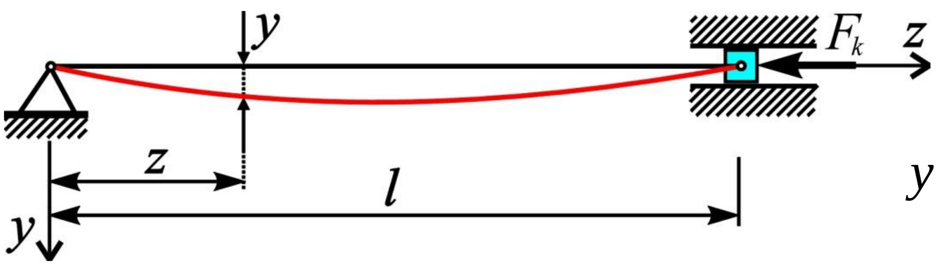
Kritična sila izvijanja

Kritična sila je ona najmanja vrednost sile pritiska pri kojoj nastupa gubitak stabilnosti, odnosno, pri kojoj štap iz stabilne pravolinijske forme ravnoteže prelazi u nestabilnu krivolinijsku (izvija se). Za određivanje kritične sile izvijanja polazi se od činjenice da izvijeni oblik štapa predstavlja elestičnu liniju izazvanu momentom savijanja usled kritične sile. Pretpostavlja se da je štap zanemarljive težine i da je konstantnog poprečnog preseka. Pri izvijanju neutralna osa je osa minimalmnog momenta inercije ($I = I_{min}$).

Određivanje kritične sile izvijanja u četiri Ojlerova slučaja



$$y'' = -\frac{M}{EI_{\min}}, \quad M = F_k \cdot y \Rightarrow$$

$$y'' + \frac{F_k}{EI_{\min}} y = 0 \Rightarrow y'' + k^2 y = 0 \ldots (1),$$

I slučaj-Štap sa zglobovima na krajevima

$$\frac{F_k}{EI_{\min}} = k^2 \Rightarrow F_k = k^2 EI_{\min}.$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1):

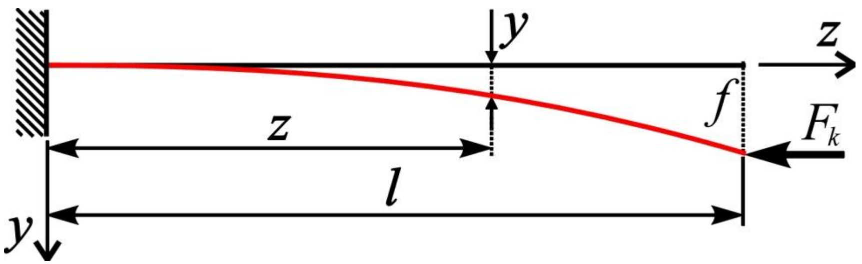
$$y(z) = A\cos kz + B\sin kz$$

Granični uslovi daju: $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$

$$y(l) = 0 \Rightarrow B\sin kl = 0 \Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow k_n l = n\pi$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = \frac{\pi}{l} \quad \Rightarrow \quad F_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

Uzeta je najniža vrednost za n ($n = 1$), a time i za k_n (k_1), jer se traži najmanja vrednost sile F_k.



II slučaj-Štap uklješten na jednom kraju na drugom slobodan

$$y'' = -\frac{M}{EI_{\min}}, \quad M = -F_k \cdot (f - y) \Rightarrow$$

$$y'' + \frac{F_k}{EI_{\min}}(y - f) = 0 \ldots (1)$$

smena $y - f = u, \quad y'' = u'' \quad \Rightarrow \quad u'' + k^2 u = 0 \ldots (2)$

$$\frac{F_k}{EI_{\min}} = k^2 \quad \Rightarrow \quad F_k = k^2 EI_{\min} \, .$$

Na osnovu opšteg rešenja diferencijalne jednačine (2), $u(z) = C\cos kz + D\sin kz$, i smene, $y(z) = f + u(z)$, dobija se:

$$y(z) = f + C\cos kz + D\sin kz, \quad y'(z) = k(-C\sin kz + D\cos kz)$$

Granični uslovi na mestu uklještenja daju:

