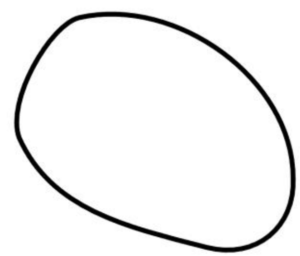
1.Elastična i plastična deformacija. Osnovne hipoteze Otpornosti materijala.

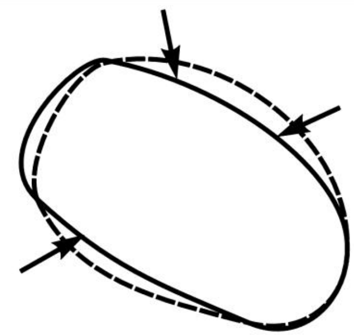
Pod dejstvom spoljašnjih sila telo se deformiše (promene se oblik i dimenzije). Kod elastičnih tela dolazi do elastičnih deformacija koje iščezavaju po prestanku dejstva spoljašnjih sila (dakle, po prestanku dejstva spoljašnjih sila telu se vraćaju oblik i dimenzije koje je imalo pre deformisanja). Tela zadržavaju elastične osobine samo do izvesnih granica opterećenja koje zavise od vrsta materijala.

Kada se ova granica prekorači telo se po prestanku dejstva spoljašnjih sila ne vraća svoj prvobitni oblik već dobija trajne (plastične) deformacije. Trajne deformacije vode konstrukciju ka slomu, pa stoga nisu dozvoljene.



telo koje nije opterećeno spoljašnjim opterećenjem ne deformiše se

1)



usled spoljašnjeg opterećenja deformabilna tela menjaju oblik i dimenzije

2)

Hipotezama otpornosti materijala vrši se idealizacija realnog tela.

Hipoteza o neprekidnosti materije

Tela su potpuno ispunjena materijom i predstavljaju neprekidnu sredinu. To dozvoljava da se na beskonačno malom elementu primenjuju zakoni u diferencijanom obliku.

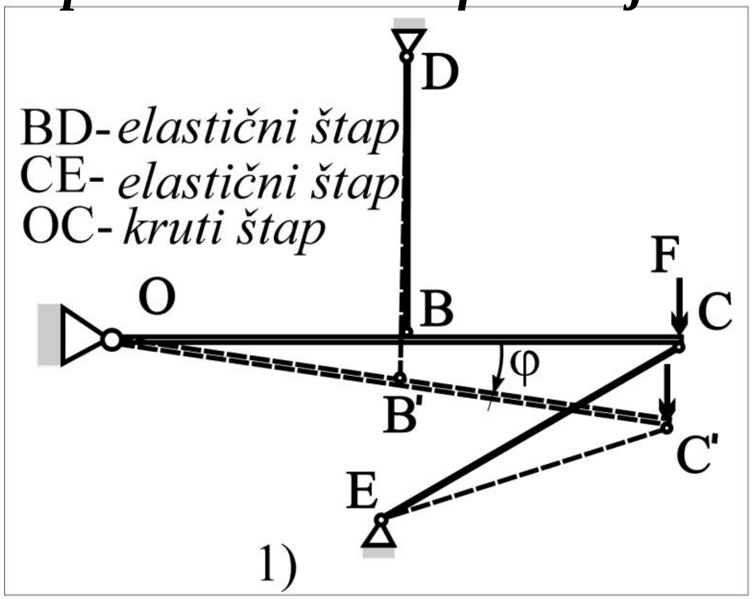
Hipoteza o izotropnosti materijala

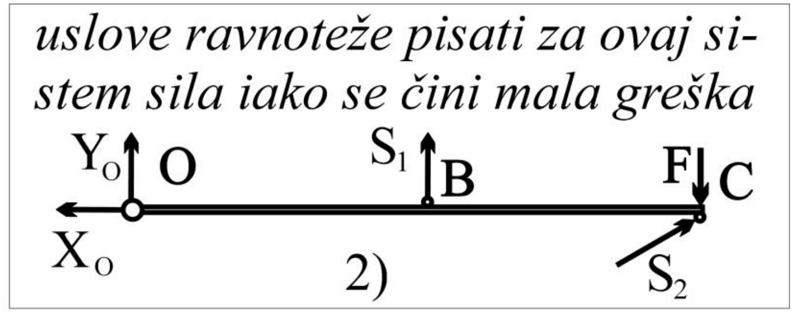
Tela se podjednako ponašaju u svim pravcima.

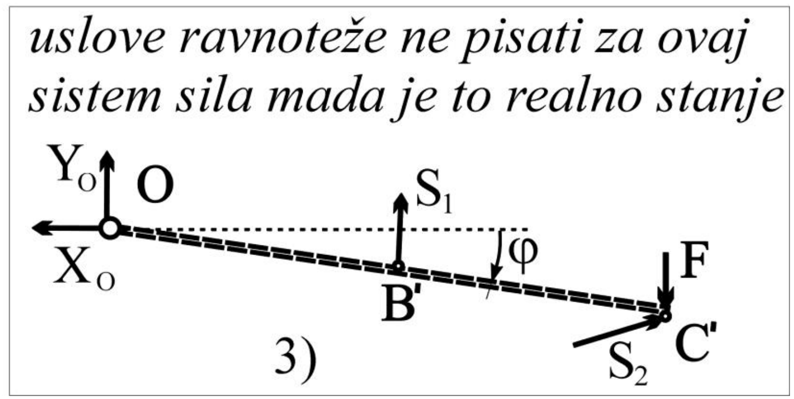
Hipoteza o homogenosti materijala

Tela imaju jednaku strukturu po čitavoj zapremini.

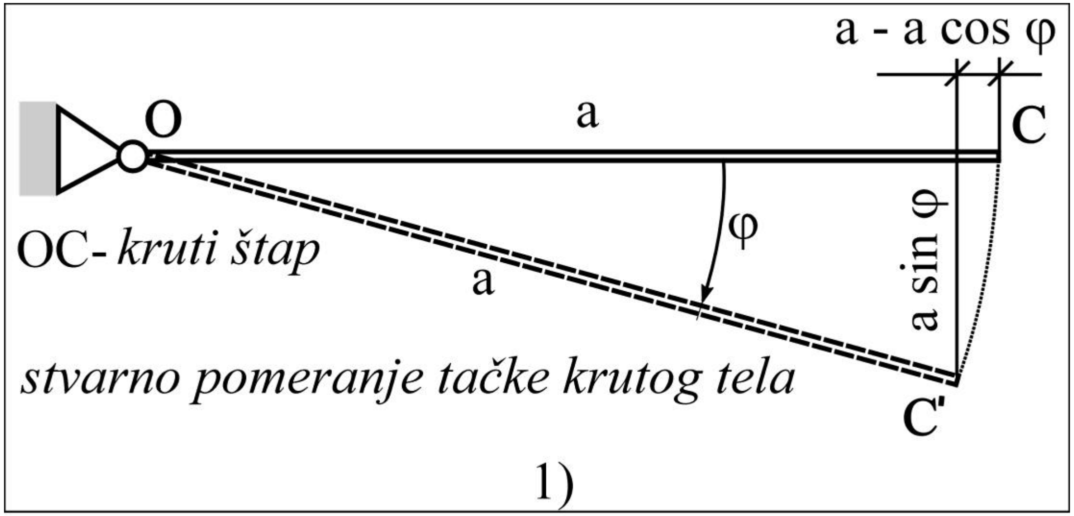
Hipoteza o malim deformacijama

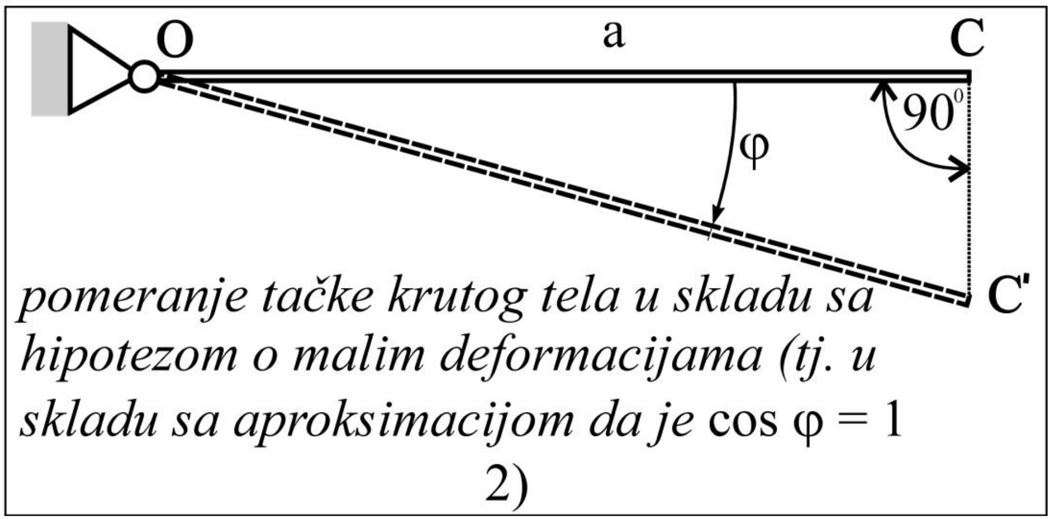






Pri pisanju statičkih uslova ravnoteže male deformacije i mala pomeranja se zanemaruju i time se čini greška ali nebitna za inženjersku praksu. Dakle, statički uslovi ravnoteže se pišu tako da kao do malih pomeranja (promene projekcija sila, promene krakova sila itd.) nije ni došlo.





