{Oi}=0 \Rightarrow -G\cdot\frac{a}{2}+S_1\cdot a\sin\beta+S_2\cdot a=0 \Rightarrow$$

$$2\sin\beta S_1+2S_2=G \;....(1)$$

Smerovi sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su u skladu sa pretpostavkom da su oba elastična štapa zategnuta.

Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i=0$ i $\sum Y_i=0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

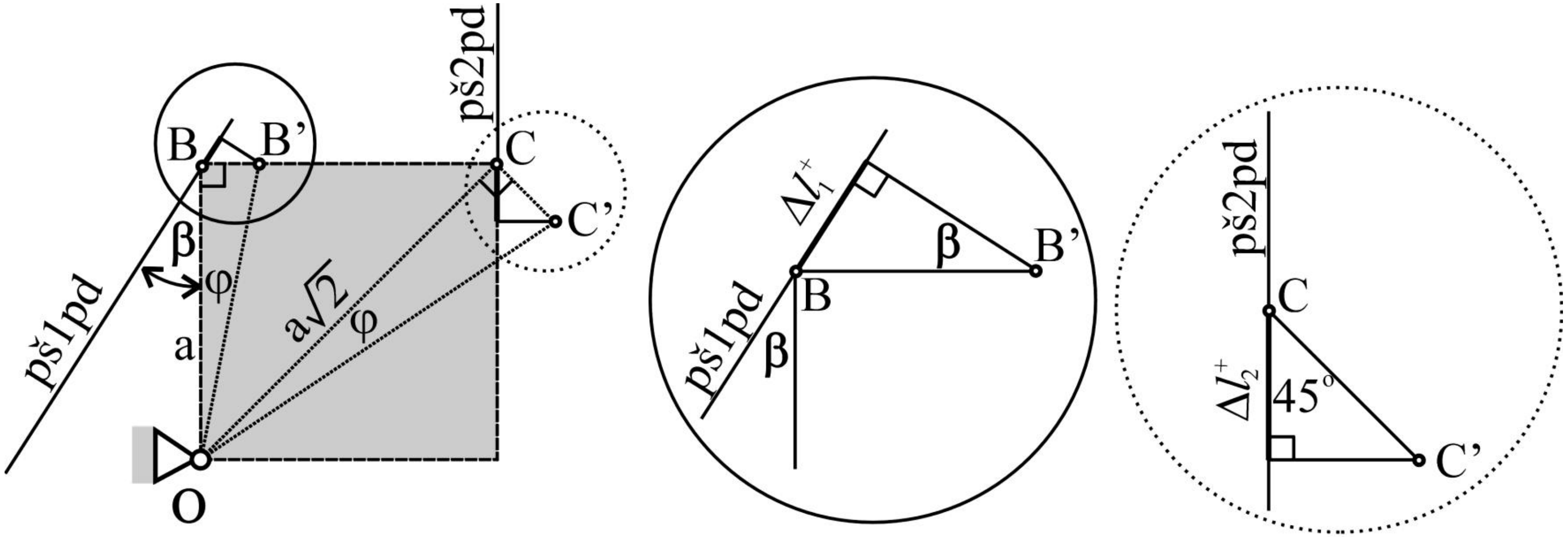
Određivanje geometrijskog uslova deformacije (GUD-a) i dopunske jednačine dobijene na osnovu njega



GUD predstavlja linearnu jednakost koja u ovom slučaju povezuje izduženja štapova (veličine Δl_1^+ i Δl_2^+). Skraćenica pš1pd sa slike znači „pravac štapa 1 pre deformacije“, na isti način pš2pd je „pravac štapa 2 pre deformacije“.

Veza između pomeranja tačaka B i C (Slika 1): $\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \quad \overline{CC'} = \sqrt{2} \cdot \overline{BB'} \text{....(*)}$$



1) 2) 3)

Povezanost veličina $\overline{BB'}$ i Δl_1^+ (Slika 2): $\sin\beta = \dfrac{\Delta l_1^+}{\overline{BB'}} \Rightarrow \overline{BB'} = \dfrac{\Delta l_1^+}{\sin\beta}$.

Povezanost veličina $\overline{CC'}$ i Δl_2^+ (Slika 3): $\cos 45^o = \dfrac{\Delta l_2^+}{\overline{CC'}} \Rightarrow \overline{CC'} = \sqrt{2}\Delta l_2^+$.

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u jednakost (*) dobija se GUD:

$\underline{\Delta l_2^+ \cdot \sin\beta = \Delta l_1^+}$...(**)

S obzirom da je štap 1 po našoj pretpostavci zategnut i zagrejan, njegovo izduženje je:

$$\Delta l_1^+ = \frac{S_1 l}{2AE} + l\alpha\Delta t.$$

S obzirom da je štap 2 po našoj pretpostavci zategnut i zagrejan, njegovo izduženje je: $\Delta l_2^+ = \frac{S_2 l}{AE} + l\alpha\Delta t.$

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u GUD (**) dobija se dopunska jednačina:

$$\underline{\left(\frac{S_2 l}{AE} + l\alpha\Delta t\right)\sin\beta = \frac{S_1 l}{2AE} + l\alpha\Delta t} ...(2)$$

Konačna rešenja:

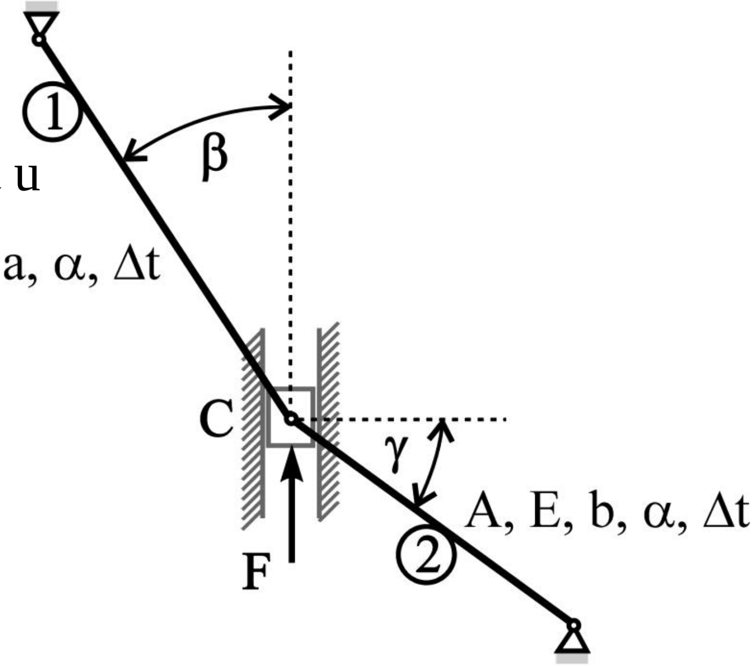
Statička jednačina (1) i dopunska jednačina (2) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate. Njihovim rešavanjem dobija se da nepoznate S_1 i S_2 iznose:

$$S_1 = \frac{G\sin\beta - 2AE\alpha\Delta t(1-\sin\beta)}{1+2\sin^2\beta}, \quad S_2 = \frac{G + 4AE\alpha\Delta t\sin\beta(1-\sin\beta)}{2(1+2\sin^2\beta)}.$$