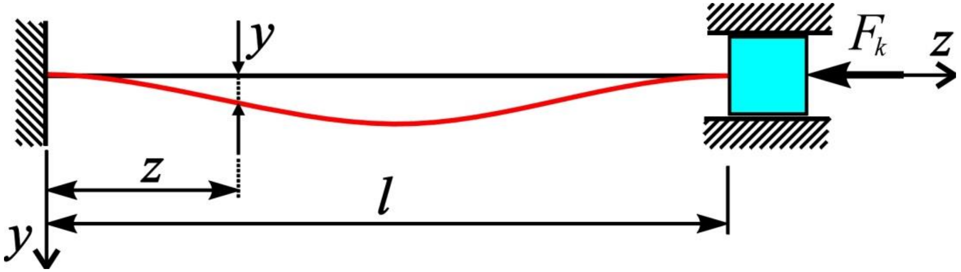
$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; D = 0, \quad y(0) = 0 \;\Rightarrow\; f + C = 0, \quad C = -f \quad \Rightarrow \quad y(z) = f(1 - \cos kz).$$

Granični uslov na slobodnom kraju daje:

$$y(l) = f \Rightarrow \; f = f(1 - \cos kl) \;\Rightarrow\; \cos kl = 0 \;\Rightarrow\; k_n l = \frac{2n-1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = \frac{\pi}{2l} \quad \Rightarrow \quad F_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}.$$

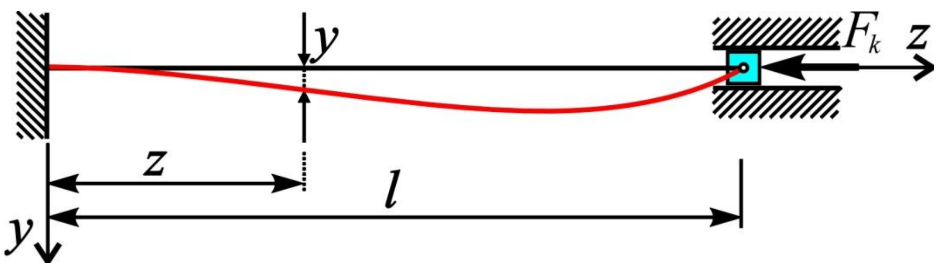
Uzeta je najniža vrednost za n ($n = 1$), a time i za k_n (k_1), jer se traži najmanja vrednost sile F_k.



III slučaj-Štap uklješten na oba kraja

Za slučaj obostrano uklještenog štapa kritična sila izvijanja ima vrednost

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



IV slučaj-Štap uklješten na jednom kraju a na drugom slobodno vođen

Za slučaj štapa uklještenog na jednom kraju a na drugom sa zglobom kritična sila izvijanja ima vrednost

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2}$$

Generalno, za sva četiri Ojlerova slučaja kritičnu silu izvijanja definiše izraz

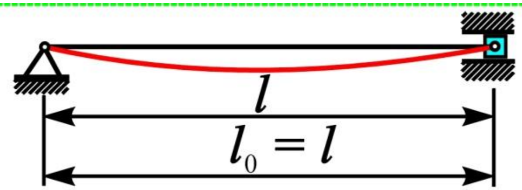
$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_0^2}.$$

l_0 – slobodna dužina izvijanja

l_0 – slobodna dužina izvijanja geometrijski predstavlja dužunu polutalasa između dve susedne prevojne tačke elastične linije štapa.

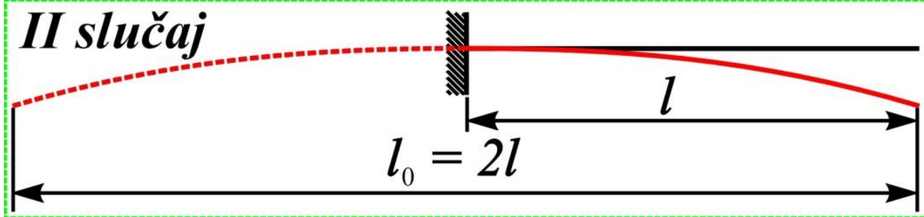
Slobodne dužine izvijanja u četiri Ojlerova slučaja:

I slučaj



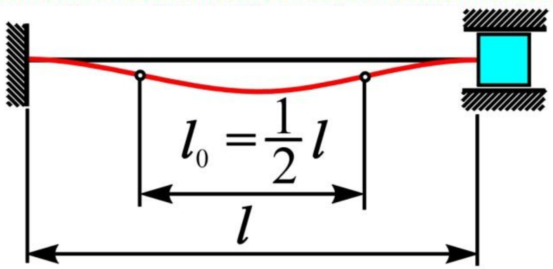
$$l_0 = l$$

II slučaj



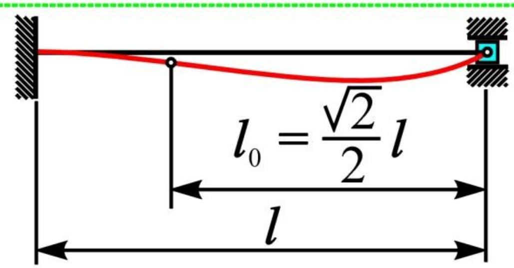
$$l_0 = 2l$$

III slučaj



$$l_0 = \frac{1}{2} l = 0{,}5 l$$

IV slučaj



$$l_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} l \approx 0{,}7 l$$

Kritični napon pri izvijanju.

Kritični napon pri izvijanju σ_k predstavlja odnos između kritične sile F_k i površine poprečnog preseka A:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} \Rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 E \frac{I_{\min}}{A}}{l_0^{\,2}} \Rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{l_0^{\,2}}, \quad i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{A}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \Rightarrow$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_0}{i_{\min}}\right)^2} \Rightarrow \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^{\,2}}, \quad \lambda_0 = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

$i_{\min}$ – minimalni poluprečnik inercije poprečnog preseka

λ_0 – vitkost štapa

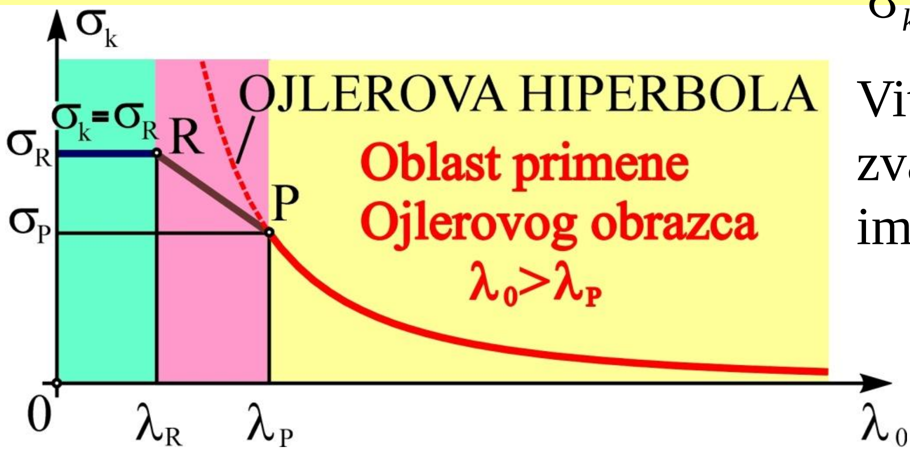
Iz dobijenog izraza, vidi se da kritični napon opada sa kvadratom vitkosti, zbog čega kod tankih i dugačkih štapova može imati sasvim male vrednosti, daleko niže od dozvoljenog napona pri čistom pritisku.

Granica važenja Ojlerovih obrazaca.

Jednačina $\sigma_k = \pi^2 E / \lambda_0^{\,2}$ predstavljena grafički naziva se Ojlerovom hiperbolom. Na apscisi se nanosi vitkost λ_o a na ordinati kritični napon σ_k.

Ojlerov obrazac za kritičnu silu primenjuje se sa izvesnim ograničenjima. Obrazac je izveden iz diferencijalne jednačine elastične linije, koja važi za područje elastičnih deformacija (u granicama Hukovog zakona). Prema ovome obrazac se može koristiti za kritične napone σ_k koji su niži od granice proporcionalnosti σ_P pri pritisku za dotični materijal:

$$\sigma_k \le \sigma_P \Rightarrow \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^{\ 2}} \le \sigma_P \ \Rightarrow \ \lambda_0 \ge \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}}.$$



Vitkost na granici proporcionalnosti λ_P zvaćemo i graničnom vitkošću λ_{gr}, pa imamo:

$$\lambda_P = \lambda_{gr} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} \ \Rightarrow \ \lambda_0 \ge \lambda_P.$$

Dakle, oblast primene Ojlerovog obrasca je $\lambda_0 \ge \lambda_P.$

Veličina λ_R označava onu vitkost pri kojoj kritični napon dostiže granicu razvlačenja σ_R kod plastičnih materijala, odnosno, granicu čvrstoće σ_M kod krtih materijala.