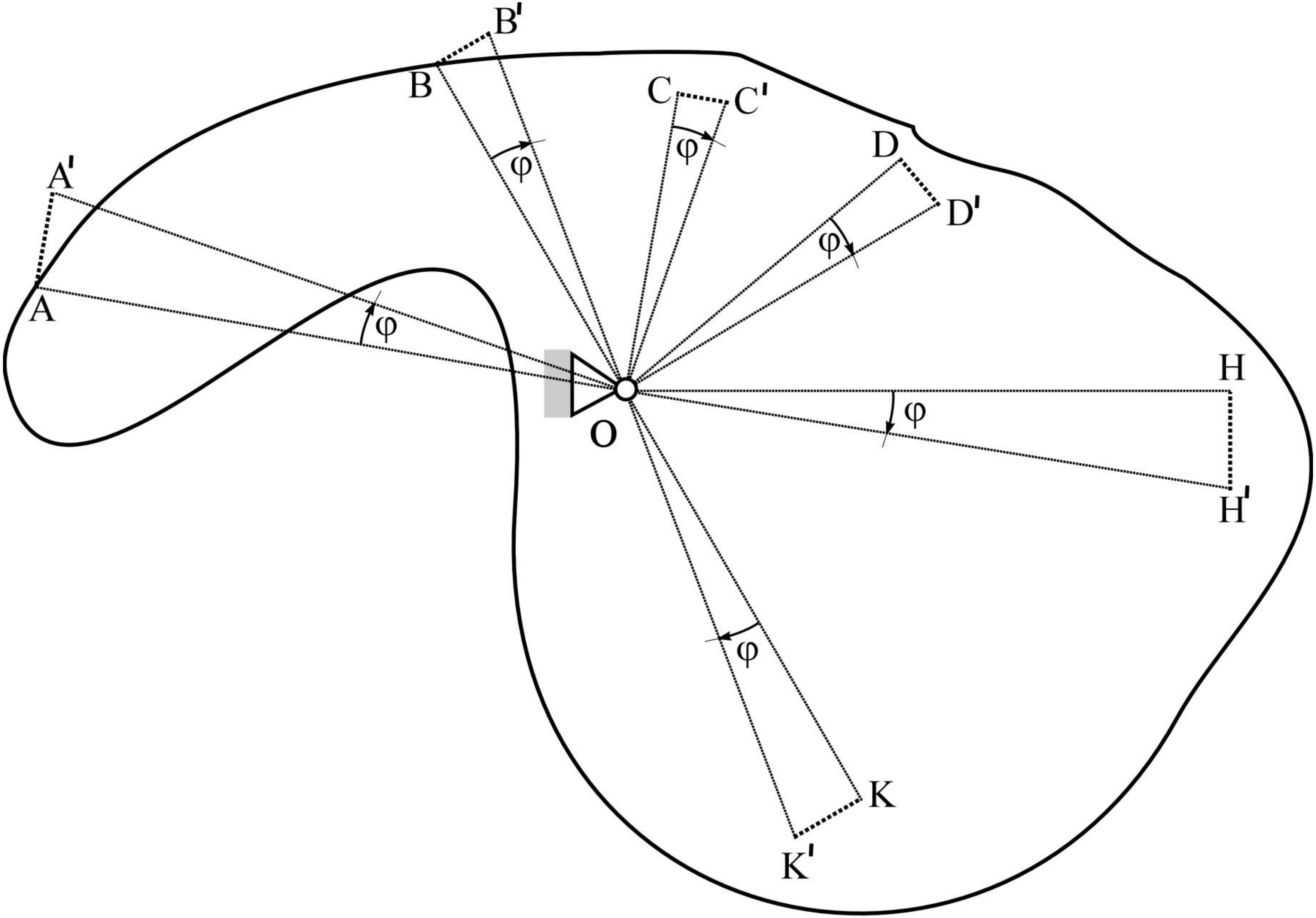
Pri analizi deformacija i pomeranja zanemaruju se male veličine drugog i viših redova. Tako se, na primer, sinus male veličine φ umesto sa

$$\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots$$

zamenjuje samo sa φ, dok se kosinus umesto sa

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots$$

zamenjuje samo sa 1, jer se male veličine drugog (što je φ^2), trećeg (što je φ^3) i viših redova zanemaruju.



pomeranja tačaka krutog tela koje se obrnulo oko zgloba O u smeru kazaljke na satu za mali ugao φ u skladu sa hopotezom o malim deformacijama

U velikom broju zadataka imaćemo, kao na prethodnom sjaldu, da se kruto telo za mali ugao obrće oko nepomičnog zgloba i gotovo uvek ćemo se pozivati na sličnost tih izduženih pravouglih trouglova. Tako na primer, trougao $\Delta OBB'$ je sličan sa trouglom $\Delta OCC'$ zbog čega su im odgovarajuće stranice proporcionalne.

Ako bi kruto telo vršilo malo translatorno pomeranje onda bi važilo $\overline{BB'} = \overline{CC'}$.

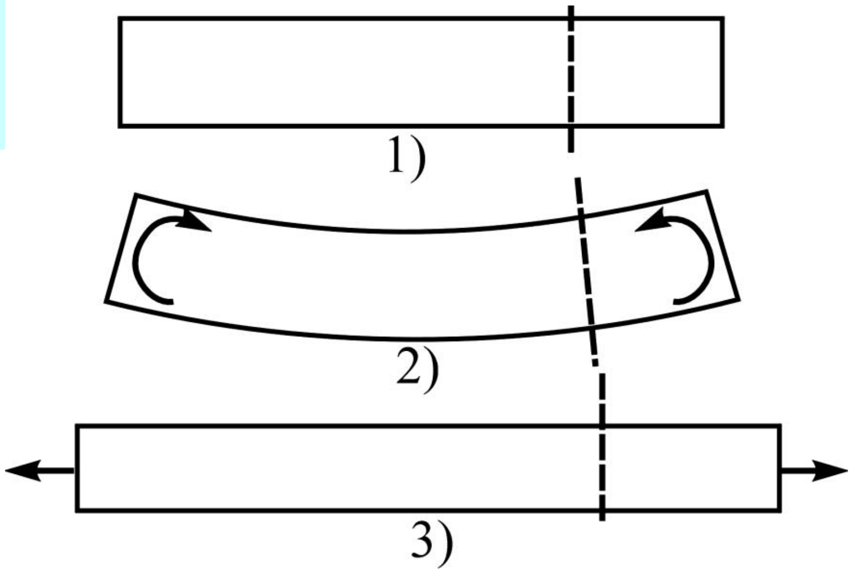
Važna posledica hipoteze o malim deformacijama je i princip nezavisnosti dejstva prema kojem je „elastična deformacija izazvana istovremenim dejstvom više sila jednaka algebarskom zbiru deformacija usled svake od sila posebno“.

Hipoteza o elastičnim deformacijama

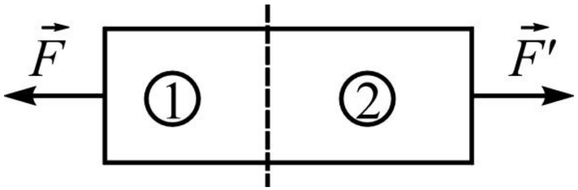
Izučavaju se deformacije u granicama elestičnosti materijala.

Hipoteza ravnih preseka (Bernulijeva hipoteza)

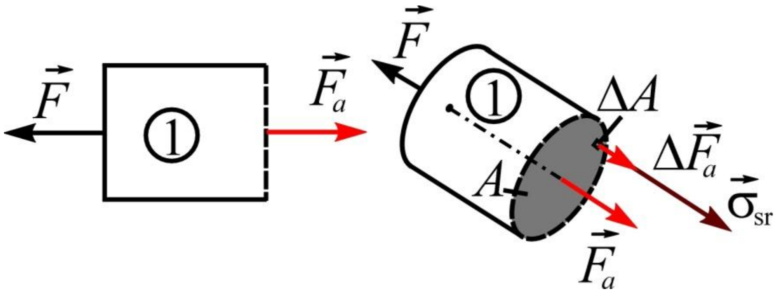
Zamišljeni ravan presek pre deformacije ostaje ravan i nakon deformacije.



