38. Kulonovi zakoni trenja klizanj
Ugao trenja. Konus trenja.

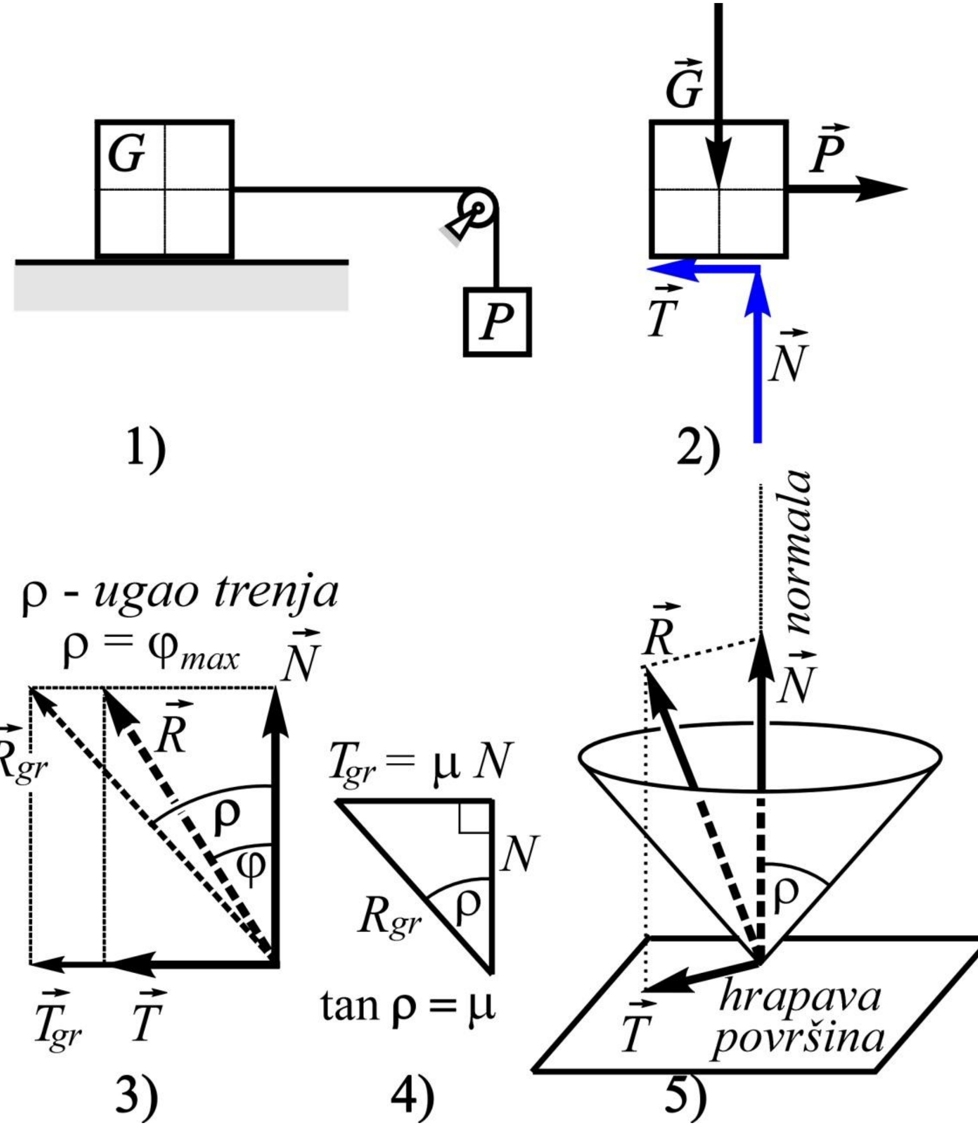
Sl.2 $\sum X_i = 0 \Rightarrow T = P$

1.Sila trenja klizanja, kojom uklonjeno telo dejstvuje na posmatrano i koja je suprotnog smera od težnje za kretanjem tačke na koju ona dejstvuje u odnosu na uklonjeno telo, može imati sve vrednosti od nule do njene maksimalne (granične) vrednosti, tj $0 \le T \le T_{gr}$

2.Granična vrednost sile trenja jednaka je proizvodu statičkog koeficijenta trenja μ i intenziteta odgovarajuće normalne reakcije

$$T_{gr} = \mu \cdot N$$

3.Veličina granične sile trenja u dovoljno širokoj oblasti ne zavisi od veličine dodirnih površina pri trenju.