Na osnovu mnogobrojnih opita Tetmajera, Jasinskog i drugih, utvrđeno je:

a) U oblasti $\lambda_R < \lambda_0 < \lambda_P$ kritični napon je linearna funkcija vitkosti i ima oblik $\sigma_k = a - b\lambda_0$, gde si *a* i *b* koeficijenti koji zavise od vrste materijala.

b) U oblasti $0 < \lambda_0 < \lambda_R$ uzima se da je kritični napon približno konstantan i jednak granici razvlačenja $\sigma_k = \sigma_R$.

Pri proračunu se mora voditi računa da štap ima i izvesnu sigurnost protiv izvijanja. Odnos **$(F_k/F)=n_k$** naziva se **stepen sigurnosti pri izvijanju** ili **stepen stabilnosti** i označava broj koji pokazuje koliko puta je manja dozvoljena aksijalna sila pritiska F od kritične sile F_k.

Orijentacione vrednosti za stepen sigurnosti pri izvijanju n_k
Za čelik 1.5-3 i više
Za drvo 2.5-3.5 i više
Za liveno gvožđe 4.5-5.5 i više

Za područje elastičnosti $(\lambda_0>\lambda_p)$

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_0^2}, \quad F = \frac{F_k}{n_k} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{n_k l_0^2}$$

Neka je σ_{dk} dozvoljeni napon pri izvijanju, onda je $\sigma_{dk} = \dfrac{\sigma_k}{n_k} = \dfrac{\pi^2 E}{n_k \lambda_0^2}$

Za područje plastičnosti gde je $\lambda_R<\lambda_0<\lambda_p$

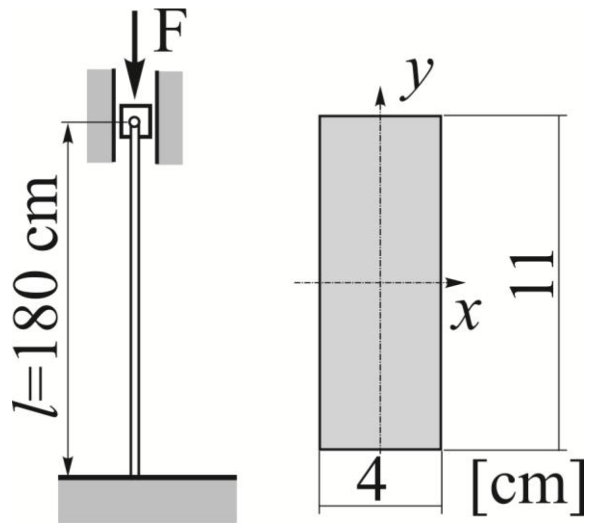
$$F_k = A\cdot\sigma_k = A(a-b\lambda_0)$$

$$F = \frac{F_k}{n_k} = \frac{A}{n_k}(a-b\lambda_0) \qquad \sigma_{dk} = \frac{\sigma_k}{n_k} = \frac{1}{n_k}(a-b\lambda_0)$$

Za područje plastičnosti gde je $0<\lambda_0<\lambda_R$

$$F_k = A\cdot\sigma_k = A\cdot\sigma_R \qquad F=\frac{F_k}{n_k}=\frac{A\sigma_R}{n_k} \qquad \sigma_{dk}=\frac{\sigma_k}{n_k}=\frac{\sigma_R}{n_k}$$

Primer 10.1. Odrediti nosivost štapa zadatog preseka ako je stepen sigurnosti $n_k=2.5$. Ostali podaci: E=210 GPa, $\sigma_R=240\text{MPa}$,



Rešavanje zadatka:

Površina poprečnog preseka

$$A = 11\cdot 4 = 44\ \text{cm}^2$$

Minimalni moment inercije

$$I_{min} = I_y = \frac{11\cdot 4^3}{12} = 58.67\ \text{cm}^4$$

Maksimalni moment inercije

$$I_{max} = I_x = \frac{4\cdot 11^3}{12} = 443.67\ \text{cm}^4$$

Minimalni i maksimalni poluprečnik inercije

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{58.67}{44}} = 1.155\ \text{cm}$$

$$i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{443.67}{44}} = 3.175\ \text{cm}$$

Slobodna dužina izvijanja $l_0 = 0.7 \cdot l = 126\ \mathrm{cm}$

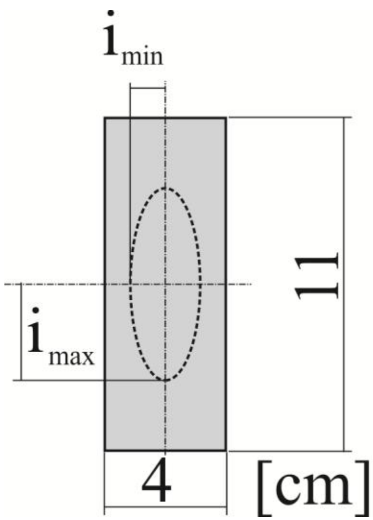
Vitkost $\lambda_0 = \dfrac{l_0}{i_{min}} = \dfrac{126}{1.155} = 109.09$ Pošto je $\lambda_0 > \lambda_p$ važe Ojlerovi obrasci

Merodavan kritični napon

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9}{109.09^2} = 17.416 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa} = 17416\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}$$

Nosivost stuba

$$F = \frac{F_k}{n_k} = \frac{\sigma_k \cdot A}{n_k} = \frac{17416\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} \cdot 44\ \mathrm{cm}^2}{2.5} = 306521.6\mathrm{N} = 306.5216\ \mathrm{kN}$$



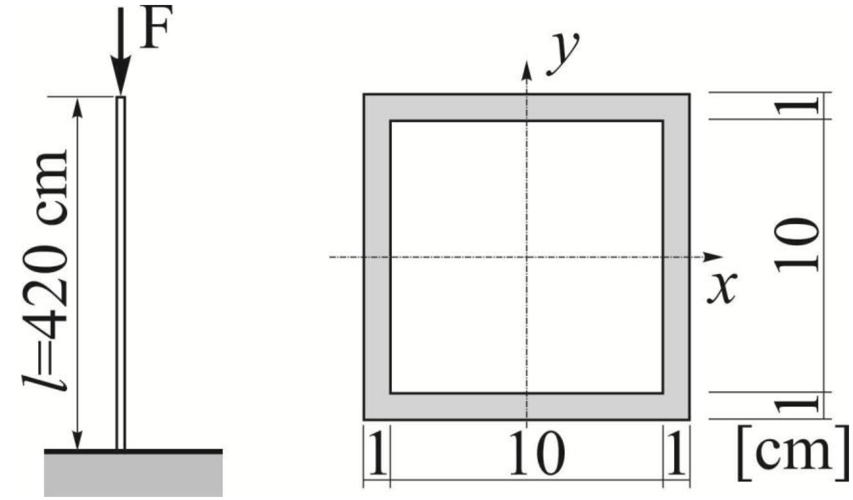
$i_{min} = 1.155$ cm

$i_{max} = 3.175$ cm

Elipsa inercije

Primer 10.2. Odrediti nosivost štapa zadatog preseka ako je stepen sigurnosti n_k=2.5. Ostali podaci: E=210 GPa,

$$\sigma_k^{Tetmajer} = \sigma_k^T = 310 - 1.14\lambda_0 \text{ [MPa]}$$



Rešavanje zadatka:

Površina poprečnog preseka

$$A = 12^2 - 10^2 = 44 \text{ cm}^2$$

Minimalni moment inercije $I_{min} = I_x = I_y = \dfrac{12 \cdot 12^3}{12} - \dfrac{10 \cdot 10^3}{12} = 894.67 \text{ cm}^4$

Minimalni poluprečnik inercije $i_{min} = \sqrt{\dfrac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\dfrac{894.67}{44}} = 4.509 \text{ cm}$