2.Normalni napon pri aksijalno opterećenom štapu.



Zamišljeno se preseca aksijalno opterećeni štap na dva dela i posmatra se jedan deo.
Unutrašnja sila u preseku je aksijalna sila $\vec{F}_a$.

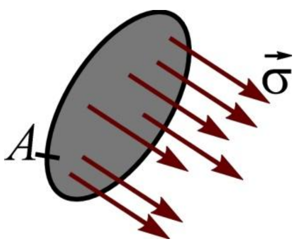


Površina poprečnog preseka je A a njen elementarni deo ΔA..

$$\vec{\sigma}_{sr} = \frac{\Delta\vec{F}_a}{\Delta A}, \quad \vec{\sigma} = \lim_{\Delta A\to 0}\vec{\sigma}_{sr} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{F}_a}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_a}{dA},$$

$$\sigma = const. \Rightarrow \quad \sigma = \frac{dF_a}{dA}, \quad F_a = \sigma\int_A dA = \sigma A,$$

$$\boxed{\sigma = \frac{F_a}{A}.}$$



$\sigma = const.$

Napon u nekoj tački preseka predstavlja meru intenziteta unutrašnjih sila i podrazumeva veličinu unutračnje sile po jedinici površine.

Prema formuli $\sigma = \pm F_a / A$ napon (normalni) u ma kojoj tački nekog preseka aksijalno opterećenog štapa jednak je količniku aksijalne sile u tom preseku i površine poprečnog preseka. Prednak za napon biće + ako je štap zategnut a – ako je pritisnut.

3.Uzdužna i poprečna dilatacija štapa

$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{l_1 - l}{l}$ - Uzdužna dil.

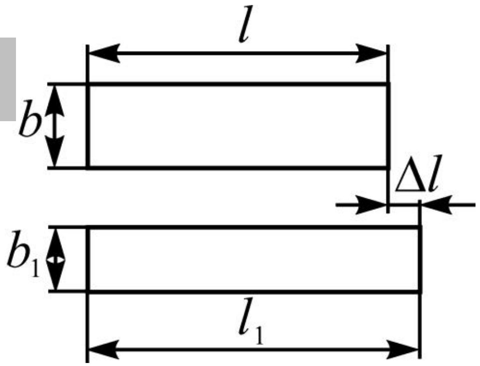
$\varepsilon_q = \dfrac{\Delta b}{b} = \dfrac{b_1 - b}{b}$ - Poprečna dil.

Totalno izduženje:

$\Rightarrow \quad \Delta l = l_1 - l = \varepsilon l$

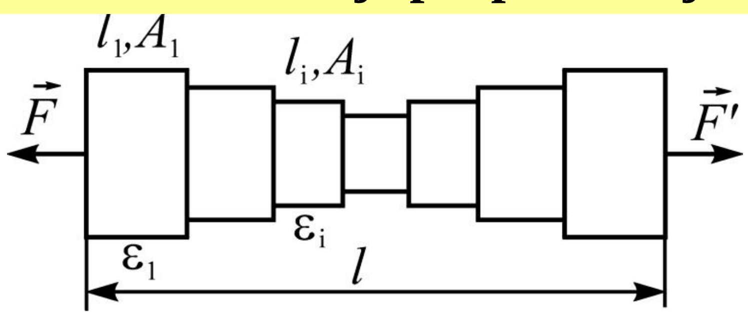
Veza dilatacija: $\varepsilon_q = -\mu\varepsilon$

μ-Poasonov koeficijent



Zatezanjem se uzdužna dimenzija ***l*** povećava a poprečna ***b*** smanjuje.

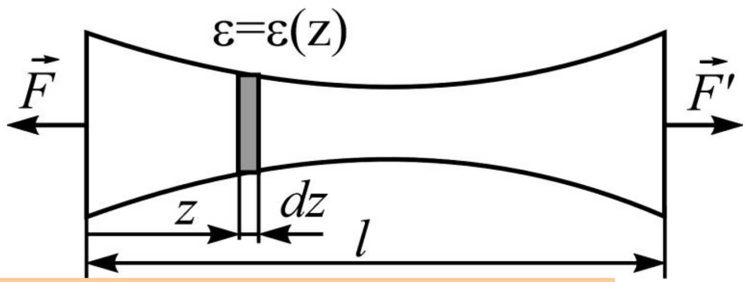
Totalno izduženje pri promenljivoj dilataciji.



Stepenasto promenljiv presek

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} \Rightarrow \Delta l_i = \varepsilon_i l_i \Rightarrow$$

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \varepsilon_i l_i \quad \textit{-totalno izduženje}$$

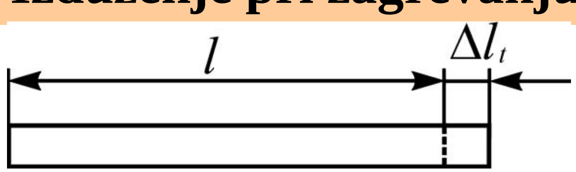


Kontinualno promenljiv presek i generalno

$$\Delta(dz) = \varepsilon(z)dz \quad \Rightarrow$$

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon(z)dz \quad \textit{-totalno izduženje}$$

Izduženje pri zagrevanju.



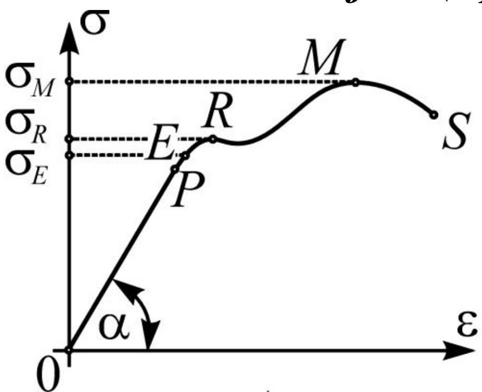
$\Delta l_t = l \cdot \alpha \cdot \Delta t.$

α -koeficijent toplotnog širenja, $1/{}^0C$

Δt -povećanje temperature, ${}^0C$

4.Dijagram normalnih napona u zavisnosti od dilatacije.

Plastični materijali (npr. meki čelici)



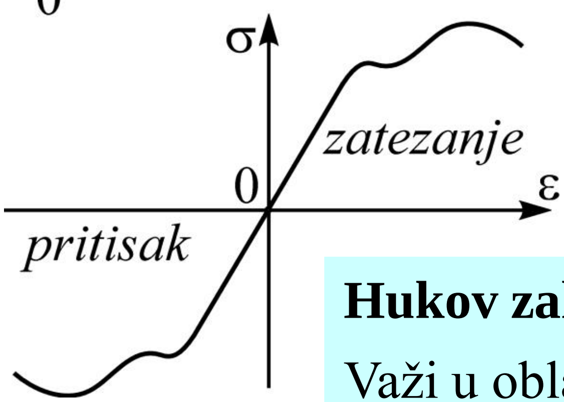
σ_M – maksimalni napon (granica čvrstoće)

σ_R – granica razvlačenja

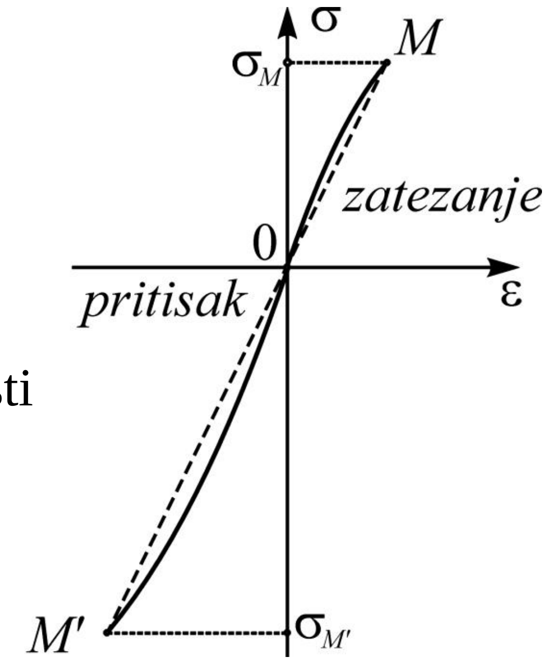
σ_E – granica elastičnosti

σ_P – granica proporcionalnosti

$\sigma_E \approx \sigma_P$



Krti materijali



Hukov zakon. $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Važi u oblasti elastičnosti i kaže naponi su proporcionalni dilatacijama.