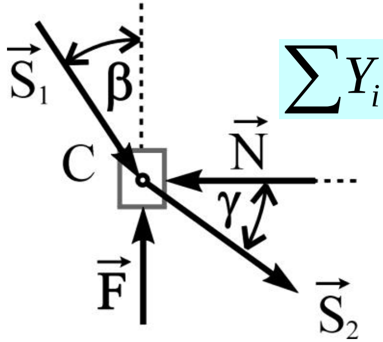
Na osnovu dobijenih sila S_1 i S_2, naponi u elastičnim štapovima su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{2A} = \frac{G\sin\beta - 2AE\alpha\Delta t(1-\sin\beta)}{2A(1+2\sin^2\beta)}, \ \sigma_2 = \frac{S_2}{A} = \frac{G + 4AE\alpha\Delta t\sin\beta(1-\sin\beta)}{2A(1+2\sin^2\beta)}.$$

Primer 1.14 Laki klizač *C*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se kreće duž vertikalne glatke vođice. Njega održavaju u ravnoteži laki elastični štapovi 1 i 2, kao što je na slici prikazano. Površine poprečnih preseka štapova definiše veličina *A*, modul elastičnosti je *E* a dužine štapova iznose *a* i *b*. Temperatura oba štapa je povišena za Δt a koeficijent toplotnog širenja je α. Odrediti napone u elastičnim štapovima? Veličine: *a*, *b*, β, γ, *A*, *F*, α, Δt i *E* su poznate.



Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na klizač i dobijanje statičke jednačine u kojoj su jedine nepoznate sile u elastičnim štapovima

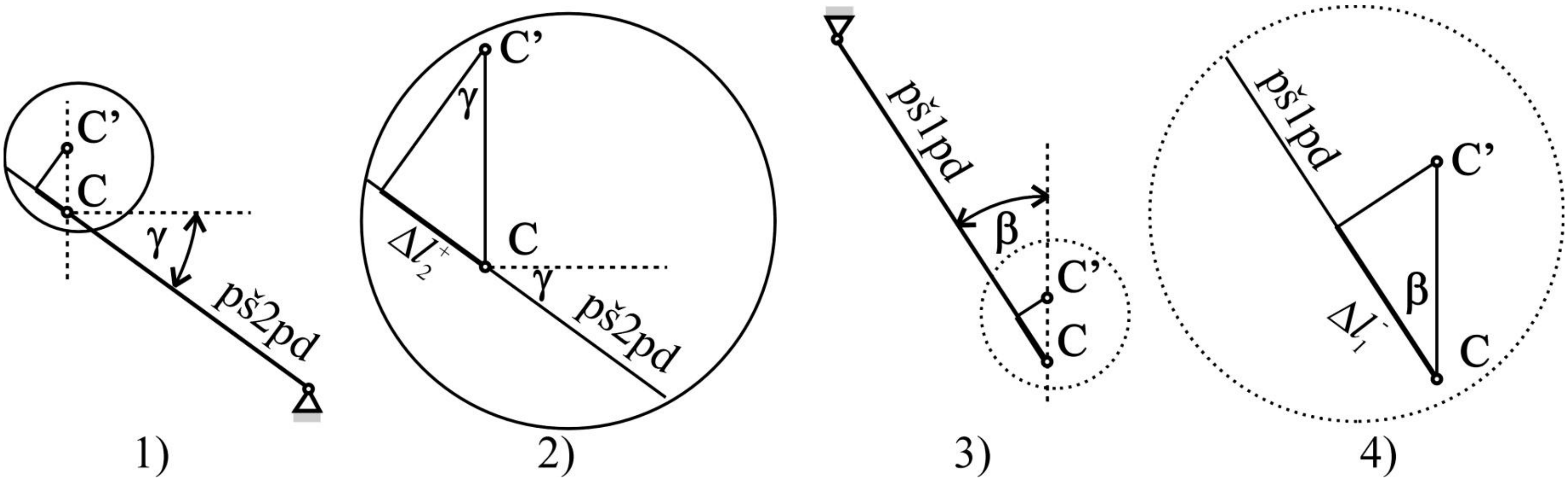


$$\sum Y_i = F - S_1 \cdot \cos\beta - S_2 \cdot \sin\gamma = 0 \Rightarrow \underline{S_1 \cos\beta + S_2 \sin\gamma = F}...(1)$$

Smerovi sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su u skladu sa pretpostavkom da je štap 1 pritisnut silom intenziteta S_1, a štap 2 zategnut silom intenziteta S_2.

Drugi uslov ravnoteže ($\sum X_i = 0$) nije pisan zato što se ne traži reakcija glatke vođice.

Određivanje geometrijskog uslova deformacije (GUD-a) i dopunske jednačine dobijene na osnovu njega



Zbog pretpostavke da će se tačka *C* pomeriti naviše, *GUD* će u ovom slučaju predstavljati vezu između skraćenja štapa 1 (veličine Δl_1^-) i izduženja štapa 2 (veličine Δl_2^+).