Slobodna dužina izvijanja $l_0 = 2 \cdot l = 840 \text{ cm}$

Vitkost $\lambda_0 = \dfrac{l_0}{i_{min}} = \dfrac{840}{4.509} = 186.29$

Pošto je $\lambda_0 > \lambda_p$ važe Ojlerovi obrasci

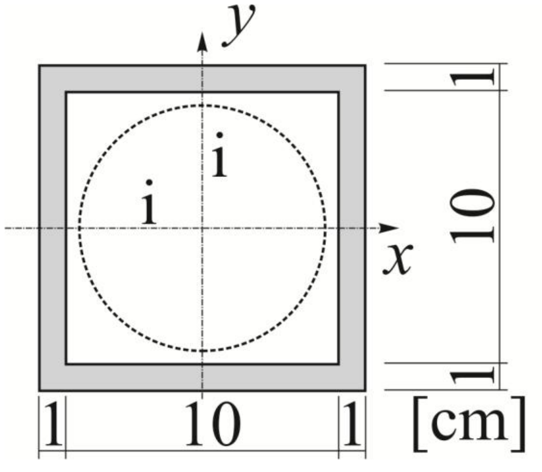
Merodavan kritični napon

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9}{186.29^2} = 5.9723 \cdot 10^7 \,\mathrm{Pa} = 5972.3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}$$

Nosivost stuba

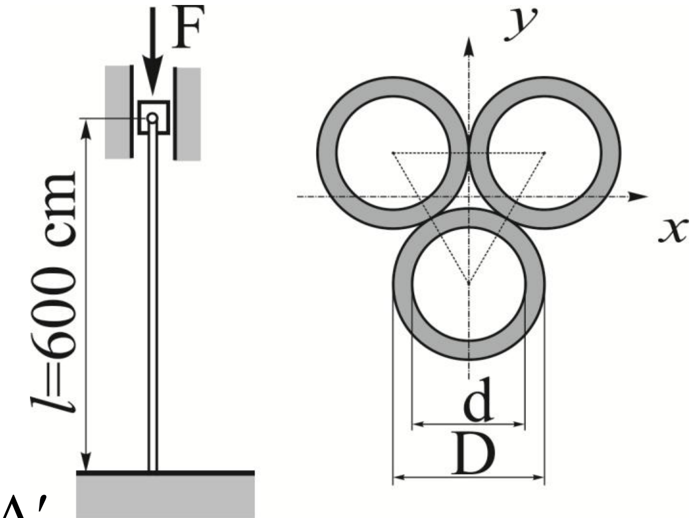
$$F = \frac{F_k}{n_k} = \frac{\sigma_k \cdot A}{n_k} = \frac{5972.3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} \cdot 44 \,\mathrm{cm}^2}{2.5} = 105110 \,\mathrm{N} = 105.11 \,\mathrm{kN}$$

Elipsa (krug) inercije



$$i_{min} = i_{max} = i = 4.509 \text{ cm}$$

Primer 10.3. Poprečni presek stuba su tri istovetne čelične međusobno spojene cevi. Odrediti nosivost stuba za podatke: D=7.5 cm, d=(3/4)D=5.625 cm, l=600 cm, n_k=3, E=210 GPa, λ_p=105.



Rešavanje zadatka:

Površina poprečnog preseka jedne cevi je A′

$$A' = \frac{(D^2 - d^2)\pi}{4} = 19.328\ \mathrm{cm}^2$$

Ukupna površina poprečnog preseka je A

$$A = 3A' = 57.984\ \mathrm{cm}^2$$

Minimalni moment inercije (isti je kao i maksimalni)

$$I_{min} = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} + 2\left[\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} + A'\left(\frac{D}{2}\right)^2\right] = 862.12\ \mathrm{cm}^4$$

Minimalni poluprečnik inercije $i_{min} = i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{862.12}{57.984}} = 3.8559\ \mathrm{cm}$

Slobodna dužina izvijanja $l_0 = 0.7 \cdot l = 420\ \mathrm{cm}$

Vitkost $\lambda_0 = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{420}{3.8559} = 108.92$ Pošto je $\lambda_0 > \lambda_p$ važe Ojlerovi obrasci