Koeficijent proporcionalni je modul elastičnosti E.

Krti maerijali bolje podnose pritisak nego zatezanje $|\sigma_{M'}| > |\sigma_M|$.

Totalno izduženje izraženo preko promenljivog napona.

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} \Rightarrow \Delta l = \int_0^l \varepsilon(z)dz = \int_0^l \frac{\sigma(z)}{E}dz \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma(z)dz$$

Česte oznake:

Δl^+ – izduženje

Δl^- – skraćenje

$\Delta l^+ = -\Delta l^-$

5.Proračun štapova na zatezanje i pritisak.

Osnova za proračun je zadovoljenje nejednačine $|\sigma|_{\max} \leq \sigma_d$, gde je $|\sigma|_{\max}$ maksimum apsolutne vrednosti normalnog napona štapa a σ_d je dozvoljeni normalni napon. Ovakva nejednakost ili $|\sigma| \leq \sigma_d$ su polazište za dimenzionisanje kao veoma čestu varijantu proračuna. U drugim varijantama proračuna, kada su poznate veličine poprečnih preseka može da se traži ili nosivost (odnosno, veličine sila, opterećenja) ili (za poznato opterećenje) veličine radnih napona.

Dozvoljeni napon i stepeni sigurnosti.

Bira se obično tako da iznosi samo jedan deo, od σ_R za plastične materijale, odnosno, od σ_M za plastične materijale:

$$\sigma_d = \frac{\sigma_R}{n_R}, \quad \sigma_d = \frac{\sigma_M}{n_M},$$

gde su n_R i n_M odgovarajući stepeni sigurnosti

Orijentacione vrednosti za n_R: 1,5 – 3 srednje vrednosti; 1,25 – 1,33 ako se tačno zna naponsko stanje i primenjuju visoko kvalitetni materijali; 3 – 4 ako je stanje napona nedovoljno tačno određeno ili se primenjuju.materijali neodređenih kvaliteta.

Orijentacione vrednosti za n_M: 4-8 za liveno gvožđe, 8-12 za drvo itd.

Za pojedine standardne materijale σ_d se uvrđuje državnim propisima.

6.Izduženje štapa kojem se jedna krajnja tačka pomera a druga je nepokretna.

$\overline{DB} = l -$ dužina štapa pre deformacije

$\overline{DB'} = l_1 -$ dužina štapa nakon deformacije

$\overline{BB'} -$ pomeranje krajnje tačke B elastičnog štapa

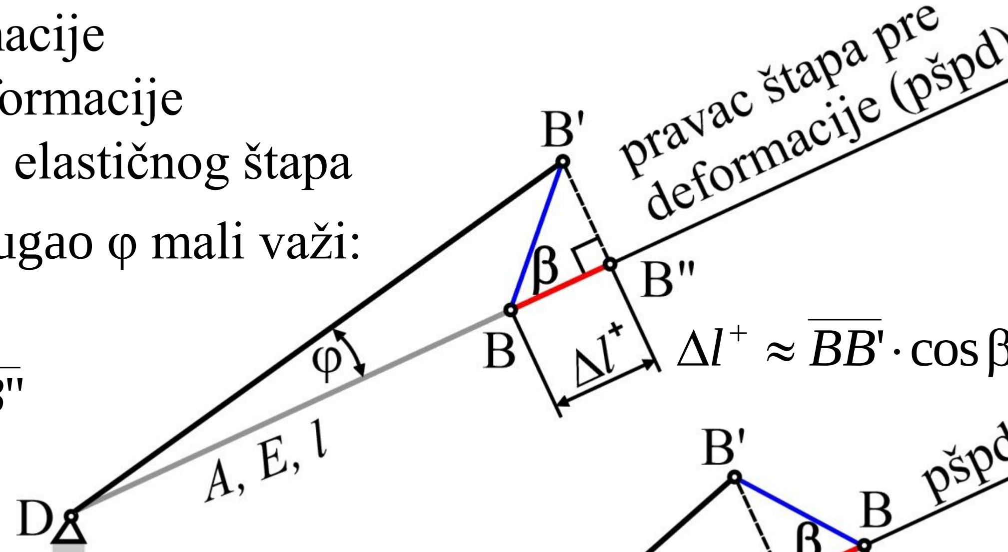
S obzirom da je u trouglu $DB'B''$ ugao φ mali važi:

$$\cos\varphi \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{DB'} \approx \overline{DB''} \quad \Rightarrow$$

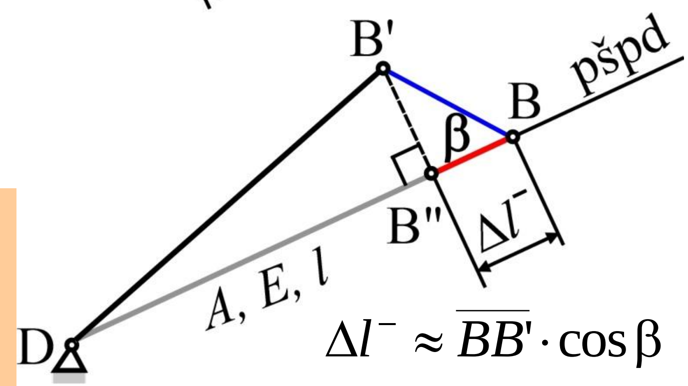
$$\Delta l^{+} = \overline{DB'} - \overline{DB} \approx \overline{DB''} - \overline{DB} = \overline{BB''}$$

Konačno, iz trougla $BB'B''$

$$\Rightarrow \quad \Delta l^{+} \approx \overline{BB'} \cdot \cos\beta$$



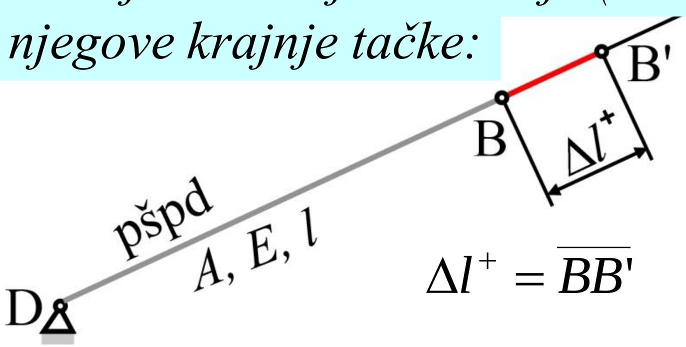
$$\Delta l^{+} \approx \overline{BB'} \cdot \cos\beta$$



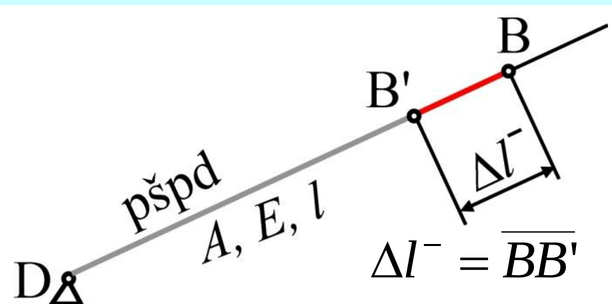
$$\Delta l^{-} \approx \overline{BB'} \cdot \cos\beta$$

Izduženje (ili skraćenje) elastičnog štapa jednako je projekciji pomeranja njegove krajnje tačke na pravac štapa pre deformacije.

Slučajevi kada je izduženje (ili skraćenje) elastičnog štapa jednako pomeranju njegove krajnje tačke:

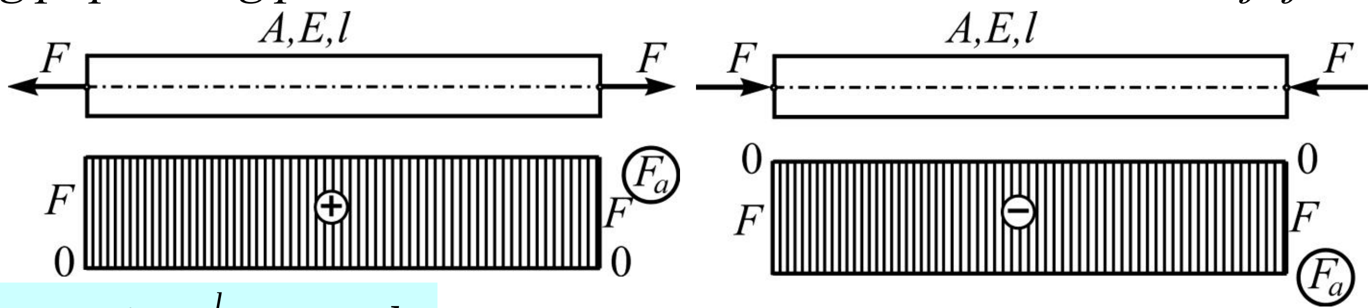


$$\Delta l^{+} = \overline{BB'}$$



$$\Delta l^{-} = \overline{BB'}$$

Štap konstantnog poprečnog preseka A, dužine l i modula elastičnosti E koji je zategnut ili pritisnut silom F:



$$F_a = F,\ \sigma = \frac{F}{A},$$

$$\Delta l^+ = \Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma dz = \frac{1}{E}\frac{F}{A}\int_0^l dz = \frac{Fl}{AE}.$$

$$\sigma = -\frac{F}{A}, \Delta l^+ = \Delta l = -\Delta l^- = -\frac{Fl}{AE}.$$

7.Aksijalno opterećeni štap koji po segmentima ima konstantne normalne napone. Dijagram aksijalnih sila. Izduženja segmenata.

