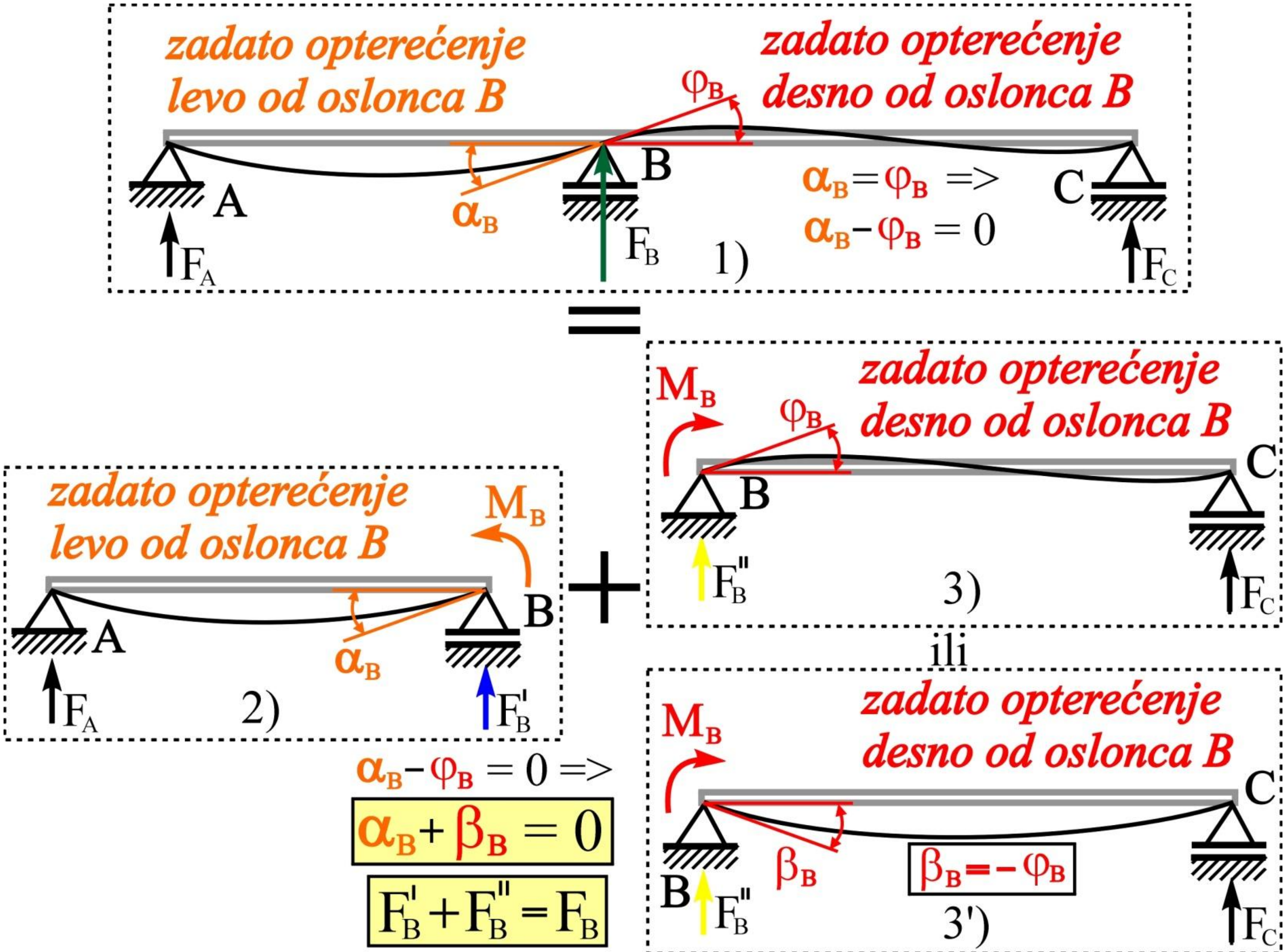
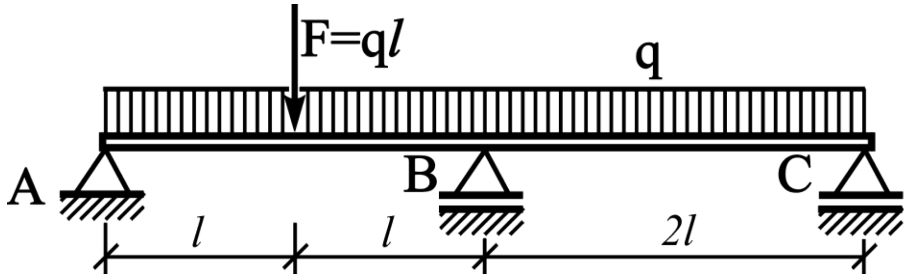
Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina



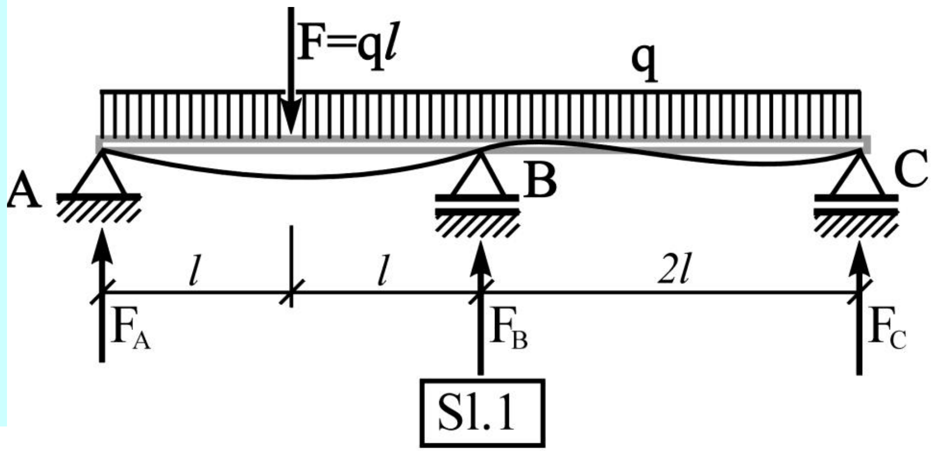
Pokažimo ideju ove metode kod statički neodređene grede na tri oslonca (Sl.1). Ovde se koristi činjenica da je elastična linija glatka kriva bez preloma (bez promene nagiba) na mestu srednjeg oslonca ($\alpha_B = \varphi_B$). Zamislimo da smo gredu AC presekli na mestu srednjeg oslonca i dobili dve proste grede AB i BC (Sl.2 i Sl.3). Na svaku od dobijenih prostih greda, na mestu B, dejstvuje, po principu akcije i reakcije, moment M_B kojeg ćemo nazivati statički prekobrojnom veličinom. Ovaj moment je zapravo moment savijanja u preseku. U tom preseku se, po principu akcije i reakcije, takođe javlja transverzalna sila, koja nam ovde nije od značaja jer ne izaziva deformaciju. Međutim, posledica njenog postojanja su, na levoj prostoj gredi sila F_B', na desnoj F_B'', gde je $F_B' + F_B'' = F_B$. Obično se iz praktičnih razloga umesto Sl.3 koristi Sl.3‘, tj. umesto ugla nagiba φ_B koristi β_B, tako da GUD ima oblik $\alpha_B + \beta_B = 0$.

Principa superponiranja deformacija za levu prostu gredu (Sl.2) određuje α_B u zavisnosti od statički prekobrojne veličine i zadatog opterećenja levo od oslonca B a za desnu prostu gredu (Sl.3‘) određuje β_B u zavisnosti od statički prekobrojne veličine i zadatog opterećenja desno od oslonca B. Dopunska jednačina, dobijena iz GUD-a, odrediće statički prekobrojnu veličinu M_B, nakon čega će statički uslovi ravnoteže moći da odrede nepoznate F_A, F_B i F_C.

Primer 4.11 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod "Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina". Poznate veličine su q i *l*.

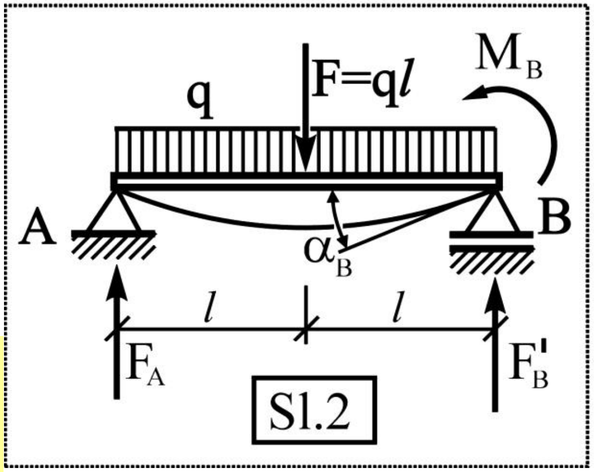


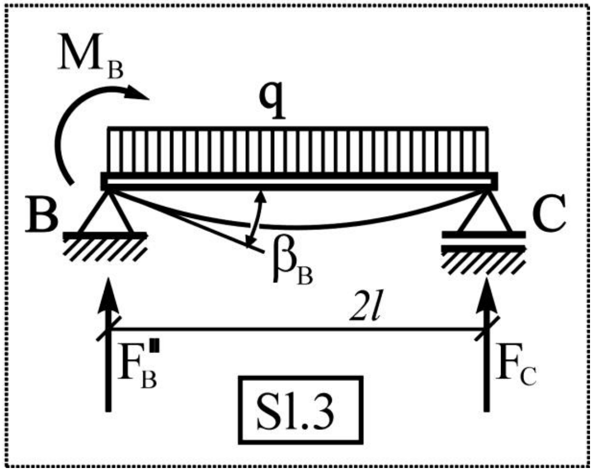
Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i F_C, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.



Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B:

$$2\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + 2\frac{q\cdot(2l)^3}{24EI} + \frac{ql\cdot(2l)^2}{16EI} = 0.$$





Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\beta_B = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI},$$

$$\alpha_3 = \frac{ql \cdot (2l)^2}{16EI}.$$

Rešenje dobijene jednačine je:

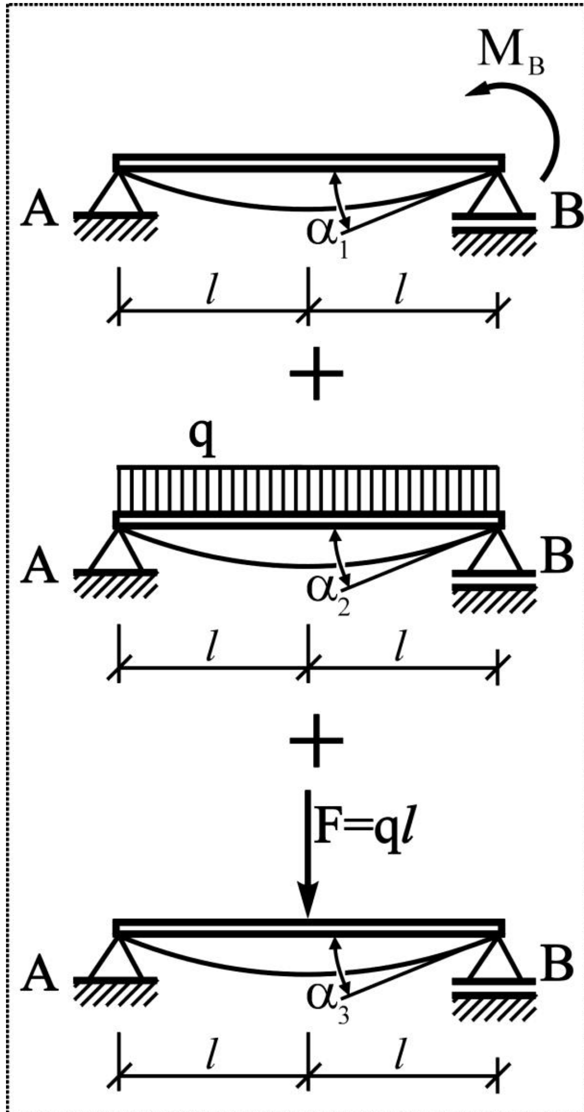
$$M_B = -\frac{11}{16} ql^2.$$

Određivanje otpora oslonaca:

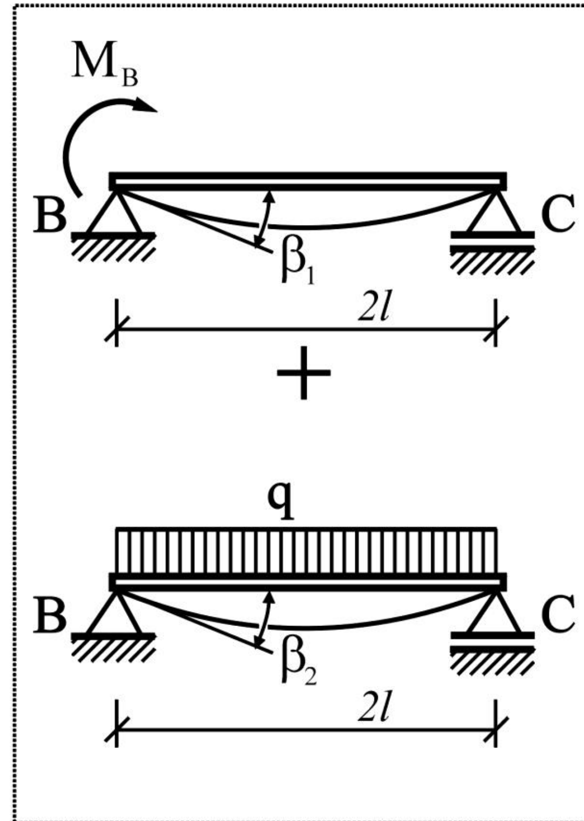
$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow$$

$$ql \cdot l + q \cdot 2l \cdot l - F_A \cdot 2l +$$

$$+M_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{37}{32} ql.$$



deformacije uz Sl.2

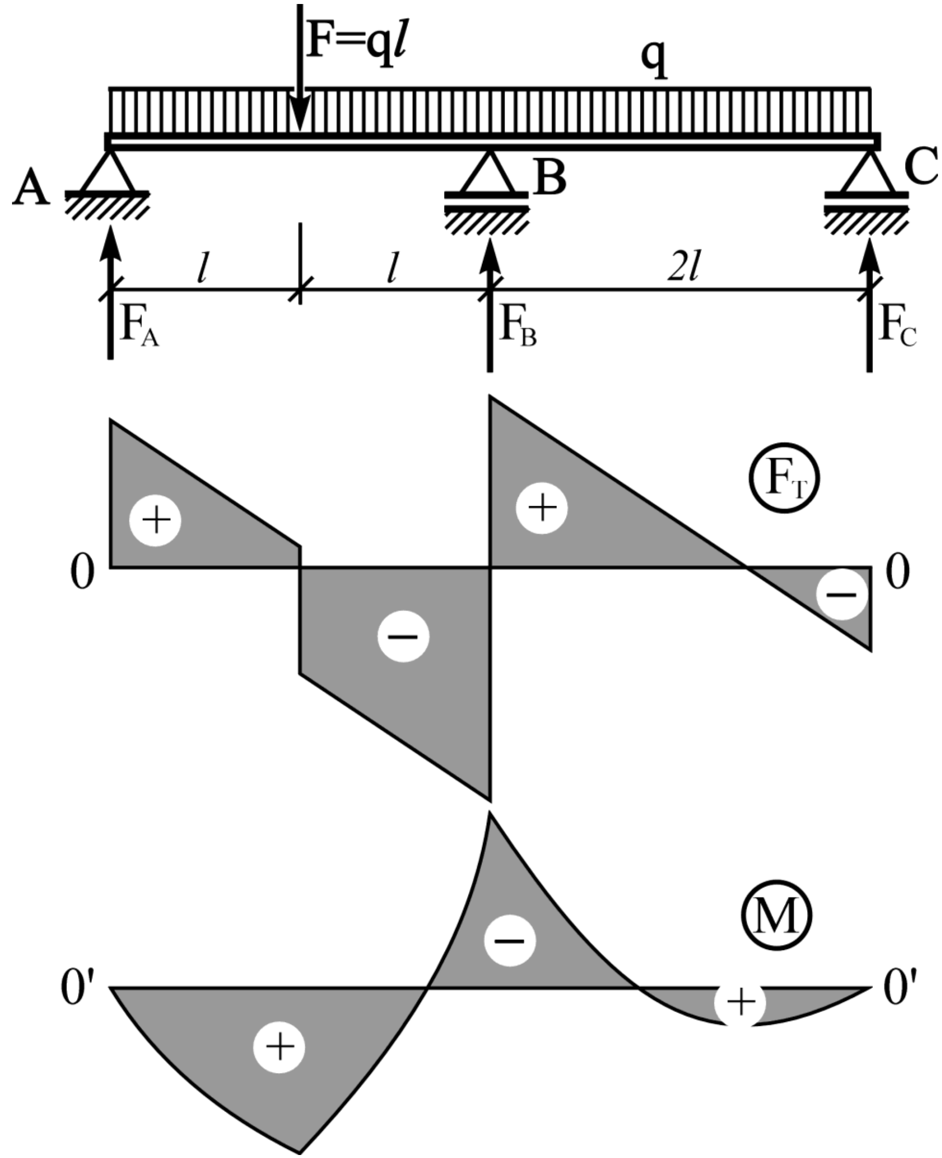


deformacije uz Sl.3

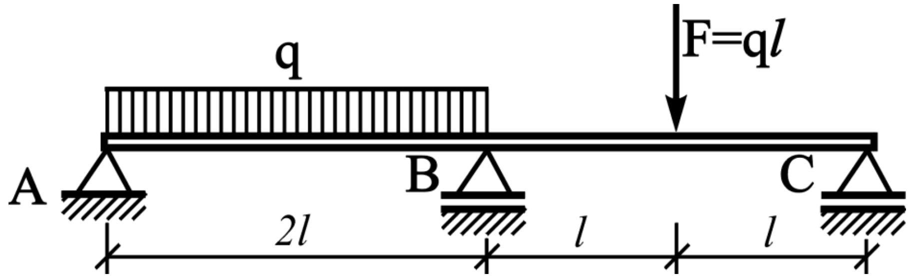
$$\text{Sl.3} \Rightarrow \sum M_{Bi} = -q \cdot 2l \cdot l + F_C \cdot 2l - M_B = 0 \Rightarrow F_C = \frac{21}{32} ql.$$

$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = F_A + F_B + F_C - F - q \cdot 4l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{51}{16} ql.$$

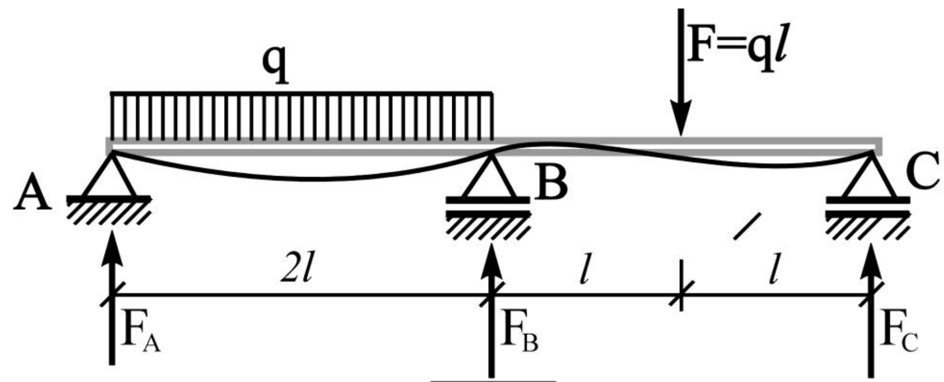
Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.



Primer 4.12 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod ”Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina”. Poznate veličine su q i *l*.



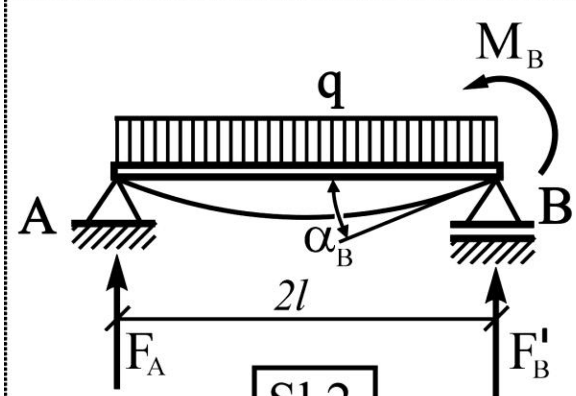
Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A , F_B i F_C , i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.



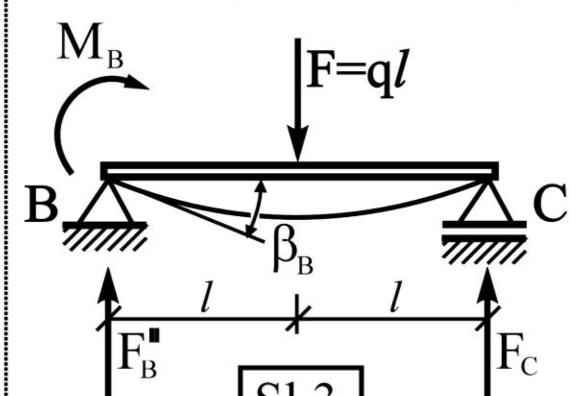
Sl.1

Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

$$2\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + \frac{q\cdot(2l)^3}{24EI} + \frac{ql\cdot(2l)^2}{16EI} = 0.$$



Sl.2



Sl.3

Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_B = \beta_1 + \beta_2,$$

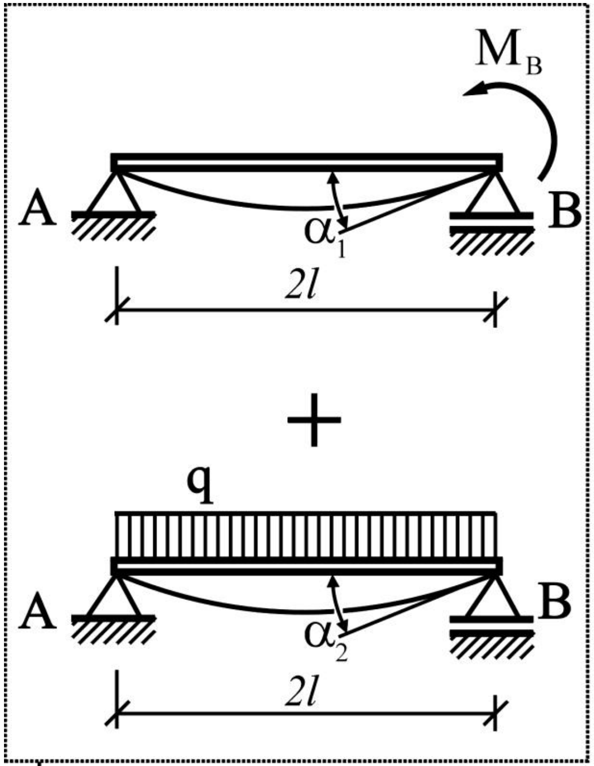
$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\alpha_2 = \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI},$$