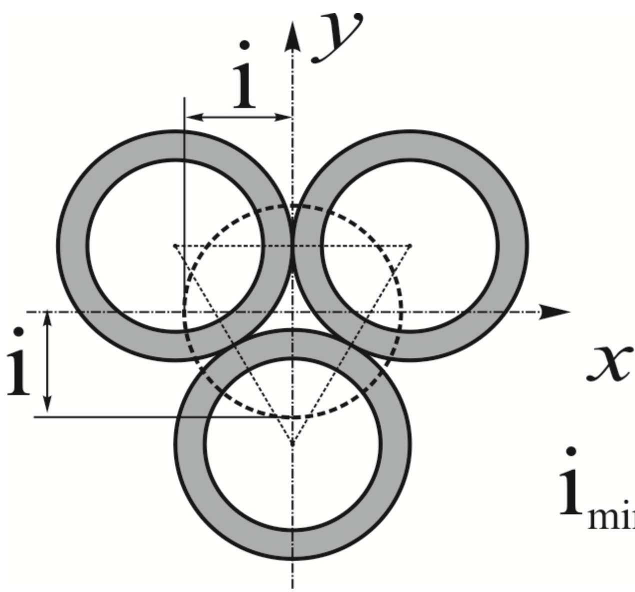
Merodavan kritični napon

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9}{108.92^2} = 17.4704 \cdot 10^7 \,\mathrm{Pa} = 17470.4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2}$$

Nosivost stuba

$$F = \frac{\sigma_k \cdot A}{n_k} = \frac{17470.4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}^2} \cdot 57.984 \,\mathrm{cm}^2}{3} = 337667.9 \,\mathrm{N} = 337.6679 \,\mathrm{kN}$$

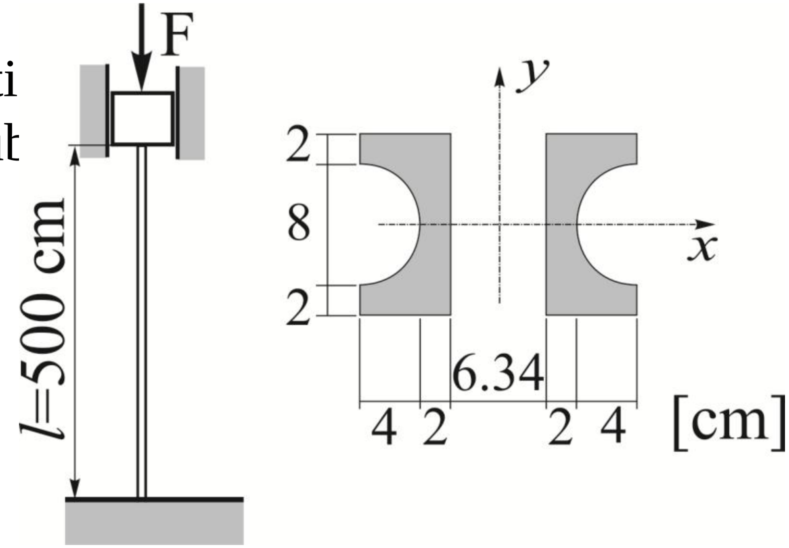
Elipsa (krug) inercije



$$i_{min} = i_{max} = i = 3.8559 \,\mathrm{cm}$$

Primer 10.4. Za zadat dvojni stub odrediti stepen sigurnosti na izvijanje n_k ako je stub opoterećen silom F=600 N. Podaci su:
E=210 GPa, λ_p=105, $\sigma_R = 240 \mathrm{MPa}$

$$\sigma_k^{\mathrm{Tetmajer}} = \sigma_k^{\mathrm{T}} = 310 - 1.14\lambda_0 \ [\mathrm{MPa}]$$



Rešavanje zadatka:

Površina poprečnog preseka je A

$$A = 2 \cdot 12 \cdot 6 - 4^2 \pi = 93.735 \ \mathrm{cm}^2$$

Moment inercije za glavne ose

$$I_x = 2\frac{12 \cdot 12^3}{12} - \frac{4^4 \pi}{4} = 1526.9 \ \mathrm{cm}^4 = I_{min}, \qquad I_y = I_{max}$$

$$I_y = \frac{12 \cdot 18.34^3}{12} - \frac{12 \cdot 6.34^3}{12} - 2\left[\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)4^4 + \frac{4^2 \pi}{2}\left(6 + \frac{6.34}{2} - \frac{4 \cdot 4}{3\pi}\right)^2\right] = 3051.1 \ \mathrm{cm}^4$$