Statička jednačina: $\sum Z_i = 0$ tj. $\sum F_i = 0$

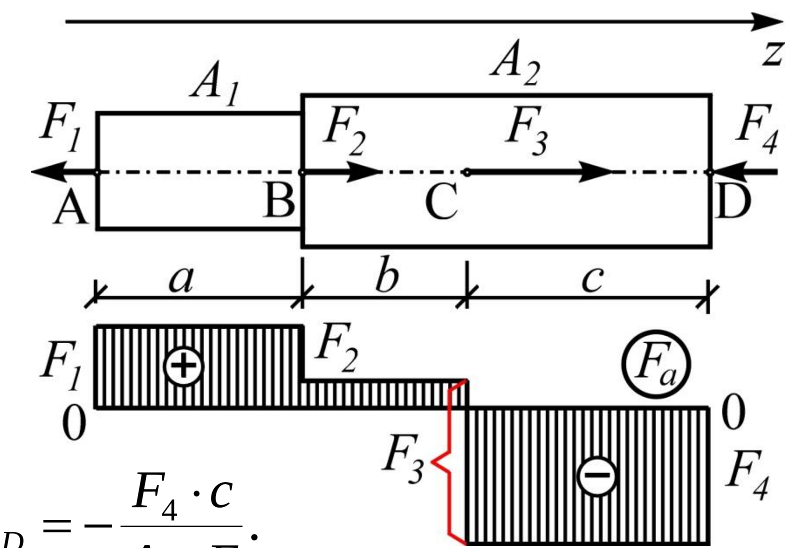
$$\Rightarrow\ -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = 0$$

Konstantni normalni naponi segmenata:

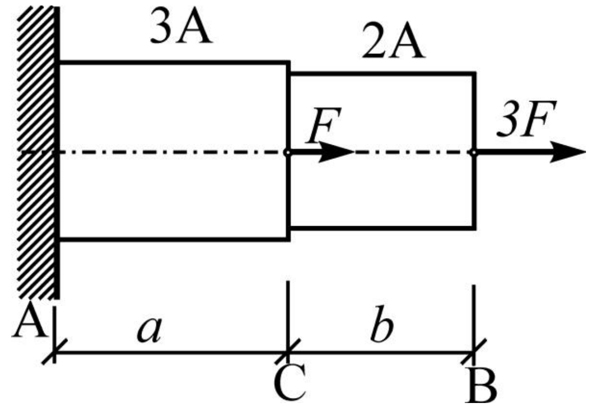
$$\sigma_{A-B} = \frac{F_1}{A_1},\quad \sigma_{B-C} = \frac{F_1 - F_2}{A_2},\quad \sigma_{C-D} = -\frac{F_4}{A_2}.$$

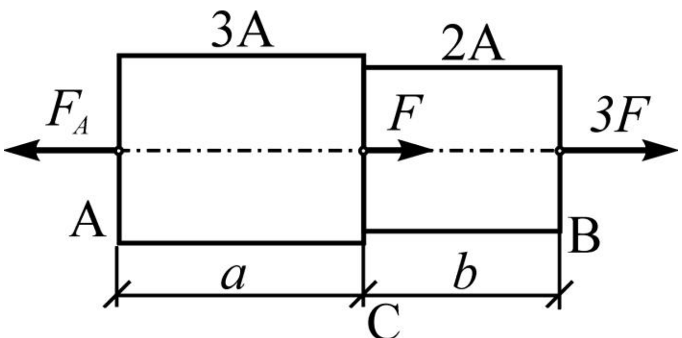
Izduženja segmenata i ukupno izduženje:

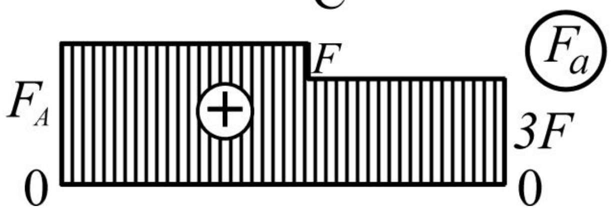
$$\Delta l_{A-B} = \frac{F_1 \cdot a}{A_1 \cdot E},\quad \Delta l_{B-C} = \frac{(F_1 - F_2)\cdot b}{A_2 \cdot E},\quad \Delta l_{C-D} = -\frac{F_4 \cdot c}{A_2 \cdot E}.$$



Primer 1.1 Za prikazan statički određen štap izložen aksijalnom opterećenju izvršiti dimenzionisanje (odrediti veličinu A koja određuje poprečni presek) i odrediti ukupno izduženje štapa (odnosno, odrediti $\Delta l_{\text{A-B}}$). Veličine σ_d, a, b, F i E su poznate. Za određivanje $\Delta l_{\text{A-B}}$ smatrati da je i veličina A poznata.







Statička jednačina:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow -F_A + F + 3F = 0 \quad \Rightarrow F_A = 4F$$

Naponi u segmentima i dimenzionisanje:

$$\sigma_{A-C} = \frac{4F}{3A} \le \sigma_d, \quad \sigma_{C-B} = \frac{3F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{3F}{2\sigma_d} \quad \text{jer je} \quad \frac{3F}{2A} > \frac{4F}{3A}$$

Ukupno izduženje štapa:

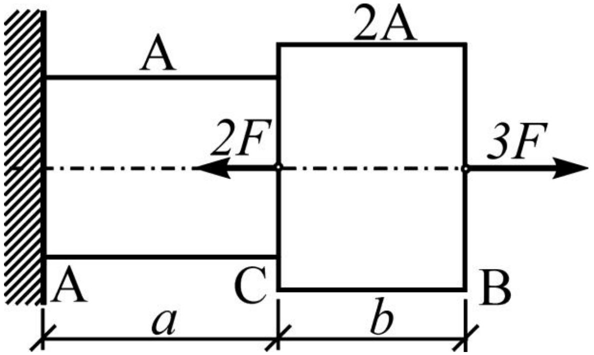
Ukupno izduženje štapa će se dobiti kao algebarski zbir izduženja njegovih segmenata:

$$\Delta l_{A-B} = \Delta l_{A-C} + \Delta l_{C-B} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_{A-B} = \frac{4Fa}{3AE} + \frac{3Fb}{2AE}$$

Δl_{A-C} - Izduženje prvog segmenta

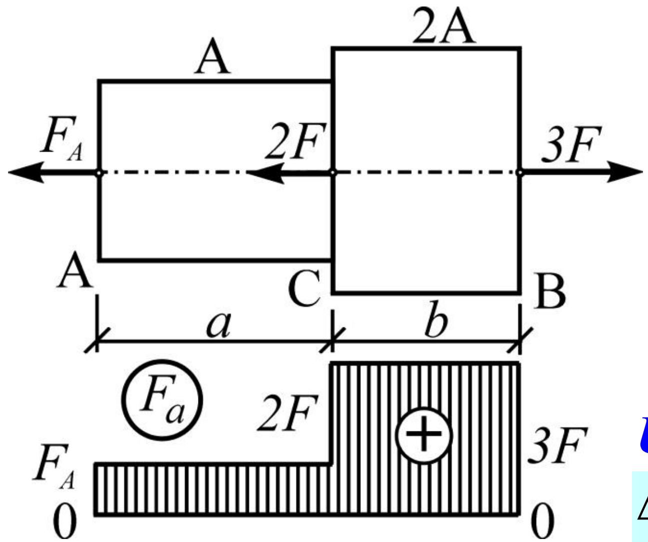
Δl_{C-B} - Izduženje drugog segmenta

Primer 1.2 Za prikazan statički određen štap izložen aksijalnom opterećenju izvršiti dimenzionisanje (odrediti veličinu A koja određuje poprečni presek) i odrediti ukupno izduženje štapa (odnosno, odrediti $\Delta l_{\text{A-B}}$). Štapu je temperatura povišena za Δt a koeficijent toplotnog širenja je α. Veličine σ_d, a, b, Δt, α, F i E su poznate. Za određivanje $\Delta l_{\text{A-B}}$ smatrati da je i veličina A poznata.