Povezanost veličina $\overline{CC'}$ i Δl_2^+ (Slika 2): $\sin\gamma = \dfrac{\Delta l_2^+}{\overline{\overline{CC'}}} \Rightarrow \quad \overline{CC'} = \dfrac{\Delta l_2^+}{\sin\gamma}.$

Povezanost veličina $\overline{CC'}$ i Δl_1^- (Slika 4): $\cos\beta = \dfrac{\Delta l_1^-}{\overline{\overline{CC'}}} \Rightarrow \quad \overline{CC'} = \dfrac{\Delta l_1^-}{\cos\beta}.$

Izjednačavanjem poslednjih jednakosti dobija se GUD:

$$\underline{\Delta l_2^+ \cdot \cos\beta = \Delta l_1^- \cdot \sin\gamma}...(*)$$

S obzirom da je štap 1 po našoj pretpostavci pritisnut i zagrejan, njegovo skraćenje je:

$$\Delta l_1^- = \frac{S_1 a}{2AE} - a\alpha\Delta t.$$

S obzirom da je štap 2 po našoj pretpostavci zategnut i zagrejan, njegovo izduženje je:

$$\Delta l_2^+ = \frac{S_2 b}{AE} + b\alpha\Delta t.$$

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u GUD (*) dobija se dopunska jednačina:

$$\left(\frac{S_2 b}{AE} + b\alpha\Delta t\right)\cos\beta = \left(\frac{S_1 a}{2AE} - a\alpha\Delta t\right)\sin\gamma \ldots (2)$$

Konačna rešenja:

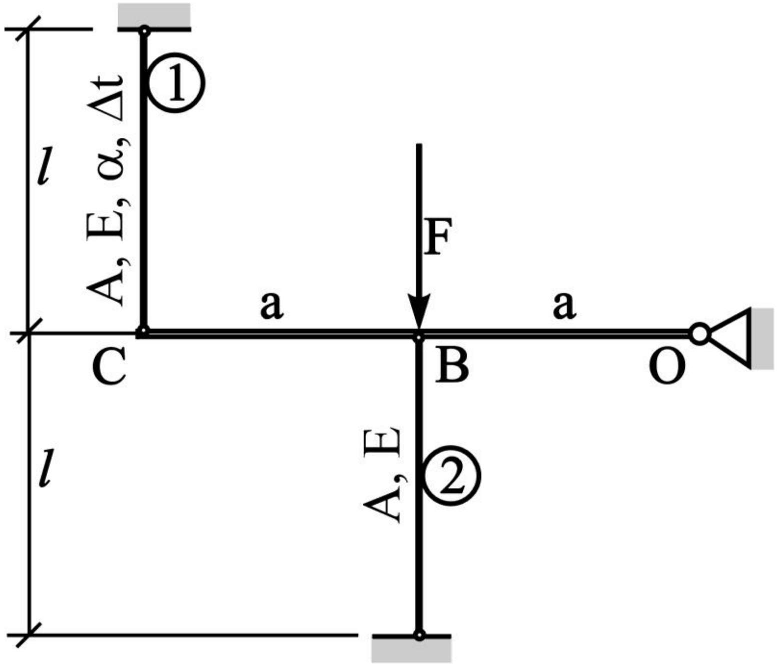
Statička jednačina (1) i dopunska jednačina (2) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate. Njihovim rešavanjem dobijaju se nepoznate S_1 i S_2:

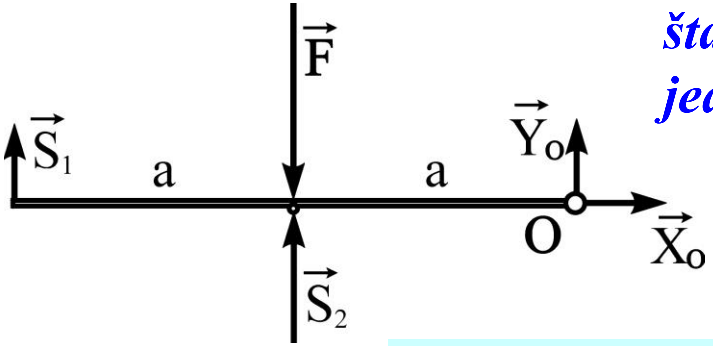
$$S_1 = 2\frac{bF\cos\beta + AE\alpha\Delta t\sin\gamma\left(b\cos\beta + a\sin\gamma\right)}{2b\cos^2\beta + a\sin^2\gamma} \Rightarrow \sigma_1 = -\frac{S_1}{2A},$$

$$S_2 = \frac{aF\sin\gamma - 2AE\alpha\Delta t\cos\beta\left(b\cos\beta + a\sin\gamma\right)}{2b\cos^2\beta + a\sin^2\gamma} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{S_2}{A}.$$

Pošto je rešenje za silu S_1 predznaka +, tačna je pretpostavka da je štap 1 pritisnut. Zbog činjenice da je štap 1 pritisnut, u izrazu za napon u tom štapu, dodat se predznak -.

Primer 1.15 Laki kruti štap *OC*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se obrće oko nepokretnog zgloba *O*. Njega u ravnoteži održavaju laki elastični štapovi 1 i 2, kao što je na slici prikazano. Površine poprečnih preseka štapova iznose *A*, modul elastičnosti je *E* a dužine štapova iznose *l*. Temperatura štapa 1 je povišena za Δt a koeficijent toplotnog širenja je α. Odrediti napone u elastičnim štapovima? Veličine: *a*, *F*, *A*, *l*, α, Δt i *E* su poznate.





Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na krutu štap i dobijanje statičke jednačine u kojoj su jedine nepoznate sile u elastičnim štapovima

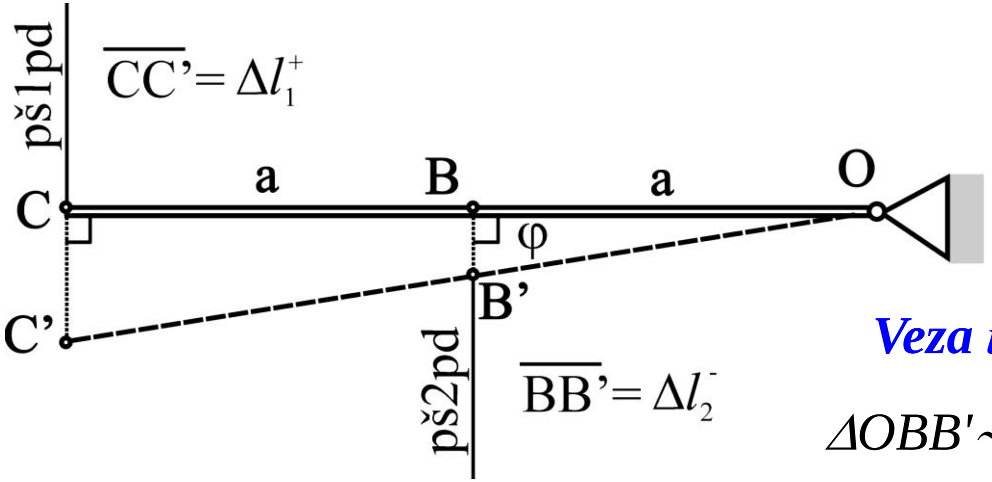
$$\sum M_{Oi}=0 \Rightarrow F\cdot a - S_1\cdot 2a - S_2\cdot a = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{2S_1+S_2=F}\ldots(1)$$

Smerovi sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su u skladu sa pretpostavkom da je štap 1 zategnut silom intenziteta S_1, a štap 2 pritisnut silom intenziteta S_2.

Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Određivanje geometrijskog uslova deformacije (GUD-a) i dopunske jednačine dobijene na osnovu njega



Zbog pretpostavke da će se štap pomeriti naniže, GUD će u ovom slučaju predstavljati vezu između izduženja štapa 1 (veličine Δl_1^+) i skraćenja štapa 2 (veličine Δl_2^-).

Veza između pomeranja tačaka B i C:

$$\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'}}...(*)$$

$\overline{CC'} = \Delta l_1^+$, zbog pomeranja tačke C u pravcu štapa 1 pre deformacije

$\overline{BB'} = \Delta l_2^-$, zbog pomeranja tačke B u pravcu štapa 2 pre deformacije

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u jednakost (*) dobija se GUD:

$$\underline{\Delta l_1^+ = 2\Delta l_2^-}...(**)$$

S obzirom da je štap 1 po našoj pretpostavci zategnut i zagrejan, njegovo izduženje je:

$$\Delta l_1^+ = \frac{S_1 l}{AE} + l\alpha\Delta t.$$

S obzirom da je štap 2 po našoj pretpostavci samo pritisnut, njegovo skraćenje je:

$$\Delta l_2^- = \frac{S_2 l}{AE}.$$

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u GUD (**) dobija se dopunska jednačina:

$$\frac{S_1 l}{AE} + l\alpha\Delta t = 2\frac{S_2 l}{AE} \quad ...(2)$$

Konačna rešenja:

Statička jednačina (1) i dopunska jednačina (2) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate. Njihovim rešavanjem dobijaju se nepoznate S_1 i S_2 :

$$S_1 = \frac{2F - AE\alpha\Delta t}{5},$$

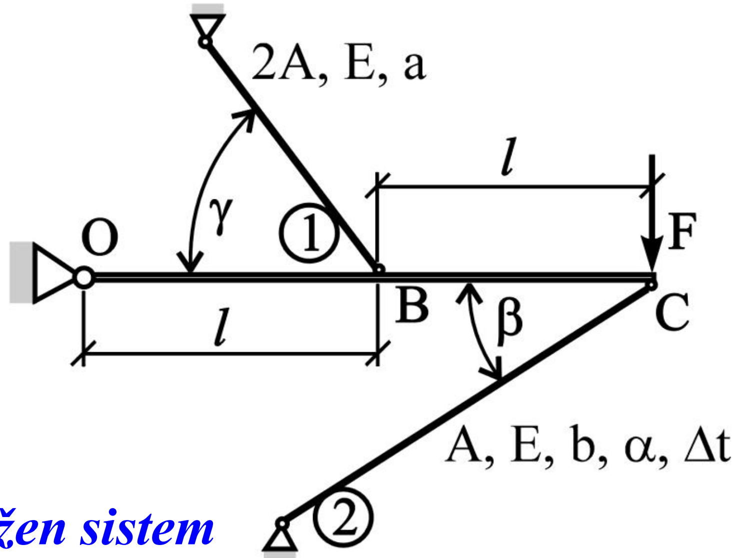
$$S_2 = \frac{F + 2AE\alpha\Delta t}{5}.$$

Pošto je rešenje za silu S_2 predznaka +, tačna je pretpostavka da je štap 2 pritisnut. Zbog činjenice da je štap 2 pritisnut, u izrazu za napon u tom štapu, dodaće se predznak -.

Konačno, na osnovu dobijenih sila S_1 i S_2 , naponi u elastičnim štapovima su:

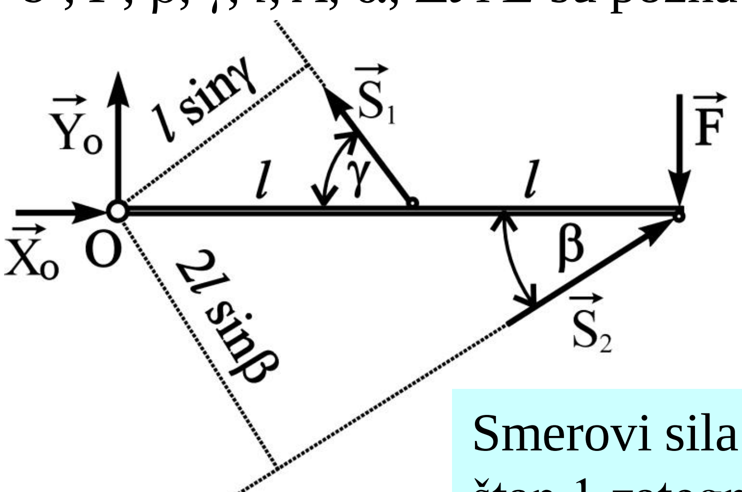
$$\sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \frac{2F - AE\alpha\Delta t}{5A}, \quad \sigma_2 = -\frac{S_2}{A} = -\frac{F + 2AE\alpha\Delta t}{5A}.$$

Primer 1.16 Laki kruti štap *OC*, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta *F*, može da se obrće oko nepokretnog zgloba *O*. Njega u ravnoteži održavaju laki elastični štapovi 1 i 2, kao što je na slici prikazano. Površine poprečnih preseka štapova definiše veličina *A*, dužine štapova iznose *a* i *b* a modul elastičnosti je *E*. Temperatura štapa 2 je povišena za Δt a koeficijent toplotnog širenja je α. Odrediti napone u elastičnim štapovima? Veličine: *a*, *b* , *F*, β, γ, *l*, *A*, α, Δt i *E* su poznate.