Minimalni i maksimalni poluprečnik inercije

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1526.9}{93.735}} = 4.036 \ \mathrm{cm}, \qquad i_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{A}} = \sqrt{\frac{3051.1}{93.735}} = 5.7053 \ \mathrm{cm}$$

Slobodna dužina izvijanja $l_0 = 0.5 \cdot l = 250$ cm

Vitkost $\lambda_0 = \dfrac{l_0}{i_{min}} = \dfrac{250}{4.036} = 61.943$

Pošto je $\lambda_0 < \lambda_p$ ne važe Ojlerovi obrasci, i ako je $\sigma_k < \sigma_R$ kritični napon određujemo po Tetmajeru:

BR.	MATERIJAL daN/cm²	PODRUČJE $0 < \lambda_0 < \lambda_R$ σ_K daN/cm²	$\lambda_R < \lambda_0 < \lambda_p$ σ_K daN/cm²	λ_p	λ_R
1	ugljenični čelik $\sigma_M = 3800$, $\sigma_R = 4800$ -"-	2400	$3100 - 11,4\lambda_0$	105	61,4
2	ugljenični čelik $\sigma_M = 4800$, $\sigma_R = 3120$ -"-	3120	$4690 - 26,175\lambda_0$	100	60
3	silicijumov čelik $\sigma_M = 5200$, $\sigma_R = 3600$ -"-	3600	$5890 - 38,175\lambda_0$	100	60
4.	Hrom molibden čelik	10.000	$10000 - 54\lambda_0$	55	0
5	Duraluminium	3800	$3800 - 21,85\lambda_0$	50	0
6	Drvo (četinari)	400	$400 - 2,03\lambda_0$	59	0
7	Sivo liveno gvoždje	7760	$7760 - 120\lambda_0 + 0,53\lambda_0^2$	80	0

$$\sigma_k = 310 - 1.14 \cdot 61.943 = 239.38 \text{ MPa} < 240 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_k = 23938 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

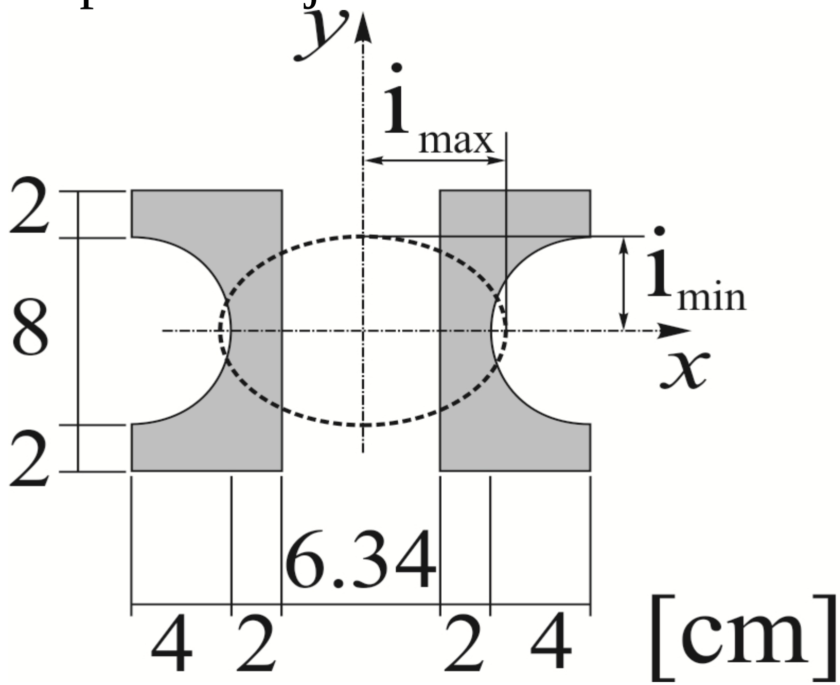
Kritična sila izvijanja

$$F_k = \sigma_k \cdot A = 23938 \cdot 93.735 = 2243800\,\text{N} = 2243.0\,\text{kN}$$

Stepen sigurnosti na izvijanje

$$n_k = \frac{F_k}{F} = \frac{2243.8}{600} = 3.7397$$

Elipsa inercije



$i_{min} = 4.036$ cm

$i_{max} = 5.7053$ cm