Statička jednačina:

$$\sum F_i = -F_A - 2F + 3F = 0 \Rightarrow F_A = F$$



Naponi u segmentima i dimenzionisanje:

$$\sigma_{A-C} = \frac{F}{A} \le \sigma_d, \quad \sigma_{C-B} = \frac{3F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{3F}{2\sigma_d} \quad \text{jer je} \quad \frac{3F}{2A} > \frac{F}{A}$$

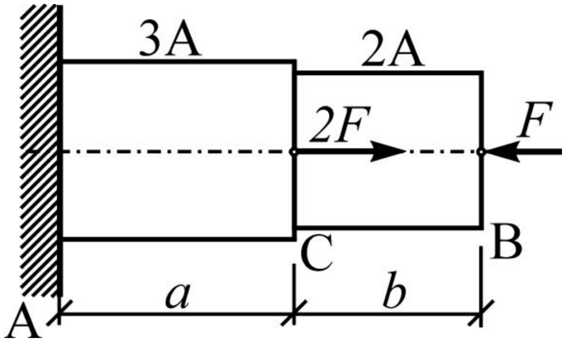
Ukupno izduženje štapa:

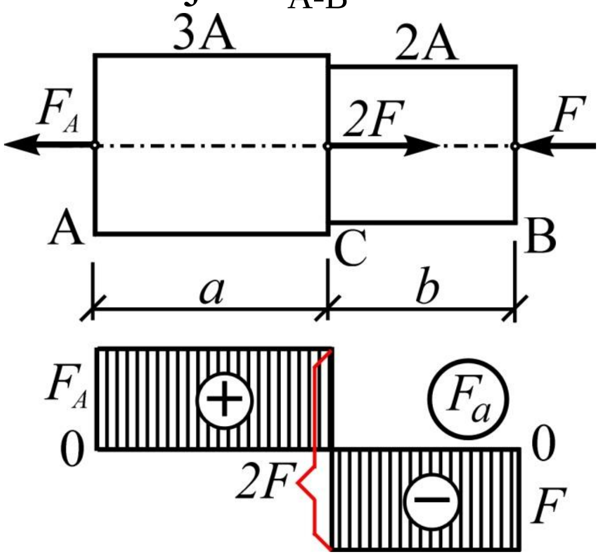
$$\Delta l_{A-B} = \left(\Delta l_{A-B}\right)_{\text{usled aksijalnih sila}} + \left(\Delta l_{A-B}\right)_{\text{usled temperature}}$$

Ukupno izduženje štapa će se dobiti kao algebarski zbir njegovog izduženja usled aksijalnog opterećenja i njegovog izduženja usled zagrevanja:

$$\Delta l_{A-B} = \frac{Fa}{AE} + \frac{3Fb}{2AE} + (a+b)\alpha\Delta t.$$

Primer 1.3 Za prikazan statički određen štap izložen aksijalnom opterećenju izvršiti dimenzionisanje (odrediti veličinu A koja određuje poprečni presek) i odrediti ukupno izduženje štapa (odnosno, odrediti $\Delta l_{\text{A-B}}$). Veličine σ_d, a, b, F i E su poznate. Za određivanje $\Delta l_{\text{A-B}}$ smatrati da je i veličina A poznata.





Statička jednačina:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow -F_A + 2F - F = 0 \quad \Rightarrow F_A = F$$

Naponi u segmentima i dimenzionisanje:

$$\sigma_{A-C} = +\frac{F}{3A} > 0, \quad \sigma_{C-B} = -\frac{F}{2A} < 0,$$

$$\left|\sigma_{A-C}\right| = \frac{F}{3A} \le \sigma_d, \quad \left|\sigma_{C-B}\right| = \frac{F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow$$

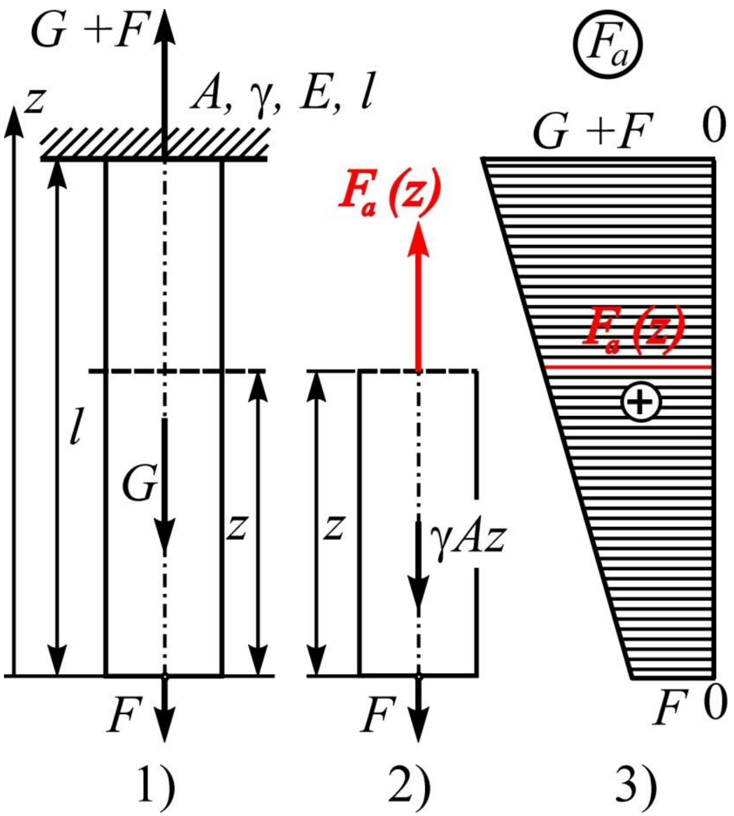
$$\frac{F}{2A} \le \sigma_d \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{F}{2\sigma_d} \quad \text{jer je} \quad \frac{F}{2A} > \frac{F}{3A}.$$

Ukupno izduženje štapa:

$$\Delta l_{A-B} = \Delta l_{A-C} + \Delta l_{C-B} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_{A-B} = \frac{Fa}{3AE} - \frac{Fb}{2AE}.$$

Izduženje drugog segmenta je negativno zato što je pritisnut: $\Delta l_{C-B} = -\dfrac{Fb}{2AE} < 0.$

8.Izduženje vertikalnog štapa uzimanjem u obzir sopstvene težine.



Vertikalni štap je površine poprečnog preseka A, specifične težine γ, modula elastičnosti E i dužine l. Osim sopstvene težine štap zateže i sila F (Sl.1). Promenljivu aksijalnu silu određujemo iz statičkog uslova ravnoteže kolinearnog sistema sila prikazanog na Sl.2:

$$\sum Z_i = 0 \Rightarrow -F - \gamma A z + F_a(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_a(z) = F + \gamma A z$$

Dijagram aksijalnih sila prikazan je na Sl.3.

Promenljiv napon:

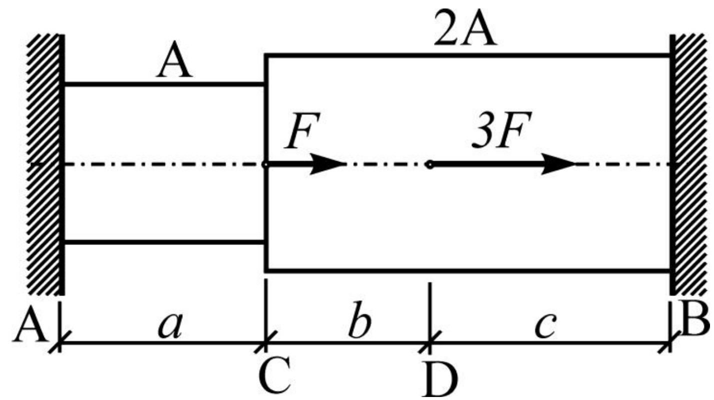
$$\sigma(z) = \frac{F_a(z)}{A} = \frac{F + \gamma A z}{A} = \frac{F}{A} + \gamma z$$

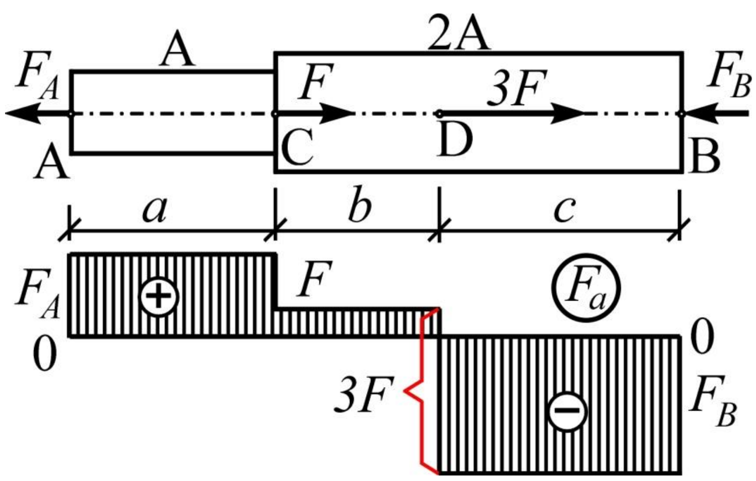
Izduženje: $$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma(z)dz = \frac{1}{E}\int_0^l \left(\frac{F}{A} + \gamma z\right)dz = \frac{1}{E}\left(\frac{F}{A}\int_0^l dz + \gamma\int_0^l zdz\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{Fl}{A} + \gamma\frac{l^2}{2}\right).$$

9.Rešavanje statički neodređenih problema kod aksijalno opterećenih štapova.