Granična sila trenja, ugao trenja i konus trenja

Kada je sila trenja $\vec{T}$ jednaka graničnoj sili $\vec{T}_{gr}$ onda odgovarajuća reakcija hrapave veze $\vec{R} = \vec{R}_{gr}$ najviše odstupa od normale. Taj maksimalni ugao

odstupanja reakcije hrapave veze od normale, koji će biti označavan sa ρ, nosi naziv ugao trenja (Sl.3). Na osnovu pravouglog trougla sa slike 4, lako se dobija da je veza između koeficijenta trenja klizanja i ugla trenja sledeća:

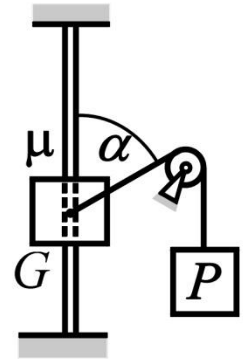
$\tan\rho = \mu \quad \Rightarrow \quad \rho = \arctan\mu$

Kada se tačka jednog tela nalazi na hrapavoj površini drugog tela koje dejstvuje na tu tačku reakcijom hrapave veze $\vec{R}$ i kada je moguća težnja za kretanjem tačke u svim pravcima hrapave površine onda se reakcija hrapave veze mora nalaziti unutar konusa prikazanog na slici 5 koji se naziva konusom trenja. Ovde je ugao pri vrhu konusa 2ρ; osa konusa je u pravcu normale na hrapavu površinu a pretpostavljeno je da je koeficijent trenja klizanja isti u svim pravcima hrapave površine.

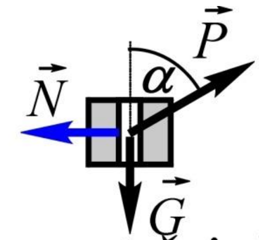
Ravanski zadaci sa trenjem mogu se rešavati uz pomoć konusa trenja i teoreme o tri neparalelne sile. U takvim zadacima aktivno opterećenje se zamenjuje sa njegovom rezultantom što je jedna od tri sile čija je napadna linija važna za proučavanje ravnoteže. Druge dve sile koje dejstvuju na telo su reakcije veza. Na mestima hrapavih veza se konstruišu odgovarajući konusi trenja gde se ima u vidu da reakcije hrapavih veza moraju biti unutar svojih konusa trenja.

Primer 9.4

Klizač težine G može da klizi po vertikalnom hrapavom štapu gde je koeficijent trenja klizanja μ (Sl.1). Za klizač je vezano i uže koje je prebačeno preko idealnog kotura na čijem je drugom kraju okačen teret težine P. Uže gradi sa vertikalom ugao α. U zavisnosti od poznatih veličina G, μ i α odrediti dijapazon u okviru kojeg se može kretati vrednost tereta P za prikazan ravnotežni položaj. $P_{\min} \le P \le P_{\max}$



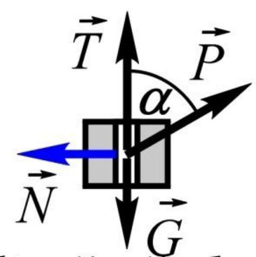
1)



nema težnje klizača za kretanjem ($T=0$)

$P\cos\alpha = G$

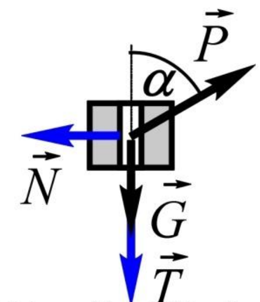
2)



klizač teži da se kreće naniže

$P\cos\alpha < G$

3)



klizač teži da se kreće naviše

$P\cos\alpha > G$

4)

Granični slučaj kada je $P\cos\alpha < G$

Sl.3 $P = P_{\min}, \quad T = T_{gr} = \mu \cdot N$

$$\sum X_i = -N + P_{\min}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = P_{\min}\sin\alpha$$

$$\sum Y_i = T + P_{\min}\cos\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow \mu P_{\min}\sin\alpha + P_{\min}\cos\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow P_{\min}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = G$$

$$\Rightarrow P_{\min} = \frac{G}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