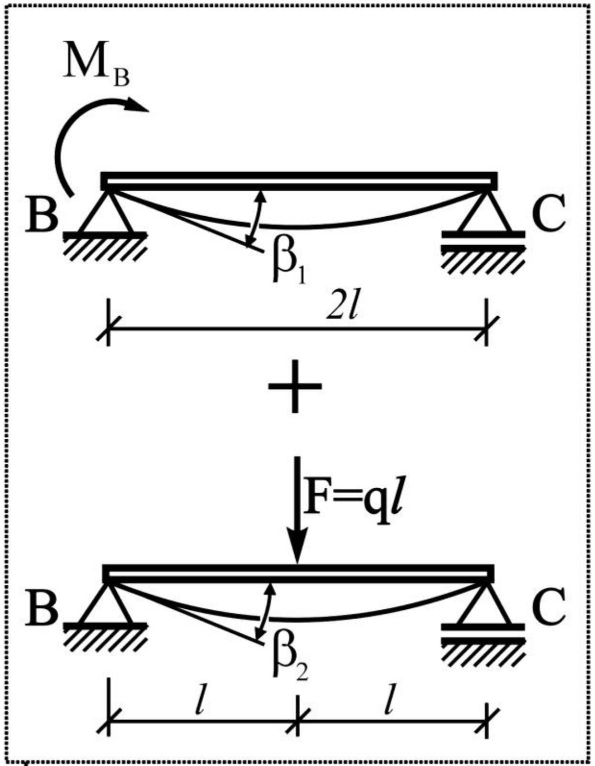
$$\beta_2 = \frac{ql \cdot (2l)^2}{16EI}.$$

Rešenje dobijene jednačine je:

$$M_B = -\frac{7}{16} ql^2.$$



deformacije uz Sl.2



deformacije uz Sl.3

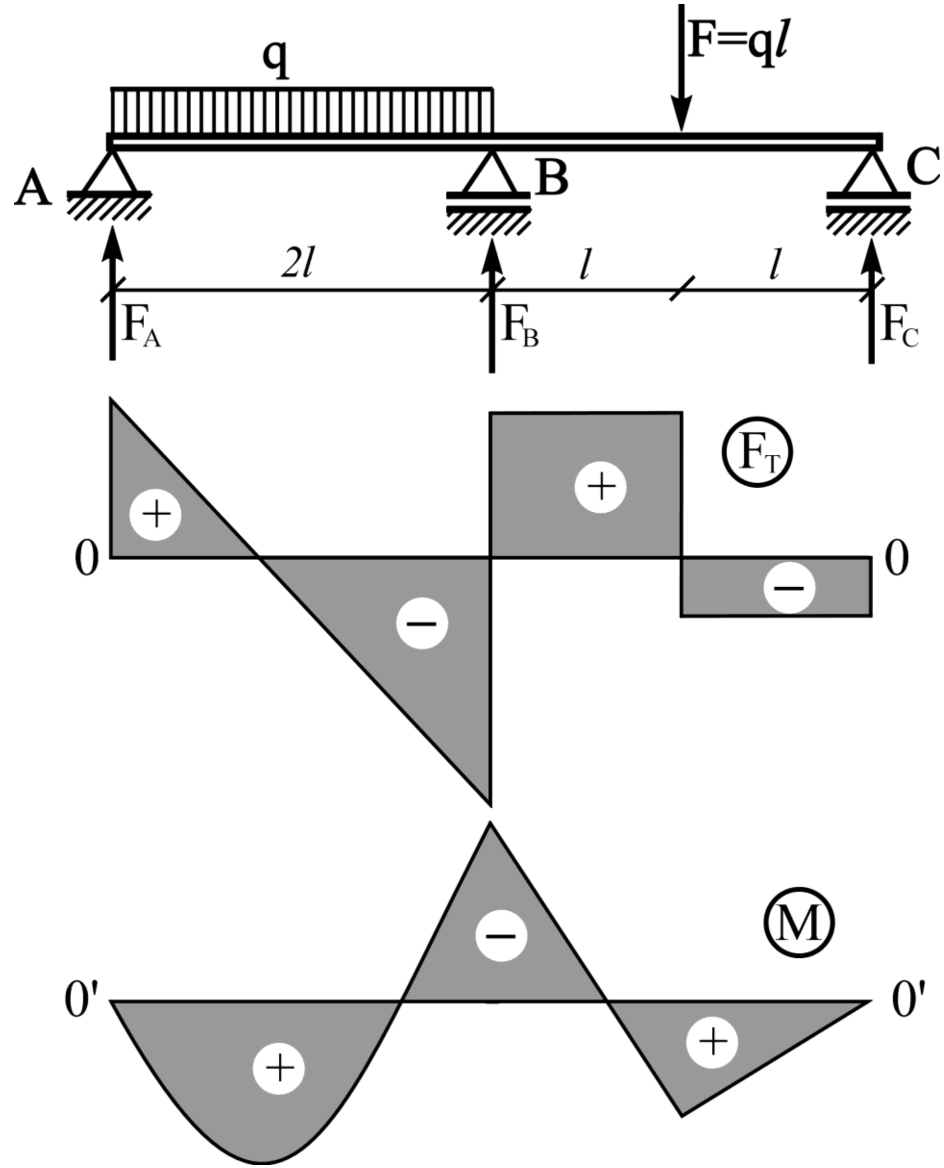
Određivanje otpora oslonaca:

$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow \quad q \cdot 2l \cdot l - F_A \cdot 2l + M_B = 0 \Rightarrow \quad F_A = \frac{25}{32} ql.$$

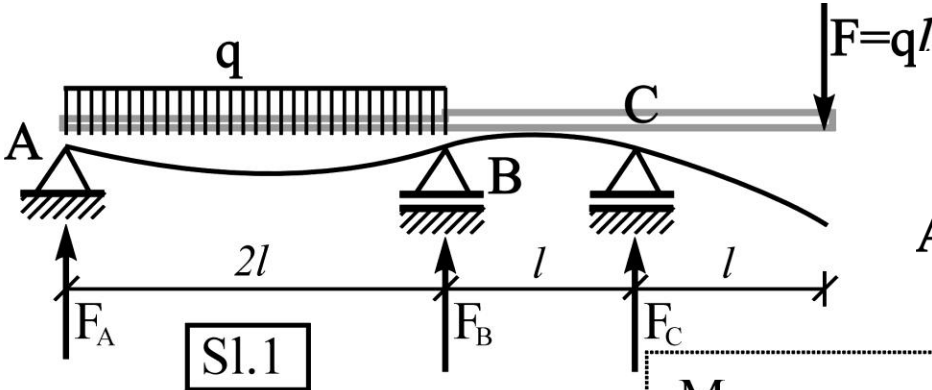
$$\text{Sl.3} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow \quad -ql \cdot l + F_C \cdot 2l - M_B = 0 \Rightarrow \quad F_C = \frac{9}{32} ql.$$

$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow \quad F_A + F_B + F_C - F - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow \quad F_B = \frac{31}{16} ql.$$

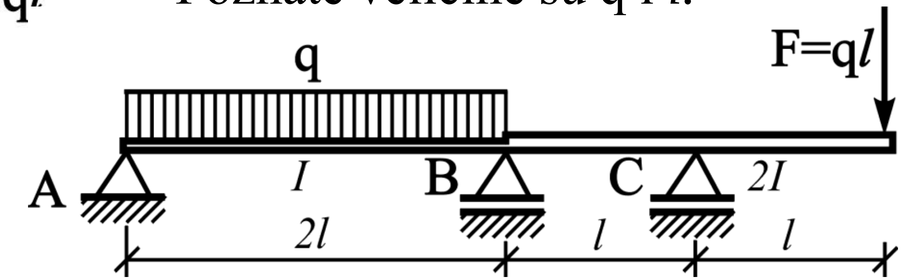
Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.

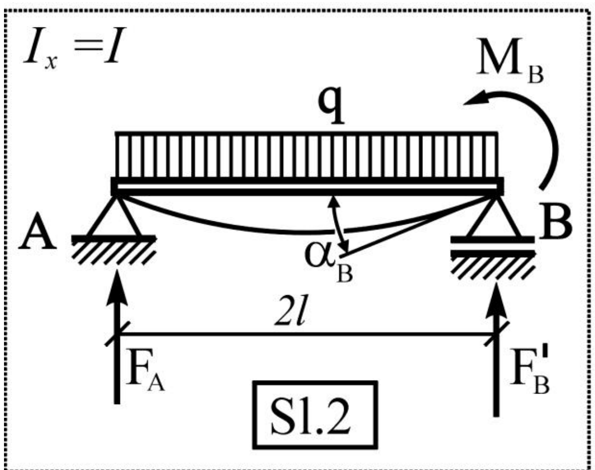


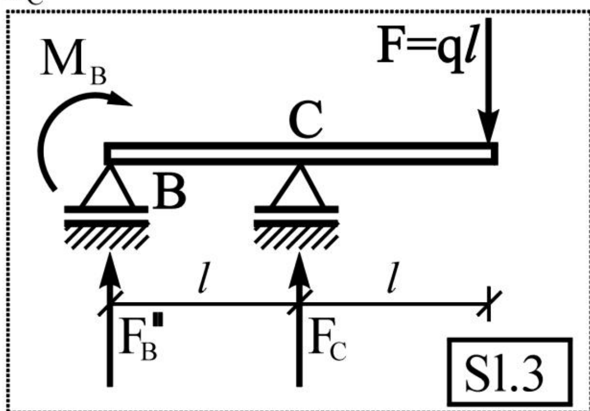
Primer 4.13 Za zadati statički neodređen gredni nosač, sa dva različita poprečna preseka, momenata inercije za neutralnu osu *I* i *2I*, odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod ”Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina”.

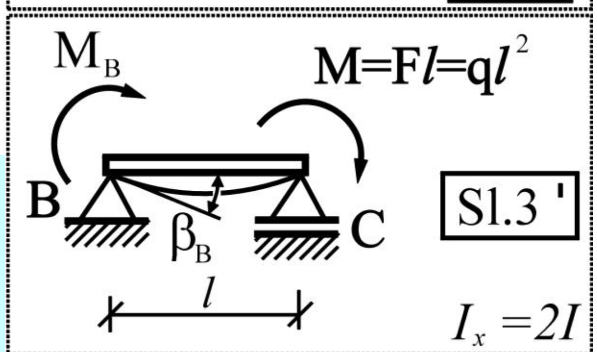


Poznate veličine su q i *l*.









Zamišljenim presecanjem nosača kod oslonca B dobijaju se dve grede, prikazane na slikama 2 i 3 sa uravnoteženim sistemima sila i spregova koji na njih dejstvuju. Kao i u svim ovim primerima ni F_B', ni F_B'' nije F_B, već je $F_B = F_B' + F_B''$.

Za određivanje deformacija između oslonaca B i C pogodnija je Sl.3’ od Sl.3.

Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_B = \beta_1 - \beta_2,$$

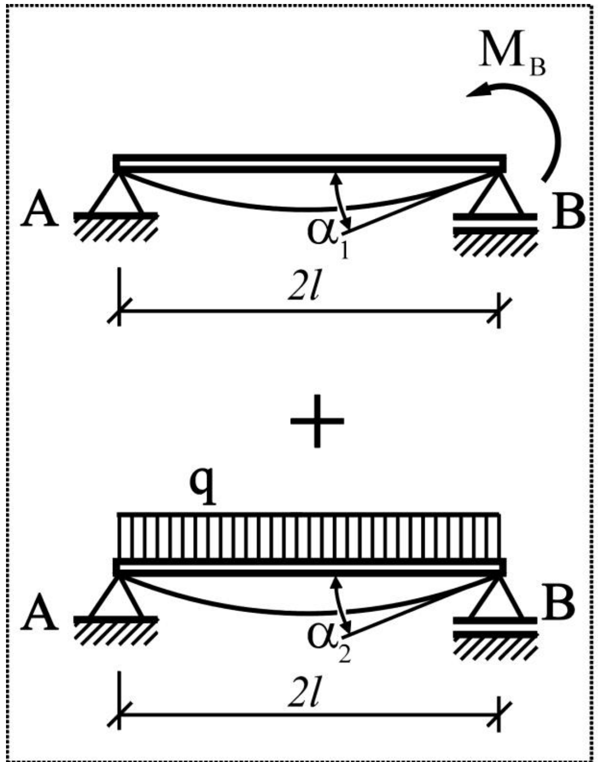
$$\alpha_1 = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\beta_1 = \frac{M_B \cdot l}{3E(2I)},$$

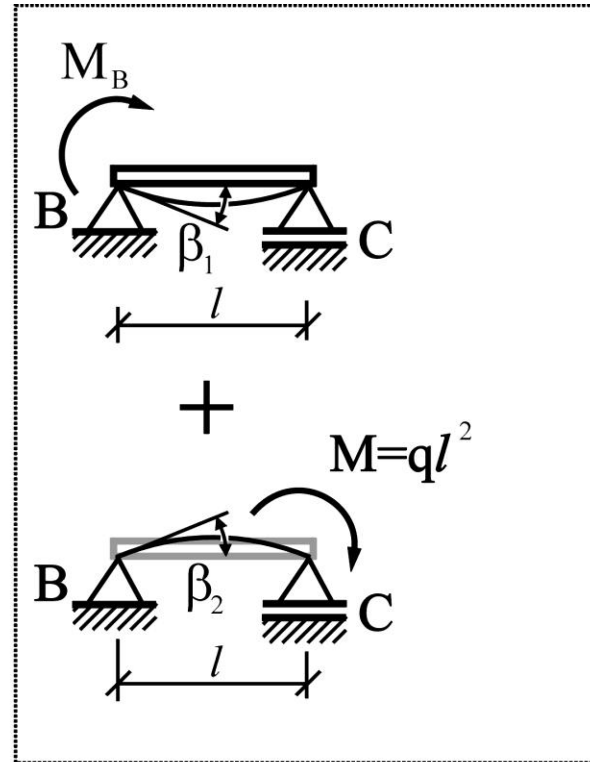
$$\alpha_2 = \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI},$$

$$\beta_2 = \frac{M \cdot l}{6E(2I)},$$

$$M = F \cdot l = ql^2.$$



→ deformacije uz Sl.2



→ deformacije uz Sl.3'

Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

$$\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI} + \frac{M_B \cdot l}{3E(2I)} - \frac{ql^2 \cdot l}{6E(2I)} = 0.$$

Rešenje dobijene jednačine je:

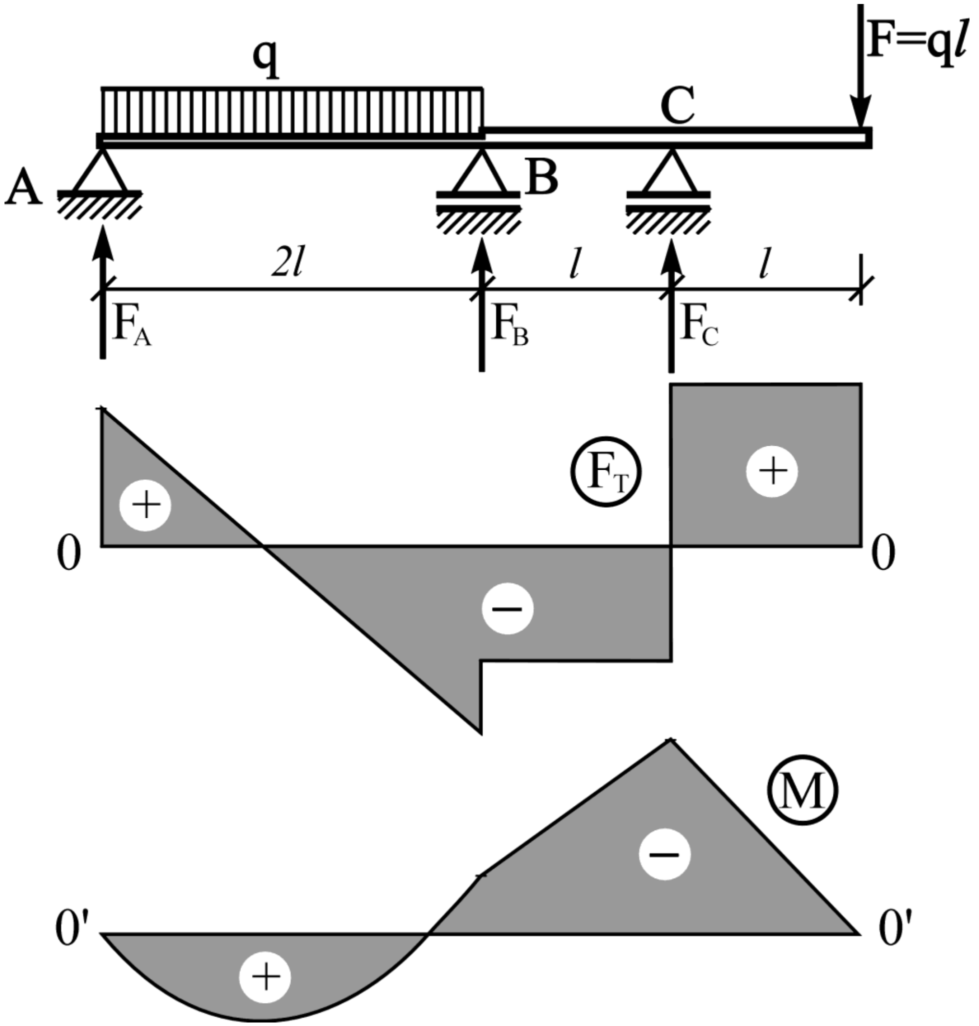
$$M_B = -\frac{3}{10} ql^2.$$

Određivanje otpora oslonaca:

$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow \quad q \cdot 2l \cdot l - F_A \cdot 2l + M_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{17}{20} ql.$$

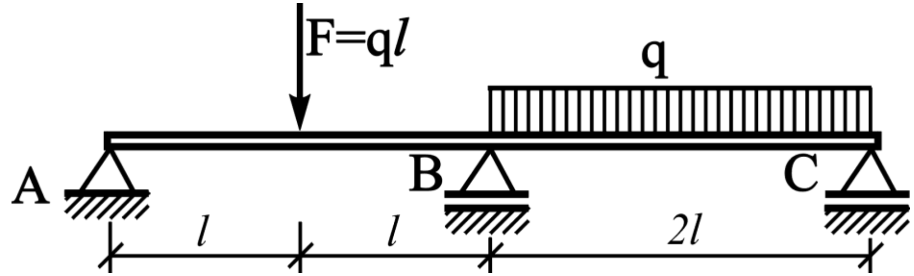
Sl.3 $\Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow F_C \cdot l - M_B - F \cdot 2l = 0 \Rightarrow F_C = \frac{17}{10} ql.$

Sl.1 $\Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C - F - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{9}{20} ql.$

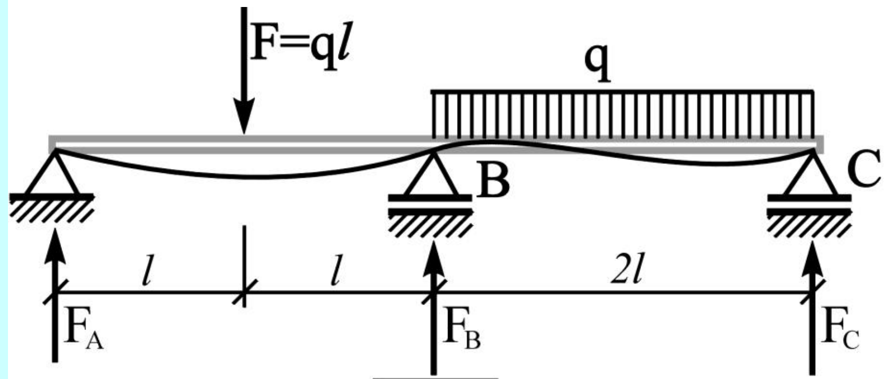


Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.

Primer 4.14 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod ”Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina”. Poznate veličine su q i *l*.



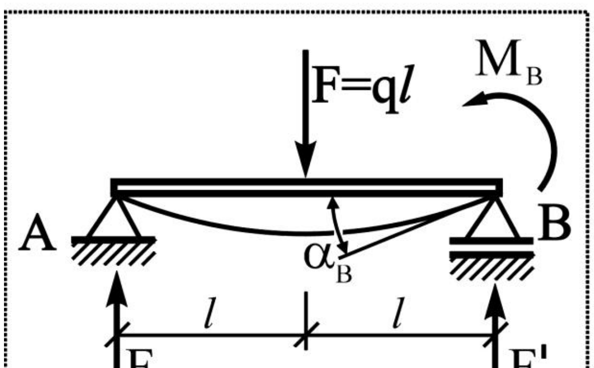
Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A , F_B i F_C , i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.



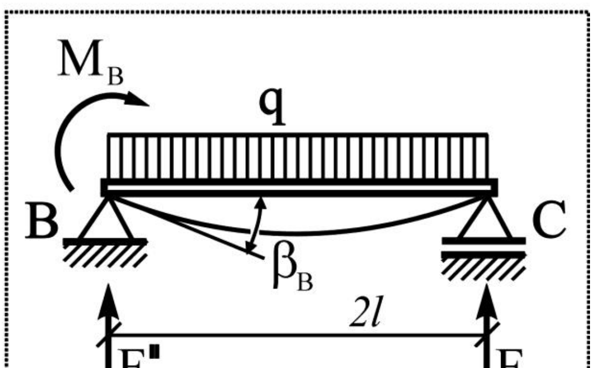
Sl.1

Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

$$2\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI} + \frac{ql \cdot (2l)^2}{16EI} = 0.$$



Sl.2



Sl.3

Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_B = \beta_1 + \beta_2,$$

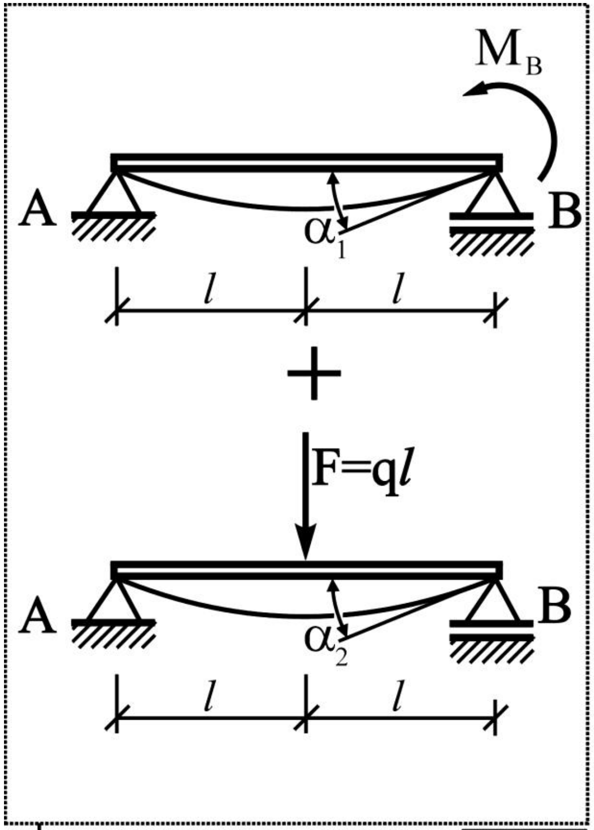
$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\alpha_2 = \frac{ql \cdot (2l)^2}{16EI},$$