To rešavanje pre sve podrazumeva pisanje potrebne statičke jednačine (statičkih jednačina) po nepoznatim veličinama i geometrijskog (geometrijskih) uslova deformacije (GUD-a). GUD predstavlja linearnu vezu između deformacija (izduženja, skraćenja). Pošto su deformacije zavisne od nepoznatih veličina, GUD nas dovodi do dopunske jednačine po istim nepoznatim. Problem je praktično rešen kada se reši sistem sačinjen od statičkih i dopunskih jednačina.

Primer 1.5 Za prikazan statički neodređen štap izložen aksijalnom opterećenju nacrtati dijagram aksijalnih sila, odrediti: reakcije u uklještenjima *A* i *B*, napone u svim segmentima štapa i pomeranje preseka *C*. Veličine *A*, *a*, *b*, *c*, *F* i *E* su poznate.





Na štap osim zadatih sila dejstvuju i reakcije u uklještenjima F_A i F_B, čiji smerovi su pretpostavljeni kao što je na slici prikazano.

Statička jednačina:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow -F_A + F + 3F - F_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_A + F_B = 4F} \ldots (1)$$

Nacrtan je mogući oblik dijagrama aksijalnih sila u skladu sa pretpostavljenim smerovima za F_A i F_B.

GUD i dopunska jednačina:

Geometrijski uslov deformacije (GUD) odražava činjenicu da, zbog nepomerljivosti zidova, ukupno uzduženje štapa Δl_{A-B} mora biti jednako nuli.

$$\Delta l_{A-B} = \Delta l_{A-C} + \Delta l_{C-D} + \Delta l_{D-B} = 0 \Rightarrow \frac{F_A a}{AE} + \frac{(F_A - F)b}{2AE} - \frac{F_B c}{2AE} = 0 \ldots (2)$$

Rešenja sistema jednačina (1) i (2):

$$F_A = \frac{b + 4c}{2a + b + c} F, \quad F_B = \frac{8a + 3b}{2a + b + c} F.$$

Naponi u segmentima:

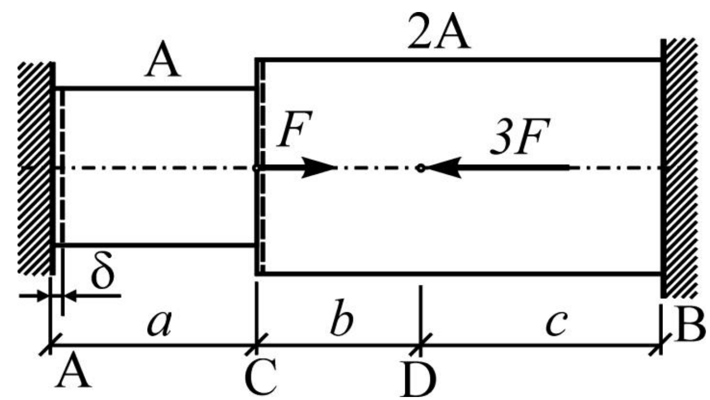
$$\sigma_{A-C} = \frac{F_A}{A} = \ldots, \quad \sigma_{C-D} = \frac{F_A - F}{2A} = \ldots, \quad \sigma_{D-B} = -\frac{F_B}{2A} = \ldots$$

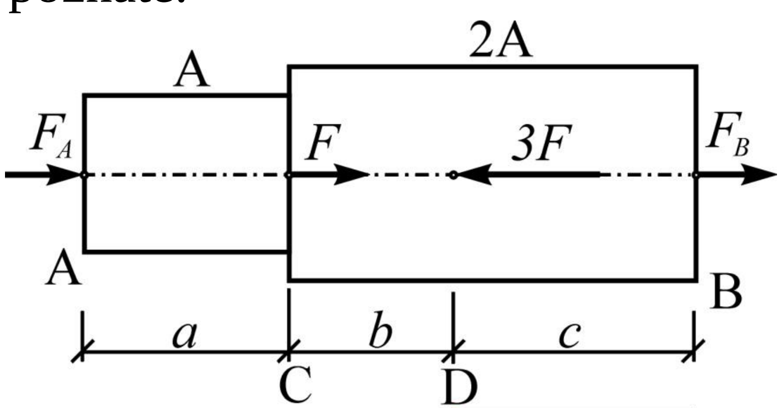
Pomeranje preseka C:

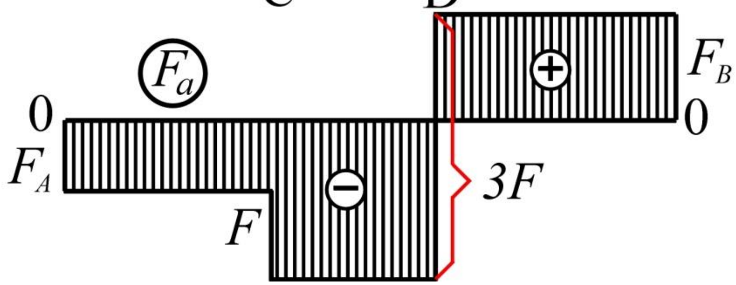
Pomeranje preseka C u desnu stranu δ_C ima istu vrednost kao što je izduženje dela štapa koji se proteže od A do C.

$$\delta_C = \Delta l_{A-C} = \frac{F_A a}{AE} = \ldots$$

Primer 1.6 Za prikazan statički neodređen štap izložen aksijalnom opterećenju nacrtati dijagram aksijalnih sila i odrediti: reakcije u *A* i *B*, napone u svim segmentima štapa i pomeranje preseka *D*. Štap je u B uklješten a pre dejstva aktivnih sila na levom kraju je postojao mali zazor δ. Nakon dejstva aktivnih sila na levom kraju se, usled pritiska štapa na zid pojavila reakcija. Veličine *A*, *a*, *b*, *c*, δ, *F* i *E* su poznate.







Na štap osim zadatih sila dejstvuju i reakcije u uklještenjima F_A i F_B, čiji smerovi su pretpostavljeni kao što je na slici prikazano.

Statička jednačina:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow F_A + F - 3F + F_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_A + F_B = 2F} \ldots(1)$$

Nacrtan je mogući oblik dijagrama aksijalnih sila u skladu sa pretpostavljenim smerovima za F_A i F_B.

GUD i dopunska jednačina:

Geometrijski uslov deformacije (GUD) odražava činjenicu da, zbog nepomerljivosti zidova, ukupno uzduženje štapa Δl_{A-B} mora biti jednako zazoru δ.

$$\Delta l_{A-B} = \Delta l_{A-C} + \Delta l_{C-D} + \Delta l_{D-B} = \delta \Rightarrow \quad -\frac{F_A a}{AE} - \frac{(F_A + F)b}{2AE} + \frac{F_B c}{2AE} = \delta ...(2)$$

Rešenja sistema jednačina (1) i (2):

$$F_A = \frac{(2c-b)F - 2AE\delta}{2a+b+c}, \quad F_B = \frac{(4a+3b)F + 2AE\delta}{2a+b+c}.$$

Naponi u segmentima:

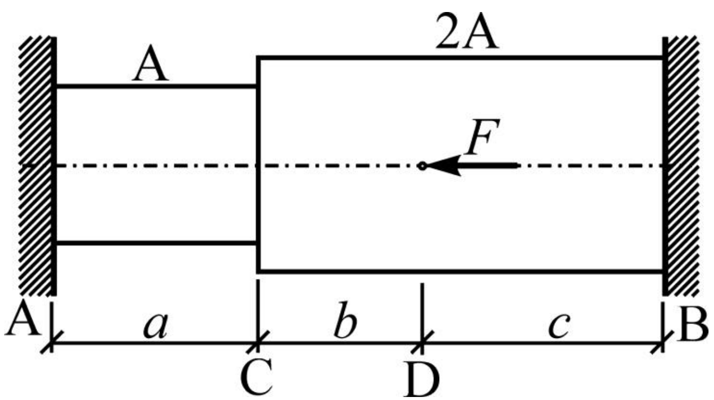
$$\sigma_{A-C} = -\frac{F_A}{A} = ..., \quad \sigma_{C-D} = -\frac{F_A + F}{2A} = ..., \quad \sigma_{D-B} = \frac{F_B}{2A} = ...$$