Uravnotežen sistem

sila koji dejstvuje na krutu štap i dobijanje statičke jednačine u kojoj su jedine nepoznate sile u elastičnim štapovima



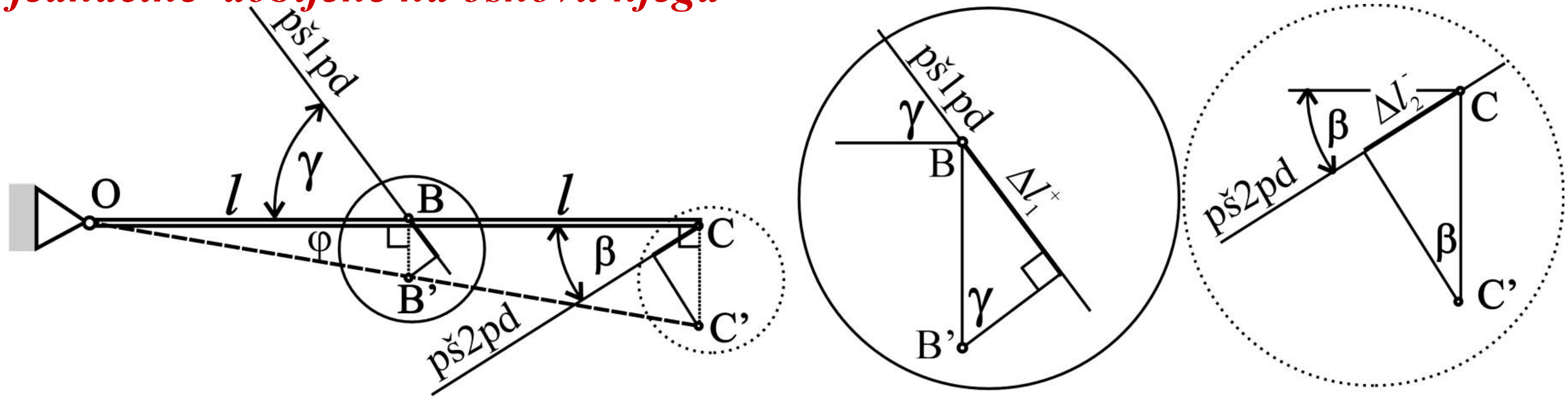
$$\sum M_{Oi} = S_1 \cdot l \sin\gamma + S_2 \cdot 2l \sin\beta - F \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_1 \sin\gamma + 2S_2 \sin\beta = 2F \ldots (1)$$

Smerovi sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su u skladu sa pretpostavkom da je štap 1 zategnut silom S_1, a štap 2 pritisnut silom S_2.

Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

Određivanje geometrijskog uslova deformacije (GUD-a) i dopunske jednačine dobijene na osnovu njega



1) 2) 3)

Zbog pretpostavke da će se štap pomeriti naniže, GUD će u ovom slučaju predstavljati vezu između izduženja štapa 1 (veličine Δl_1^+) i skraćenja štapa 2 (veličine Δl_2^-).

Veza između pomeranja tačaka B i C:

$$\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{2l}{l} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'}} \ldots (*)$$

Povezanost veličina $\overline{BB'}$ i Δl_1^+ (Slika 2), kao i $\overline{CC'}$ i Δl_2^- (Slika 3):

$$\sin\gamma = \frac{\Delta l_1^+}{\overline{BB'}} \Rightarrow \overline{BB'} = \frac{\Delta l_1^+}{\sin\gamma}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta l_2^-}{\overline{CC'}} \Rightarrow \overline{CC'} = \frac{\Delta l_2^-}{\sin\beta}.$$

Uvrštavanjem ovih jednakosti u (*) dobija se $\underline{\Delta l_2^- \cdot \sin\gamma = 2 \cdot \Delta l_1^+ \cdot \sin\beta} \ldots (**)$

S obzirom da je štap 1 po našoj pretpostavci samo zategnut, njegovo izduženje je:

$$\Delta l_1^+ = \frac{S_1 a}{2AE}.$$

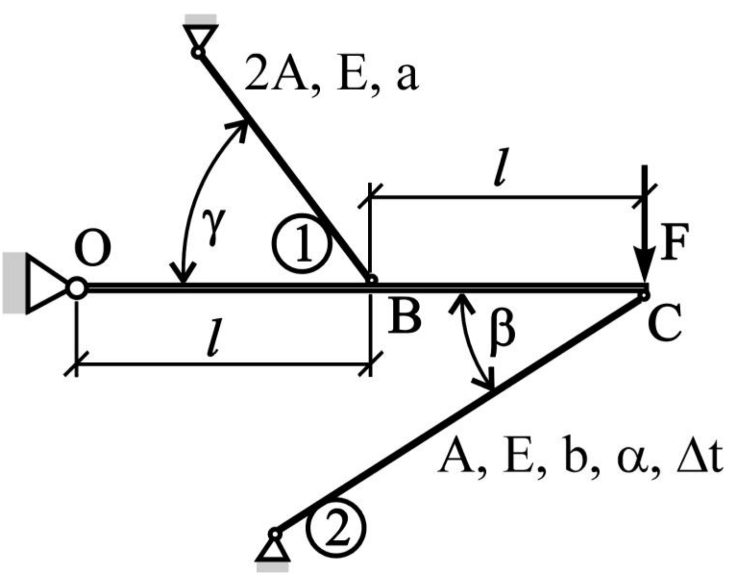
S obzirom da je štap 2 po našoj pretpostavci pritisnut i zagrejan, njegovo skraćenje je:

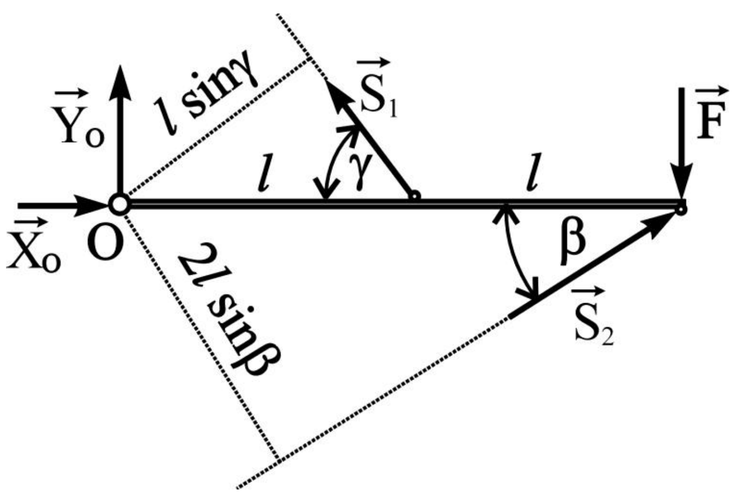
$$\Delta l_2^- = \frac{S_2 b}{AE} - b\alpha\Delta t.$$

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u GUD (**) dobija se dopunska jednačina:

$$\left(\frac{S_2 b}{AE} - b\alpha\Delta t\right)\sin\gamma = \frac{S_1 a}{AE}\sin\beta ...(2)$$

$$\Delta l_2^- \cdot \sin\gamma = 2\cdot\Delta l_1^+ \cdot \sin\beta ...(**)$$





$$S_1 \sin\gamma + 2S_2 \sin\beta = 2F \ldots(1)$$

$$\left(\frac{S_2 b}{AE} - b\alpha\Delta t\right)\sin\gamma = \frac{S_1 a}{AE}\sin\beta \ldots(2)$$

Konačna rešenja:

Statička jednačina (1) i dopunska jednačina (2) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate. Njihovim rešavanjem dobijaju se nepoznate S_1 i S_2 :

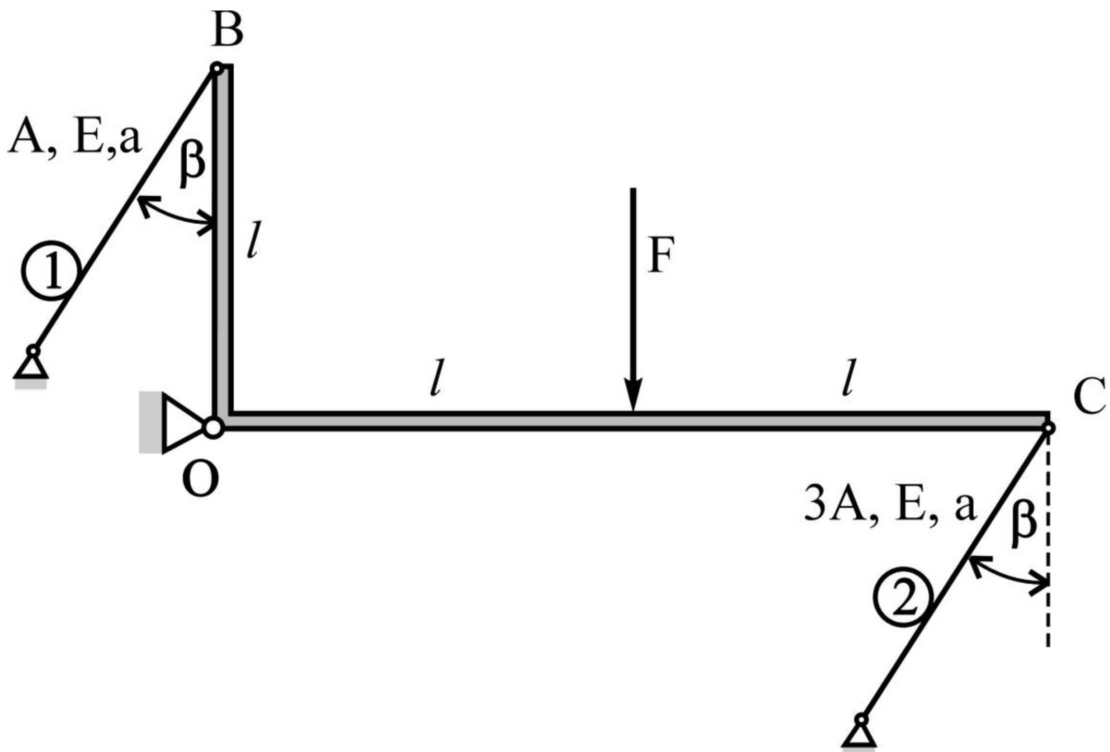
$$S_1 = 2b\sin\gamma \frac{F - AE\alpha\Delta t \sin\beta}{b\sin^2\gamma + 2a\sin^2\beta}, \quad S_2 = \frac{2aF\sin\beta + bAE\alpha\Delta t \sin^2\gamma}{b\sin^2\gamma + 2a\sin^2\beta}.$$

Pošto je rešenje za silu S_2 predznaka +, tačna je pretpostavka da je štap 2 pritisnut. Zbog toga u izrazu za napon u tom štapu, dodaće se predznak -.

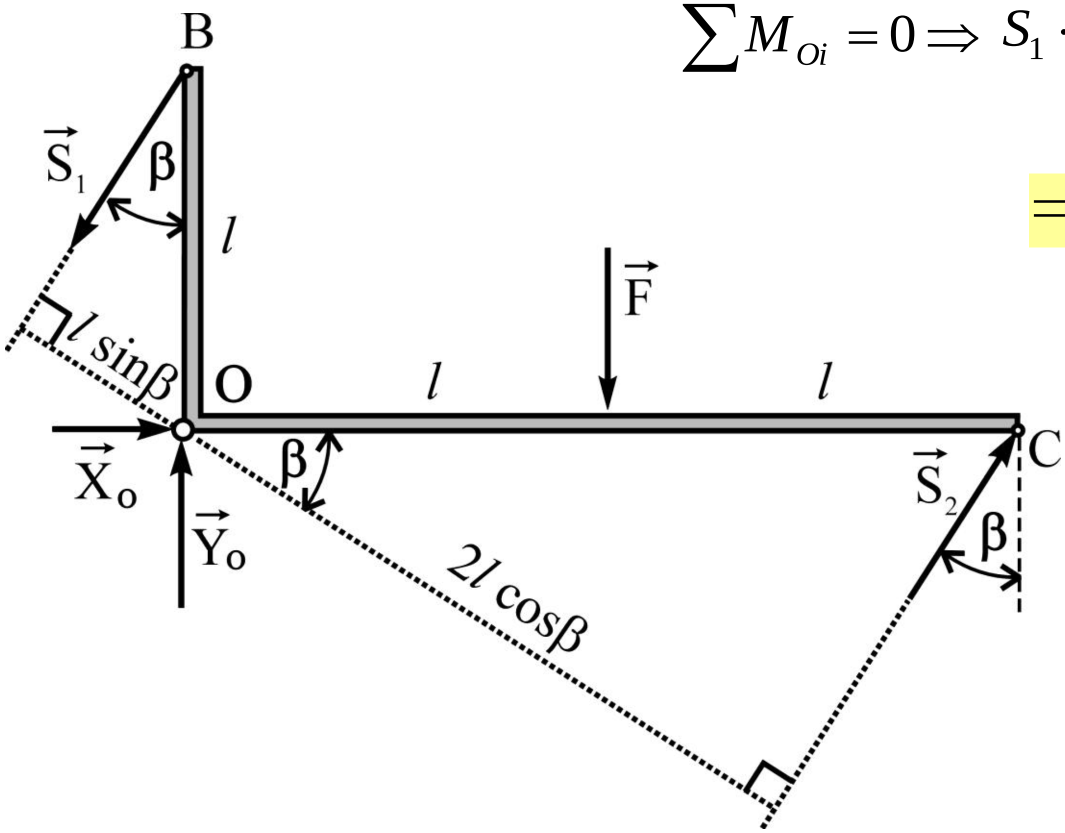
Konačno, na osnovu dobijenih sila S_1 i S_2 , naponi u elastičnim štapovima su:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{2A} = \frac{b\sin\gamma\left(F - AE\alpha\Delta t \sin\beta\right)}{A\left(b\sin^2\gamma + 2a\sin^2\beta\right)}, \quad \sigma_2 = -\frac{S_2}{A} = -\frac{2aF\sin\beta + bAE\alpha\Delta t \sin^2\gamma}{A\left(b\sin^2\gamma + 2a\sin^2\beta\right)}.$$

Primer 1.17 Laki kruti ugaonik, na koji dejstvuje vertikalna sila intenziteta F, može da se obrće oko nepokretnog zgloba O. Njega u ravnoteži održavaju laki elastični štapovi 1 i 2, kao što je na slici prikazano. Površine poprečnih preseka štapova definiše veličina A, modul elastičnosti je E a dužine štapova su a. Odrediti napone u elastičnim štapovima? Veličine: a, F, β, l, A i E su poznate.



Uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na laki krutu ugaonik i dobijanje statičke jednačine u kojoj su jedine nepoznate sile u elastičnim štapovima



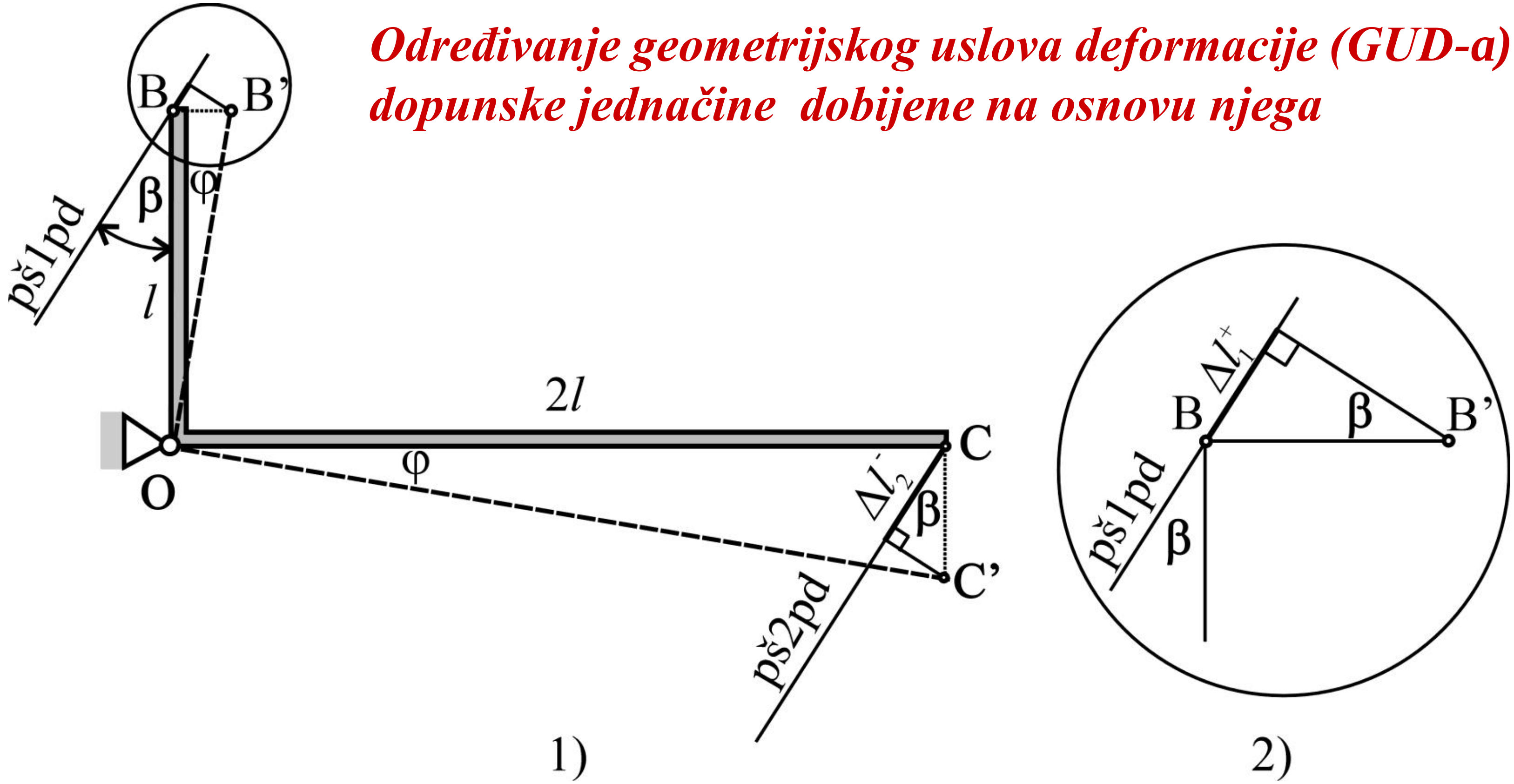
$$\sum M_{Oi} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot l\sin\beta + S_2 \cdot 2l\cos\beta - F \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S_1\sin\beta + 2S_2\cos\beta = F}...(1)$$

Smerovi sila $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su u skladu sa pretpostavkom da je štap 1 zategnut silom S_1, a štap 2 pritisnut silom S_2.

Preostala dva uslova ravnoteže ($\sum X_i = 0$ i $\sum Y_i = 0$) nisu pisana zato što se ne traže reakcije u zglobu.