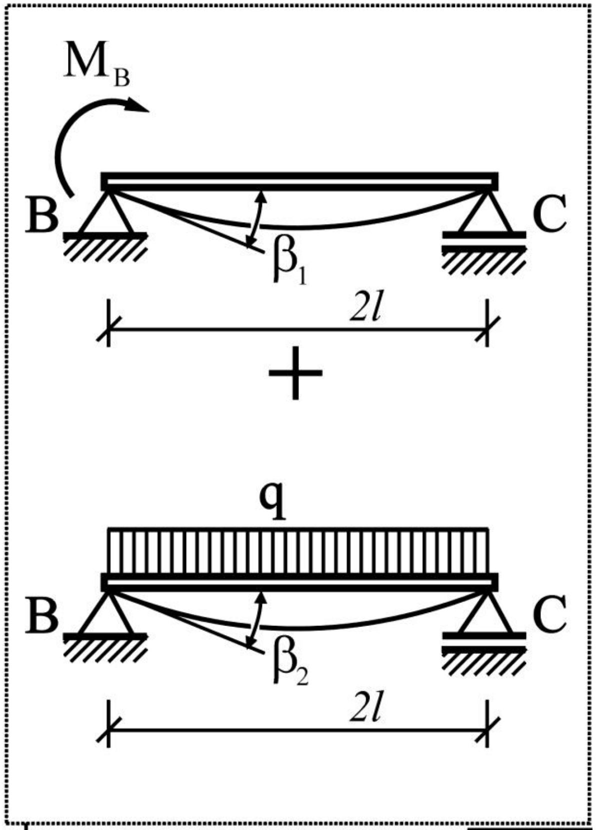
$$\beta_2 = \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI}.$$

Rešenje dobijene jednačine je:

$$M_B = -\frac{7}{16} ql^2.$$



deformacije uz Sl.2



deformacije uz Sl.3

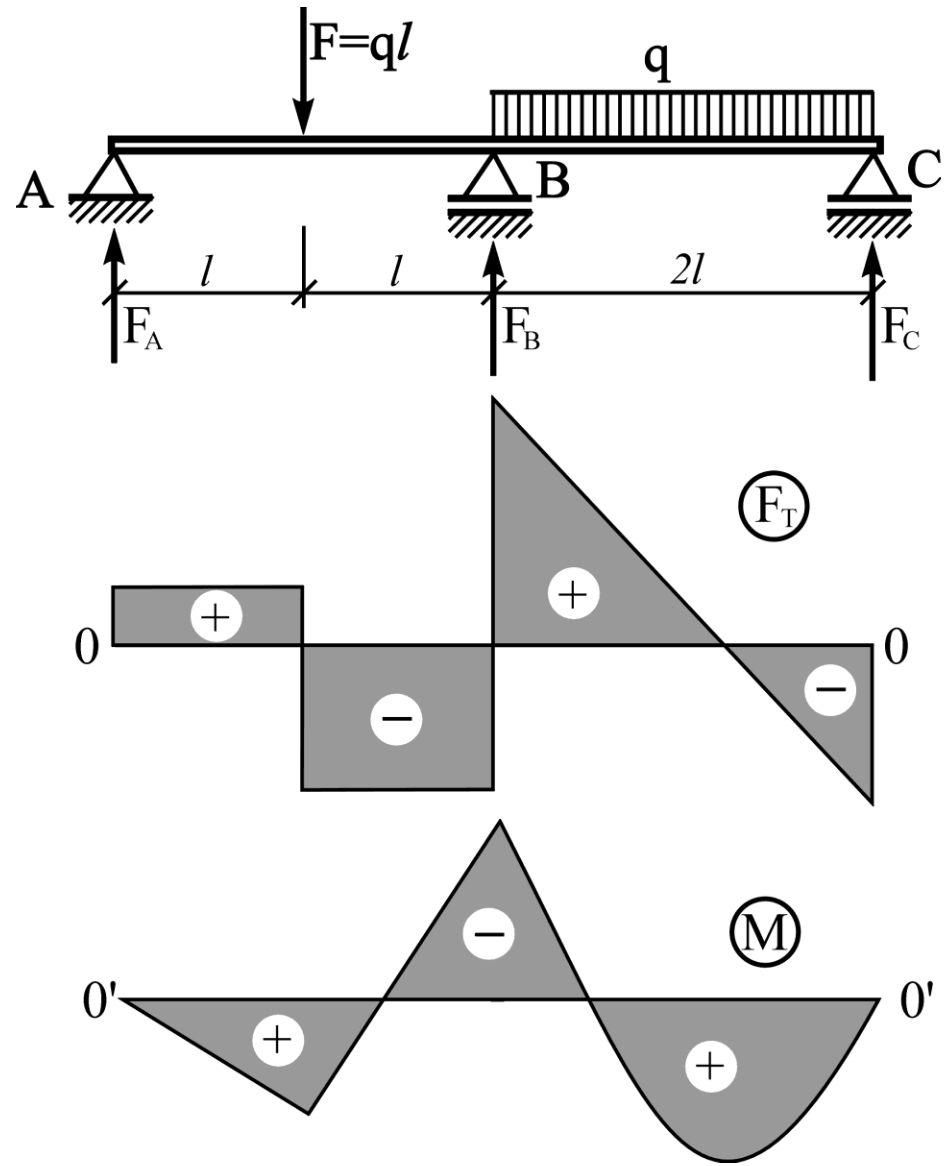
Određivanje otpora oslonaca:

$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow ql \cdot l - F_A \cdot 2l + M_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{9}{32} ql.$$

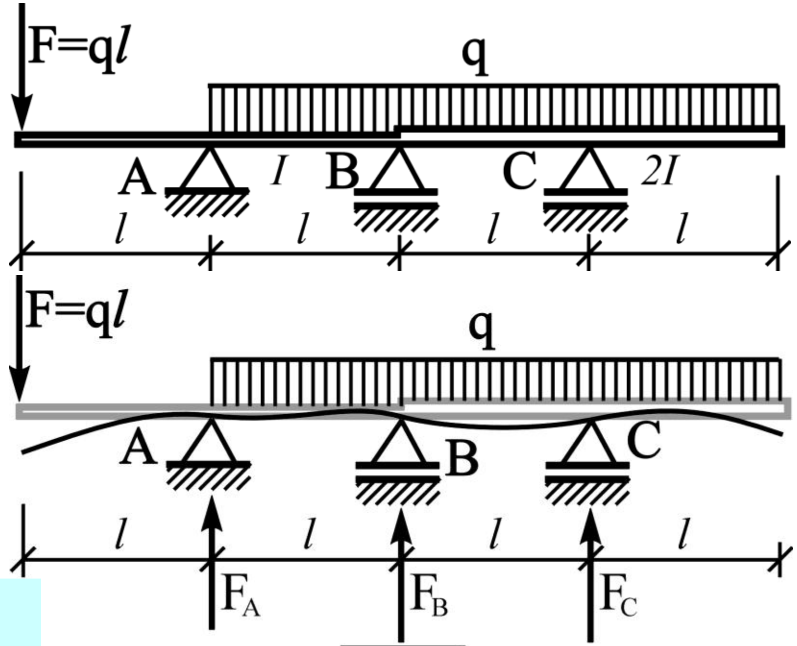
$$\text{Sl.3} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow -q \cdot 2l \cdot l + F_C \cdot 2l - M_B = 0 \Rightarrow F_C = \frac{25}{32} ql.$$

$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C - F - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{31}{16} ql.$$

Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.



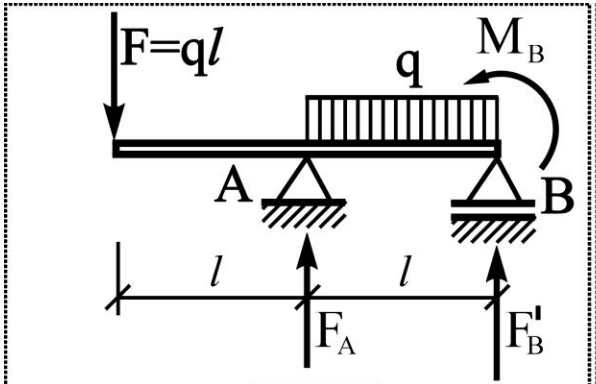
Primer 4.15 Za zadati statički neodređen gredni nosač, sa dva različita poprečna preseka, momenata inercije za neutralnu osu *I* i *2I*, odrediti otpore oslonaca. Kori stiti metod ”Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina”. Poznate veličine su q i *l*.



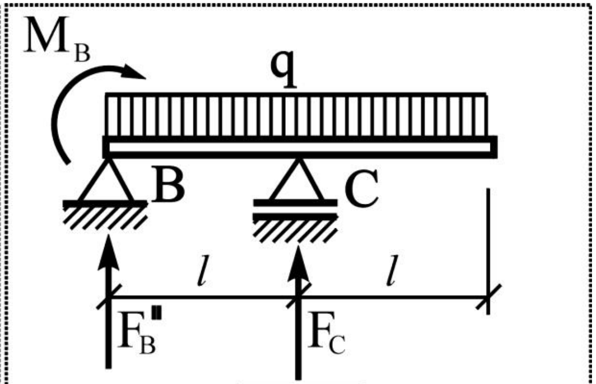
Sl.1

Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i F_C, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.

Zamišljenim presecanjem nosača kod oslonca B dobijaju se dve grede, prikazane na slikama 2 i 3 sa uravnoteženim sistemima sila i spregova koji na njih dejstvuju. Kao i u svim ovim primerima ni F_B', ni F_B'' nije F_B, već je $F_B = F_B' + F_B''$.

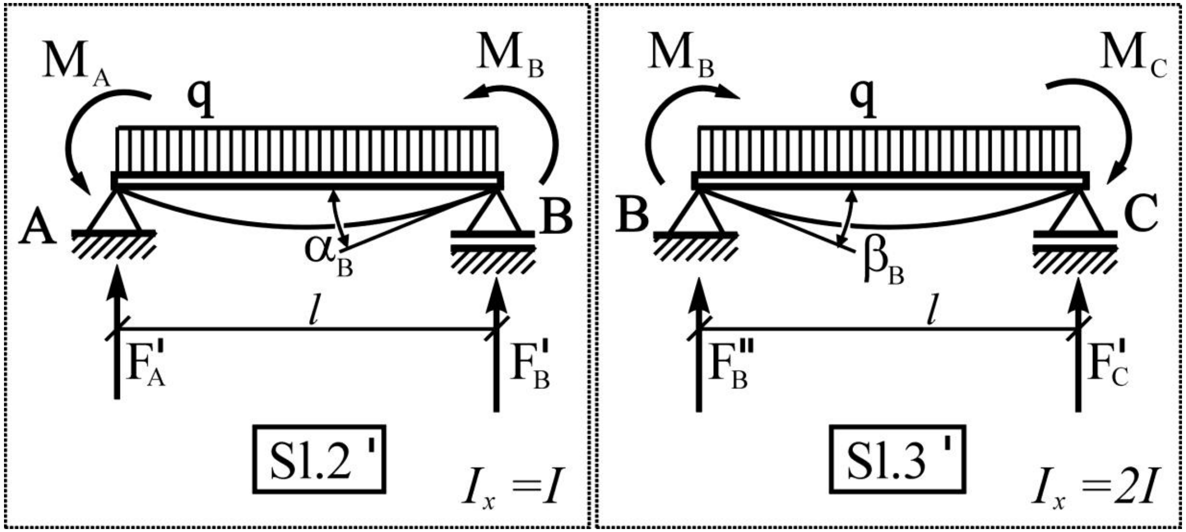


Sl.2



Sl.3

Pošto po pitanju deformacija između oslonaca, za grede sa slika 2 i 3, prepusti kao i odgovarajuća opterećenja na njima mogu biti zamenjeni odgovarajućim spregovima M_A i M_C nad osloncima, dobijaju se proste grede sa slika 2' i 3' sa pomenutim deformacijama identičnim. Važno je takođe znati da F_A' sa slike 2' nije isto što i traženo F_A, kao i da F_C' sa slike 3' nije isto što i traženo F_C.



Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

$$\frac{M_B \cdot l}{3EI} + \frac{q \cdot l^3}{24EI} - \frac{ql^2 \cdot l}{6EI} + \frac{M_B \cdot l}{3E(2I)} + \frac{q \cdot l^3}{24E(2I)} - \frac{\left(ql^2/2\right) \cdot l}{6E(2I)} = 0.$$

Rešenje dobijene jednačine je: $M_B = \dfrac{7}{24} ql^2.$

Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,$$

$$\beta_B = \beta_1 + \beta_2 - \beta_3,$$

$$\alpha_1 = \frac{M_B \cdot l}{3EI},$$

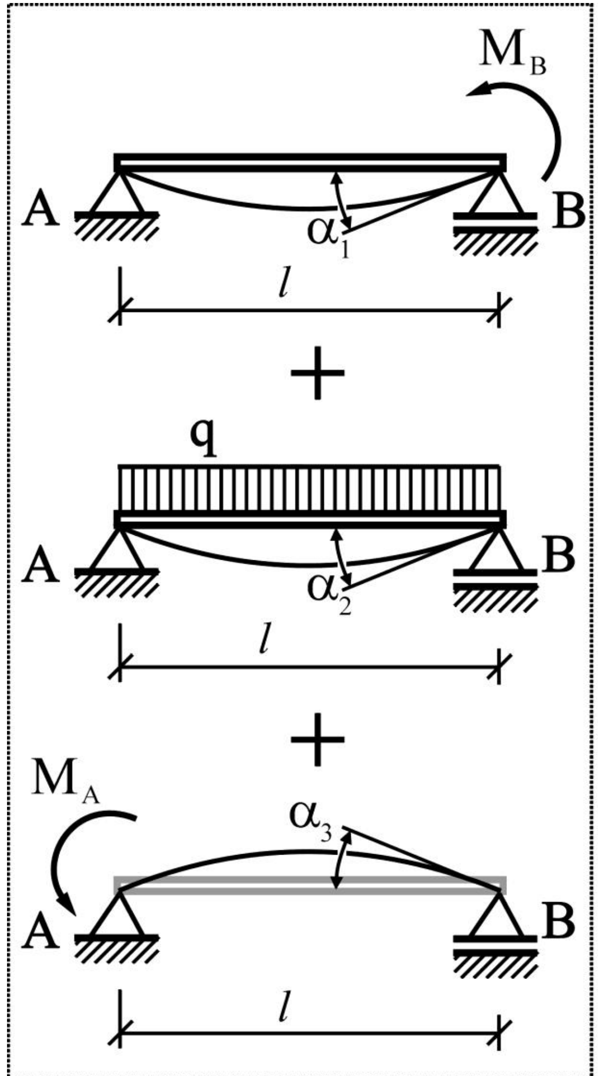
$$\beta_1 = \frac{M_B \cdot l}{3E(2I)},$$

$$\alpha_2 = \frac{q \cdot l^3}{24EI},$$

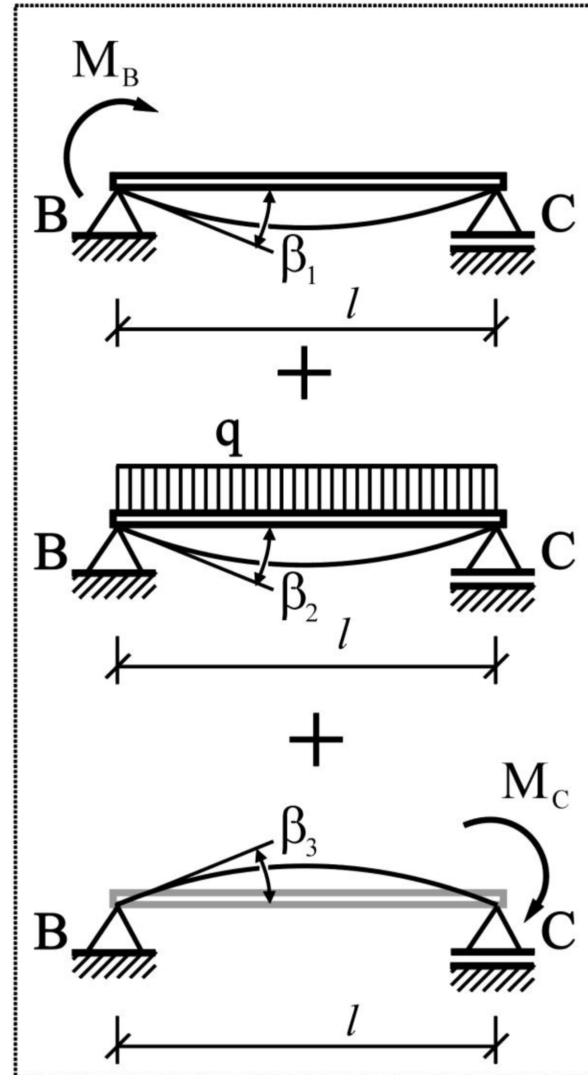
$$\beta_2 = \frac{q \cdot l^3}{24E(2I)},$$

$$\alpha_3 = \frac{M_A \cdot l}{6EI},$$

$$M_A = F \cdot l = ql^2,$$



deformacije uz Sl.2'



deformacije uz Sl.3'

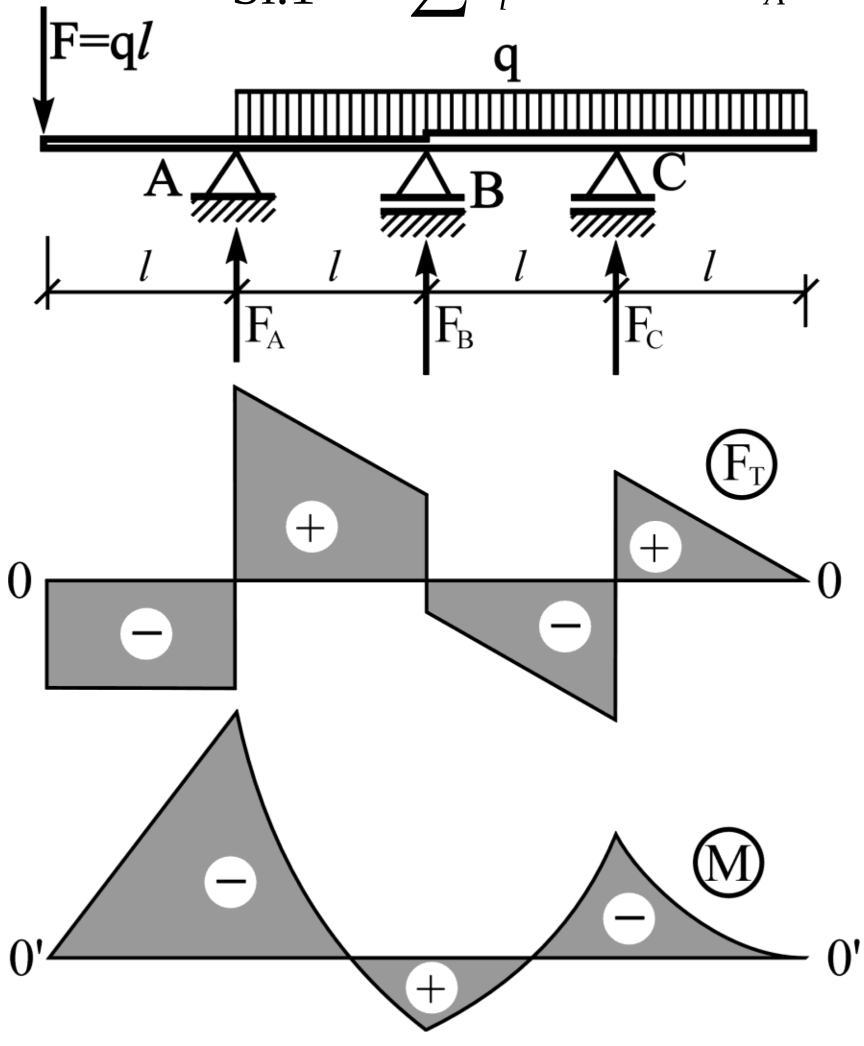
$$\beta_3 = \frac{M_C \cdot l}{6E(2I)}, \;\; M_C = q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} ql^2.$$

Određivanje otpora oslonaca:

$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow F \cdot 2l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - F_A \cdot l + M_B = 0 \Rightarrow F_A = \frac{67}{24} ql.$$

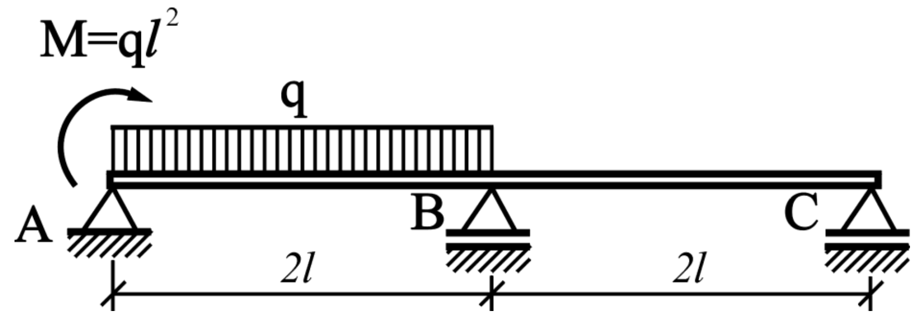
$$\text{Sl.3} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow F_C \cdot l - M_B - q \cdot 2l \cdot l = 0 \Rightarrow F_C = \frac{55}{24} ql.$$

$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C - F - q \cdot 3l = 0 \Rightarrow F_B = \frac{13}{12} ql.$$

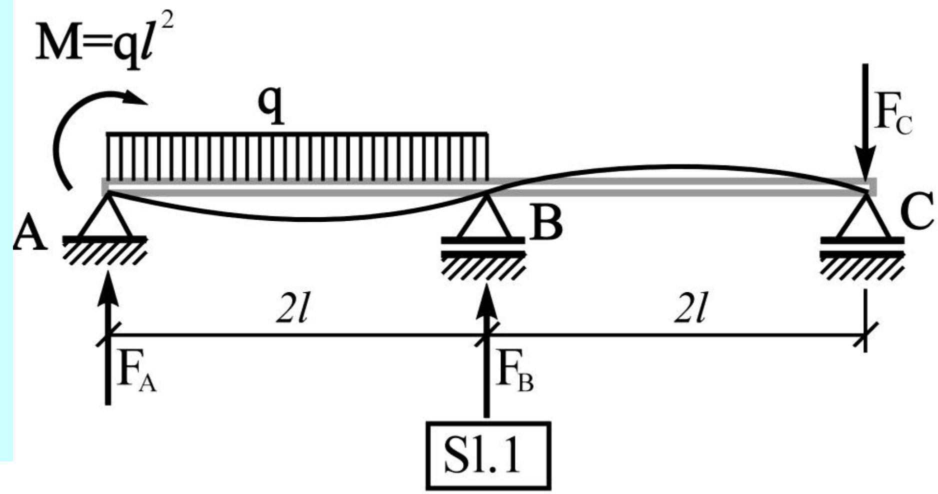


Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.

Primer 4.16 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod "Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina". Poznate veličine su q i *l*.