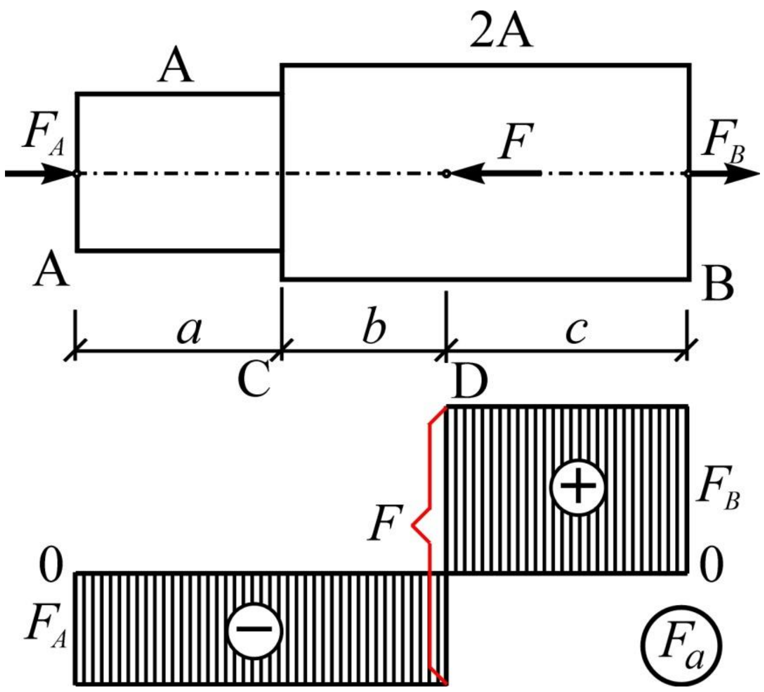
Pomeranje preseka C:

Pomeranje u levu stranu preseka *D* δ_D ima istu vrednost kao što je izduženje dela štapa koji se proteže od *D* do *B*.

$$\delta_D = \Delta l_{D-B} = \frac{F_B c}{2AE} = ...$$

Primer 1.7 Za prikazan statički neodređen štap izložen aksijalnom opterećenju, usled sila u aksijalnom pravcu i zagrevanja, nacrtati dijagram aksijalnih sila i odrediti: reakcije u uklještenjima A i B, napone u svim segmentima štapa i pomeranje preseka C. Štapu je temperatura povišena za Δt a koeficijent toplotnog širenja je α. Veličine A, a, b, c, Δt, α, F i E su poznate.





Na štap osim zadate sile dejstvuju i reakcije u uklještenjima F_A i F_B, čiji smerovi su pretpostavljeni kao što je na slici prikazano.

Statička jednačina:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow F_A - F + F_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{F_A + F_B = F} \ldots(1)$$

Nacrtan je mogući oblik dijagrama aksijalnih sila u skladu sa pretpostavljenim smerovima za F_A i F_B.

GUD i dopunska jednačina:

Geometrijski uslov deformacije (GUD) odražava činjenicu da, zbog nepomerljivosti zidova, ukupno uzduženje štapa Δl_{A-B}, prouzrokovano kako aksijalnim opterećenjem tako i zagrevanjem, mora biti jednako nuli:

$$\Delta l_{A-B} = \left(\Delta l_{A-B}\right)_{\text{usled aksijalnih sila}} + \left(\Delta l_{A-B}\right)_{\text{usled temperature}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{F_A a}{AE} - \frac{F_A b}{2AE} + \frac{F_B c}{2AE} + (a+b+c)\alpha\Delta t = 0 \ldots(2)$$

Rešenja sistema jednačina (1) i (2):

$$F_A = \frac{cF + 2(a+b+c)AE\alpha\Delta t}{2a+b+c}, \quad F_B = \frac{(2a+b)F - 2(a+b+c)AE\alpha\Delta t}{2a+b+c}.$$

Naponi u segmentima:

$$\sigma_{A-C} = -\frac{F_A}{A} = \ldots, \quad \sigma_{C-D} = -\frac{F_A}{2A} = \ldots, \quad \sigma_{D-B} = +\frac{F_B}{2A} = \ldots$$

Pomeranje preseka C:

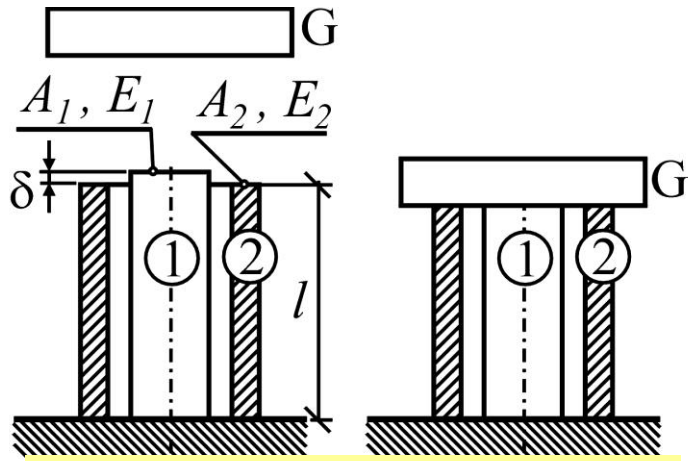
Pomeranje preseka C u levu stranu δ_C ima istu vrednost kao što je skraćenje dela štapa koji se proteže od A do C.

$$\delta_C = \Delta l^-_{A-C} = -\Delta l_{A-C} = \frac{F_A a}{AE} - a\alpha\Delta t = \ldots$$

$\Delta l^+_{A-C} = \Delta l_{A-C}$ - Izduženje segmenta koji se proteže između preseka A i C

Δl^-_{A-C} - Skraćenje segmenta koji se proteže između preseka A i C

Primer 1.8 Centrični elastični štapovi 1 i 2 centrično su pritisnuti krutom pločom težine G. Štap 1 je duži od štapa 2 za δ, koje je mala veličina. Odrediti napone u štapovima? Poznate veličine su: G, A_1,A_2, E_1, E_2, l i δ.



Na krutu ploču dejstvuje uravnoteženi kolinearni sistem sila (Sl.1) gde sila $\vec{S}_1$ po svom intenzitetu odgovara sili kojom je pritisnut štap 1 dok sila $\vec{S}_2$ po svom intenzitetu odgovara sili kojom je pritisnut štap 2.

GUD i dopunska jednačina:

Štap 1 ima ćenje veće od skraćenja štapa 2 za δ:

$$\text{Sl.2}\Rightarrow\ \Delta l_1^- - \Delta l_2^- = \delta\ldots(GUD)$$

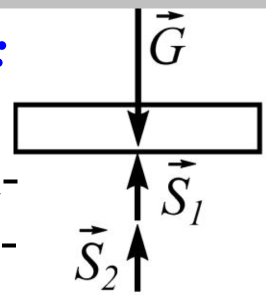
Zbog $\Delta l_1^- = \dfrac{S_1 l}{A_1 E_1}$ i $\Delta l_2^- = \dfrac{S_2 l}{A_2 E_2}$,

GUD daje dopunsku jednačinu:

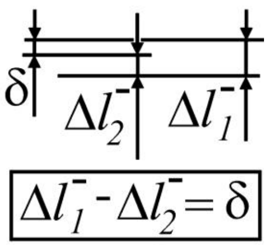
$$\frac{S_1 l}{A_1 E_1} - \frac{S_2 l}{A_2 E_2} = \delta\ldots(2)$$

Statička jednačina:

U ovom problemu, koji je jedan put statički neodređen, statička jednačina je:



1)



2)

$$\text{Sl.1}\Rightarrow\ S_1 + S_2 = G\ldots(1)$$

Tražena rešenja: Rešenja sistema jednačina (1) i (2) su:

$$S_1 = A_1 E_1 \frac{Gl + A_2 E_2 \delta}{l(A_1 E_1 + A_2 E_2)},\ S_2 = A_2 E_2 \frac{Gl - A_1 E_1 \delta}{l(A_1 E_1 + A_2 E_2)} \Rightarrow \sigma_i = -\frac{S_i}{A_i} = \ldots,\ i = 1,2.$$