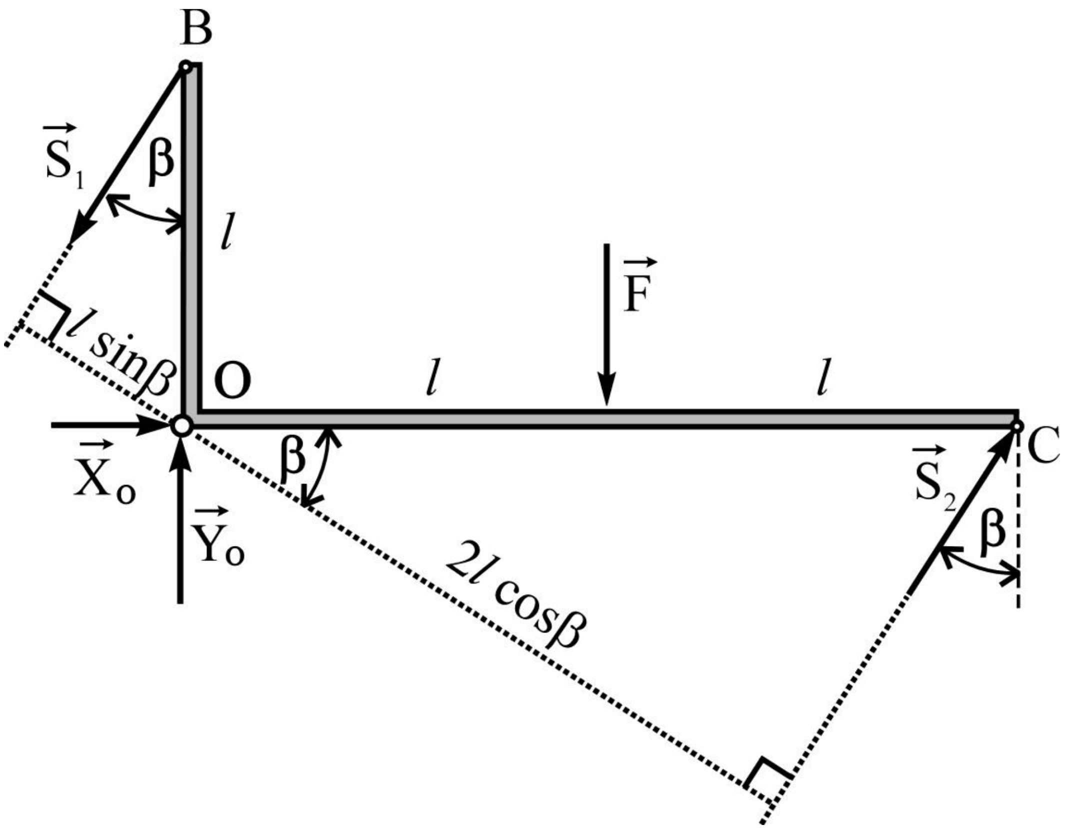
Određivanje geometrijskog uslova deformacije (GUD-a) i dopunske jednačine dobijene na osnovu njega



Zbog pretpostavke da će se ugaonik malo zakrenuti oko nepokretnog zgloba u smeru kazaljke na satu , GUD će u ovom slučaju predstavljati vezu između izduženja štapa 1 (veličine Δl_1^+) i skraćenja štapa 2 (veličine Δl_2^-).

Veza između pomeranja tačaka B i C:

$$\Delta OBB' \sim \Delta OCC' \Rightarrow \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{2l}{l} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'}} ...(*)$$



$$\overline{BB'} = \frac{\Delta l_1^+}{\sin\beta}.$$

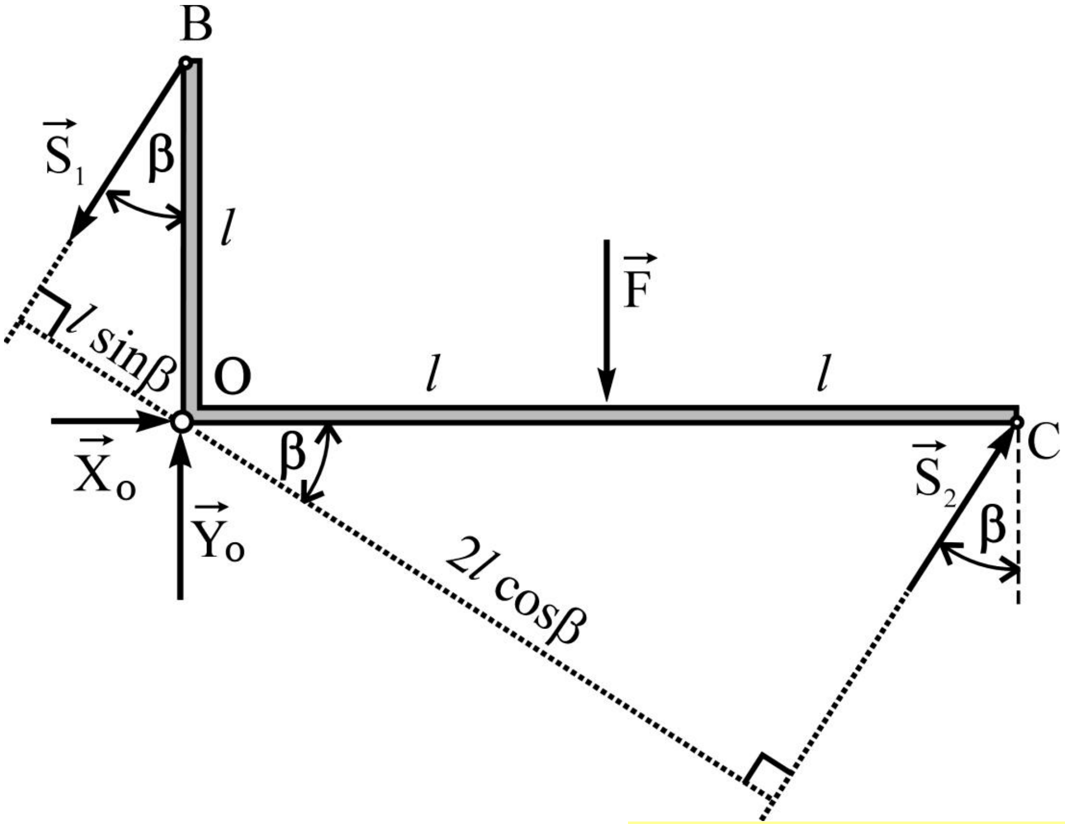
$$\overline{CC'} = \frac{\Delta l_2^-}{\cos\beta}.$$

$$\underline{\overline{CC'} = 2 \cdot \overline{BB'}}...(*)$$

Uvrštavanjem poslednjih jednakosti u (*) dobija se $\underline{\Delta l_2^- \cdot \tan\beta = 2 \cdot \Delta l_1^+}...(**)$

S obzirom da je po pretpostavci štap 1 zategnut a štap 2 pritisnut imamo da je:

$$\Delta l_1^+ = \frac{S_1 a}{AE}, \Delta l_2^- = \frac{S_2 a}{3AE} \Rightarrow \underline{\frac{S_2 a}{3AE}\tan\beta = 2\frac{S_1 a}{AE}}...(2)$$



$$\underline{S_1 \sin\beta + 2S_2 \cos\beta = F}\ldots(1)$$

$$\underline{\frac{S_2 a}{3AE}\tan\beta = 2\frac{S_1 a}{AE}}\ldots(2)$$

Konačna rešenja:

Rešavanjem sistema statičke (1) i dopunske jednačine (2), dobija se:

$$S_1 = \frac{\sin\beta}{1+11\cos^2\beta}F, \quad S_2 = \frac{6\cos\beta}{1+11\cos^2\beta}F \Rightarrow \sigma_1 = \frac{S_1}{A} = \ldots, \ \sigma_2 = -\frac{S_2}{3A} = \ldots$$