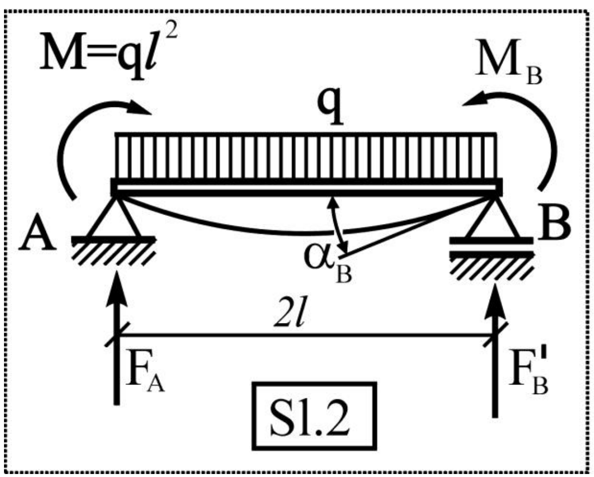


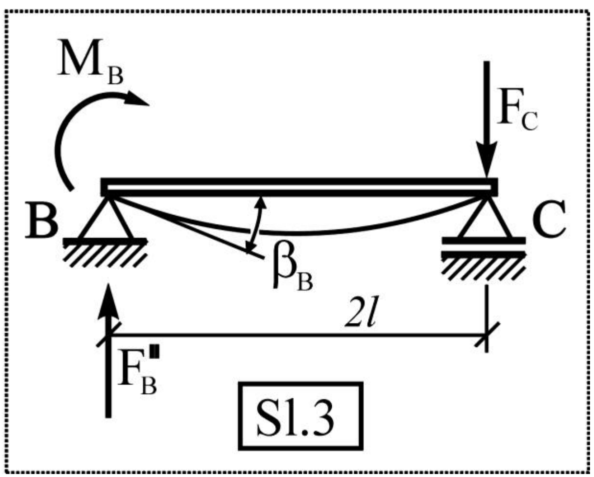
Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i F_C, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.

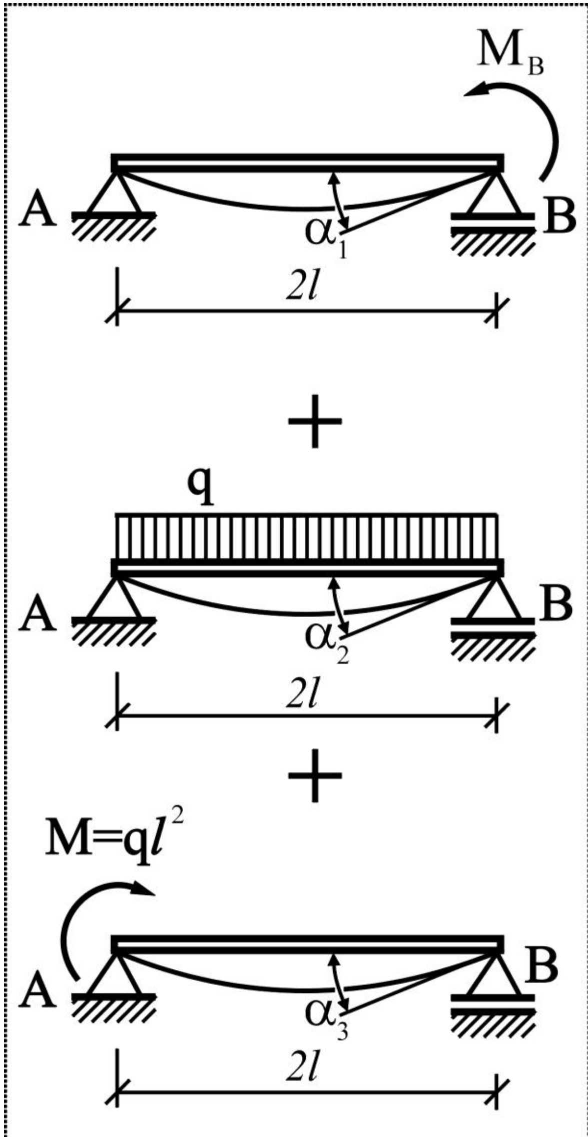


Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

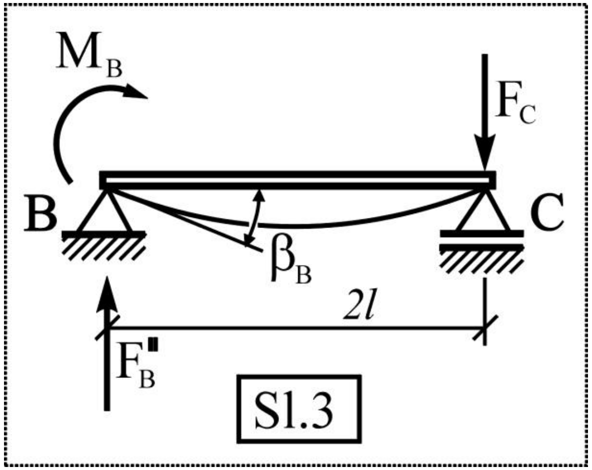
$$2\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI} + \frac{ql^2 \cdot 2l}{6EI} = 0.$$







deformacije uz Sl.2'



Ovde je:

$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$\alpha_1 = \beta_B = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\alpha_2 = \frac{q\cdot(2l)^3}{24EI},$$

$$\alpha_3 = \frac{ql^2 \cdot 2l}{6EI}.$$

Rešenje dobijene jednačine je: $M_B = -\frac{1}{2}ql^2.$

Određivanje otpora oslonaca:

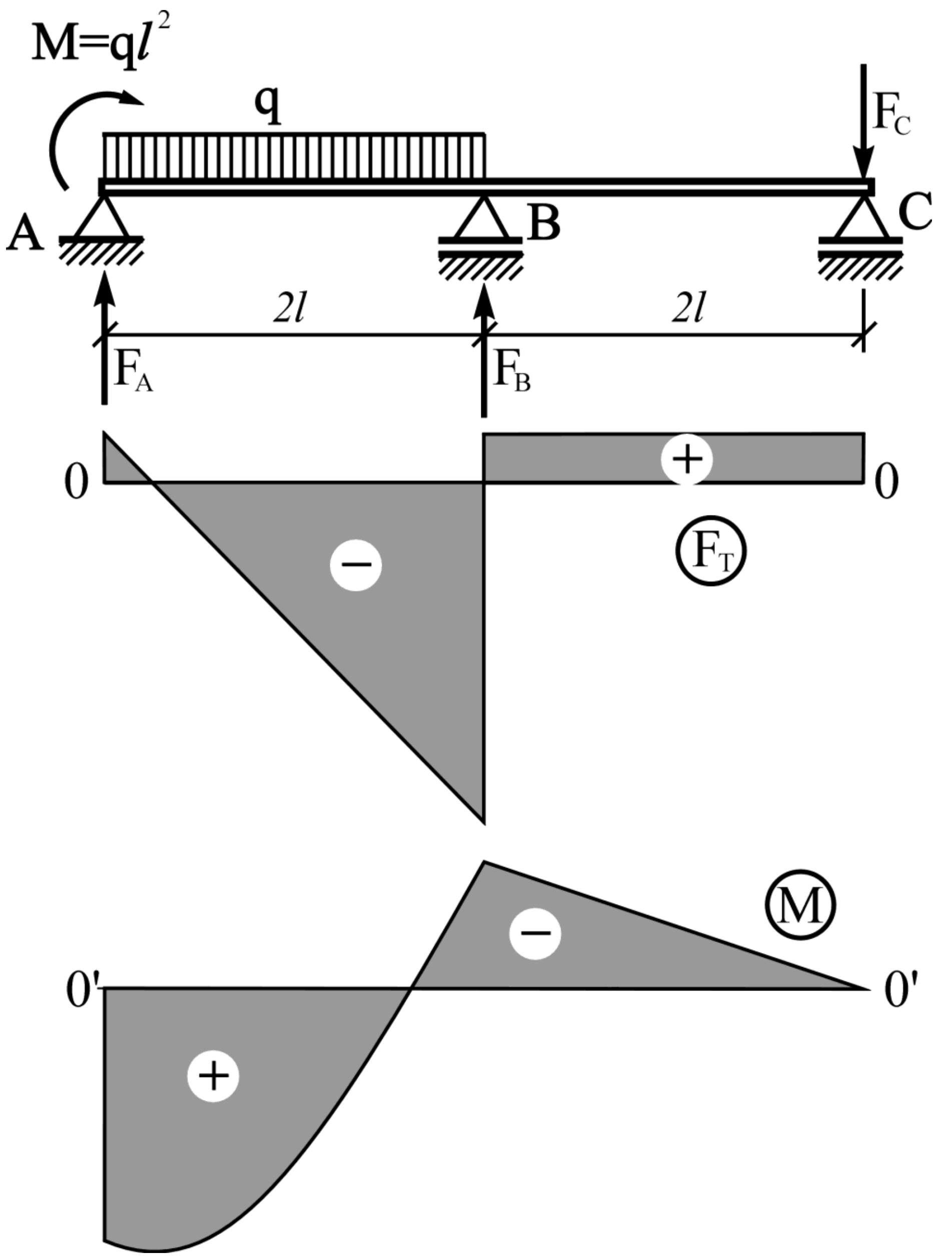
$$\text{Sl.2} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow q\cdot 2l\cdot l - F_A\cdot 2l + M_B - M = 0$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{1}{4}ql.$$

$$\text{Sl.3} \Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow -F_C\cdot 2l - M_B = 0 \Rightarrow F_C = \frac{1}{4}ql.$$

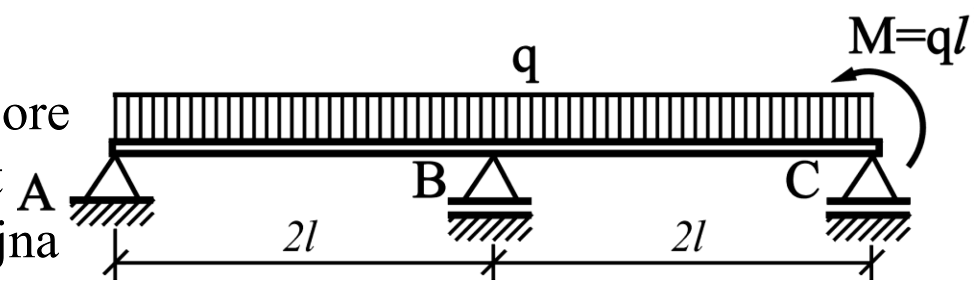
$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow F_A + F_B + F_C - q\cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$F_B = 2ql.$$

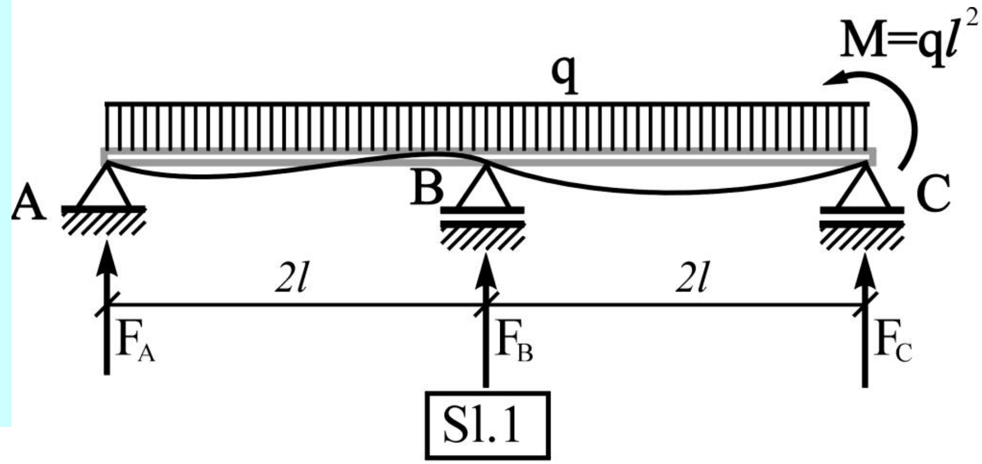


Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.

Primer 4.17 Za zadati statički neodređen gredni nosač odrediti otpore oslonaca. Koristiti metod "Moment nad osloncem kao statički prekobrojna veličina". Poznate veličine su q i *l*.

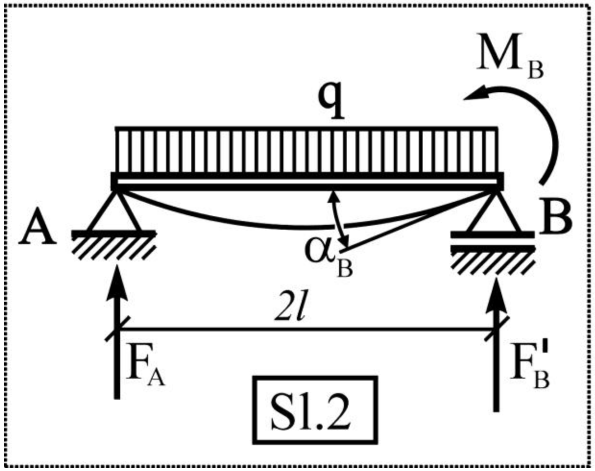


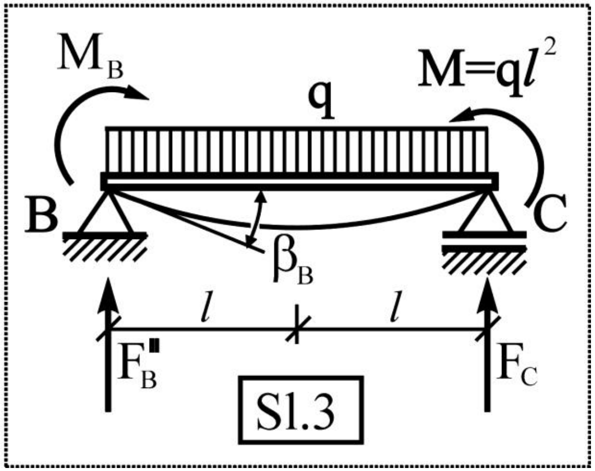
Na zadat nosač, osim zadatog opterećenja, dejstvuju i tri nepoznate reakcije F_A, F_B i F_C, i pošto za prikazan uravnotežen sistem (Sl.1) imamo dve jednačine ravnoteže problem je jedan put statički neodređen.



Geometrijski uslov deformacije (GUD) $\alpha_B + \beta_B = 0$, daje sledeću jednačinu po statički prekobrojnoj veličini M_B :

$$2\frac{M_B \cdot 2l}{3EI} + 2\frac{q\cdot(2l)^3}{24EI} + \frac{ql^2 \cdot 2l}{6EI} = 0.$$





Ovde je:

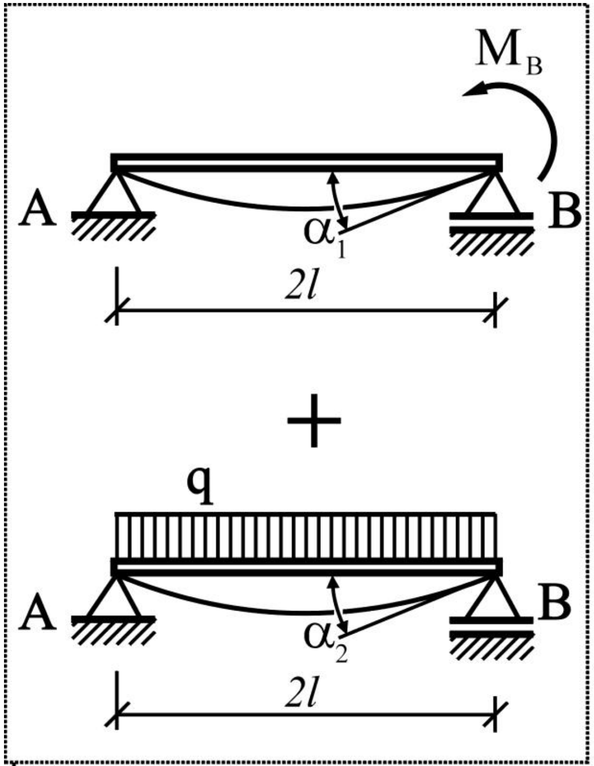
$$\alpha_B = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_B = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{M_B \cdot 2l}{3EI},$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{q \cdot (2l)^3}{24EI},$$

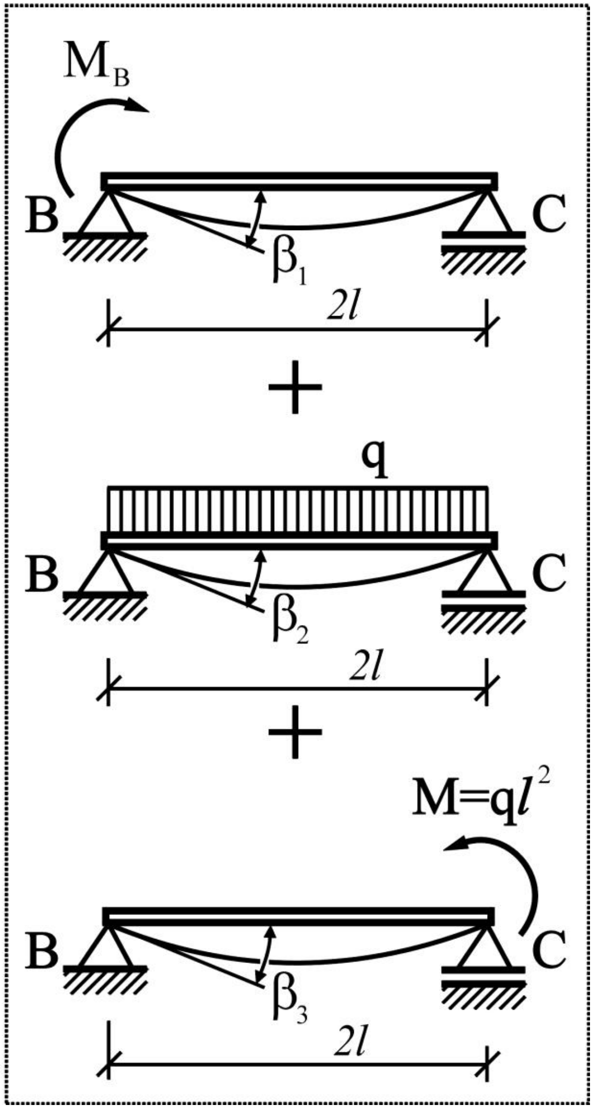
$$\beta_3 = \frac{ql^2 \cdot 2l}{6EI}.$$



deformacije uz Sl.2

Rešenje dobijene jednačine je: $M_B = -\frac{3}{4} ql^2.$

Određivanje otpora oslonaca:



deformacije uz Sl.3

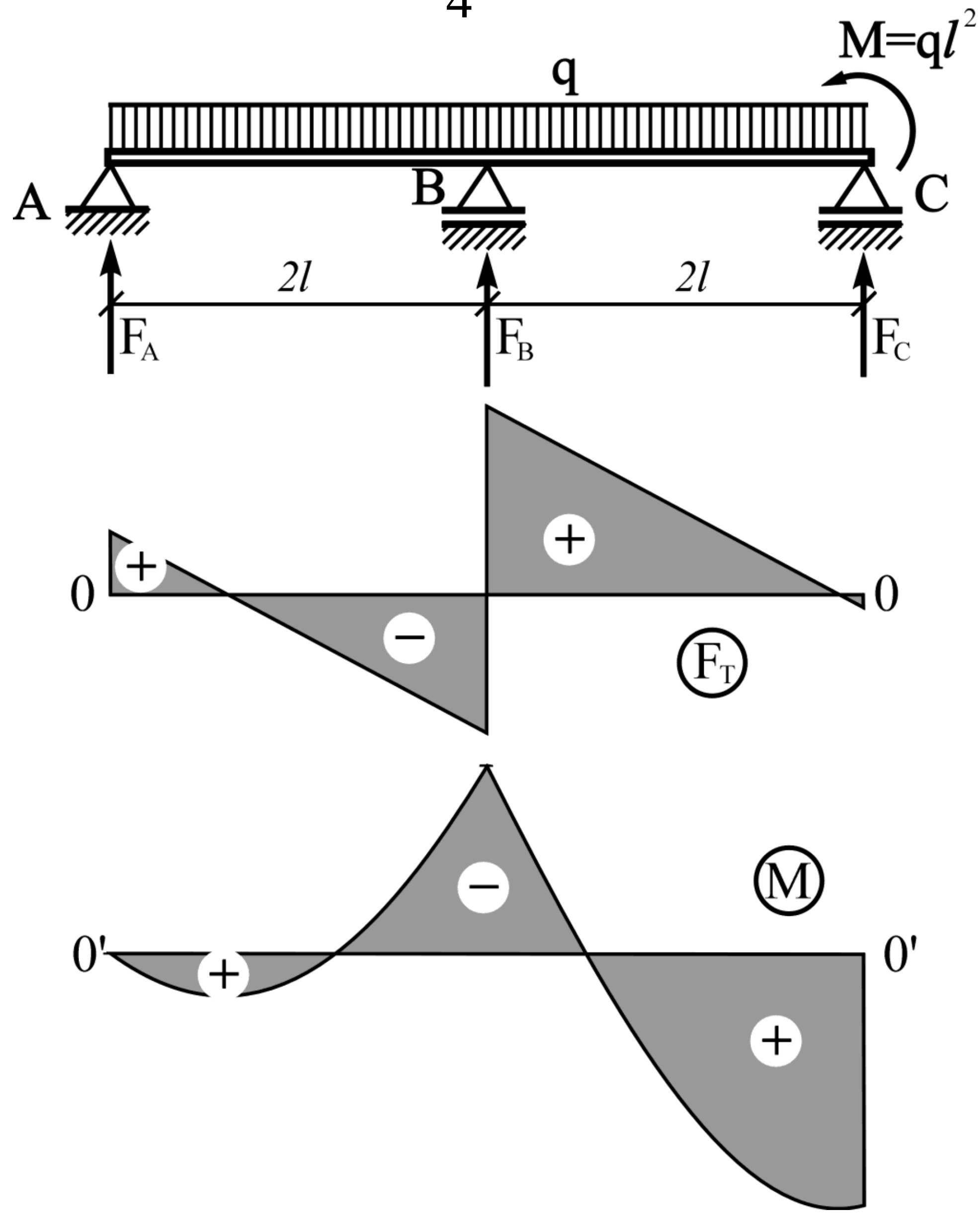
Sl.2 $\Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow$

$$q \cdot 2l \cdot l - F_A \cdot 2l + M_B = 0$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{5}{8} ql.$$

Sl.3 $\Rightarrow \sum M_{Bi} = 0 \Rightarrow$ $F_C \cdot 2l - M_B + M - q \cdot 2l \cdot l = 0 \Rightarrow$ $F_C = \frac{1}{8} ql.$

$$\text{Sl.1} \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow \quad F_A + F_B + F_C - q \cdot 4l = 0 \Rightarrow \; F_B = \frac{13}{4} ql.$$



Za izračunate vrednosti otpora oslonaca, dijagrami transverzalnih sila i napadnog momenta imaju oblik prikazan na slici.