Granični slučaj kada je $P\cos\alpha > G$

Sl.4 $P = P_{\max}\,, \quad T = T_{gr} = \mu \cdot N$

$$\sum X_i = -N + P_{\max}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = P_{\max}\sin\alpha$$

$$\sum Y_i = -T + P_{\max}\cos\alpha - G = 0$$

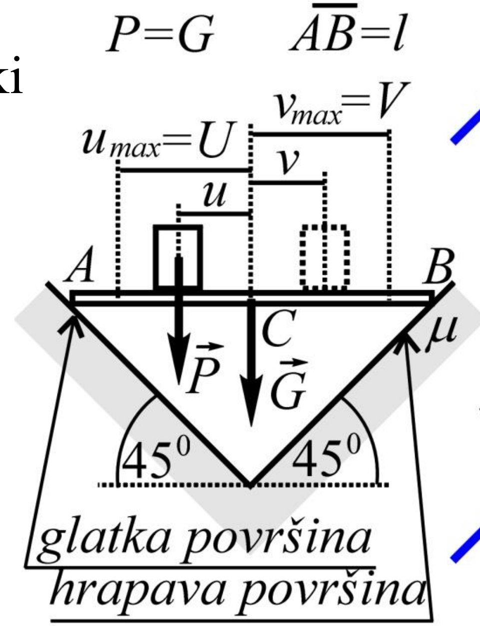
$$\Rightarrow -\mu P_{\max}\sin\alpha + P_{\max}\cos\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow P_{\max}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) = G$$

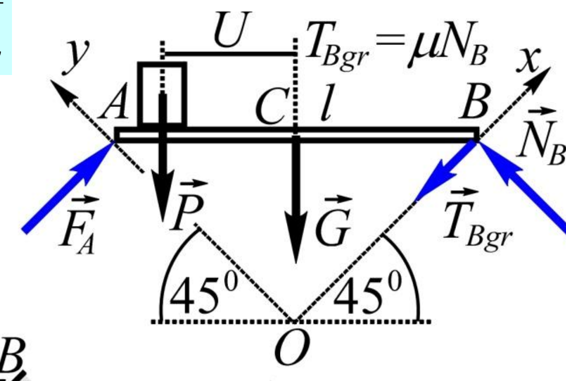
$$\Rightarrow P_{\max} = \frac{G}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

Primer 9.5

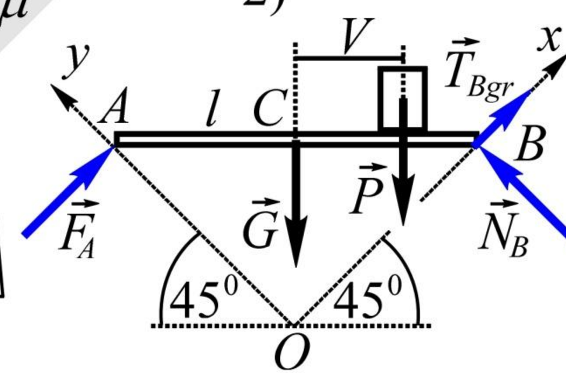
Horizontalni homogeni štap *AB* težine *G*, dužine *l*, naslanja se u tački A na glatku strmu ravan a u tački *B* na hrapavu strmu ravan (Sl.1). Obe strme ravni grade sa horizontalom ugao od 45^0. Koeficijent trenja na mestu *B* iznosi $\mu = 1/4$. Na štapu se nalazi i teret težine $P=G$. Odrediti sve moguće pozicije tereta *P* (odnosno, granice za *u* i *v*) za prikazan ravnotežni položaj. Veličinu *l* smatrati poznatom.



1)



2)



3)

Pošto traženi odgovor mora biti u obliku $0 \le u \le u_{\max} = U,\; 0 \le v \le v_{\max} = V$ ***dovoljno je da se iz dva granična slučaja ravnoteže odrede ograničenja U i V.***

Određivanje U (jedan granični slučaj ravnoteže) **Sl.2**

$$\sum Y_i = N_B - G\frac{\sqrt{2}}{2} - G\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_B = \sqrt{2}G$$

$$\sum X_i = F_A - G\frac{\sqrt{2}}{2} - G\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{5\sqrt{2}}{4}G$$

$$\sum M_{Oi} = N_B \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} - F_A \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} + G \cdot U = 0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{4}l$$

Određivanje V (drugi granični slučaj ravnoteže) **Sl.3**

$$\sum Y_i = N_B - G\frac{\sqrt{2}}{2} - G\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_B = \sqrt{2}G$$

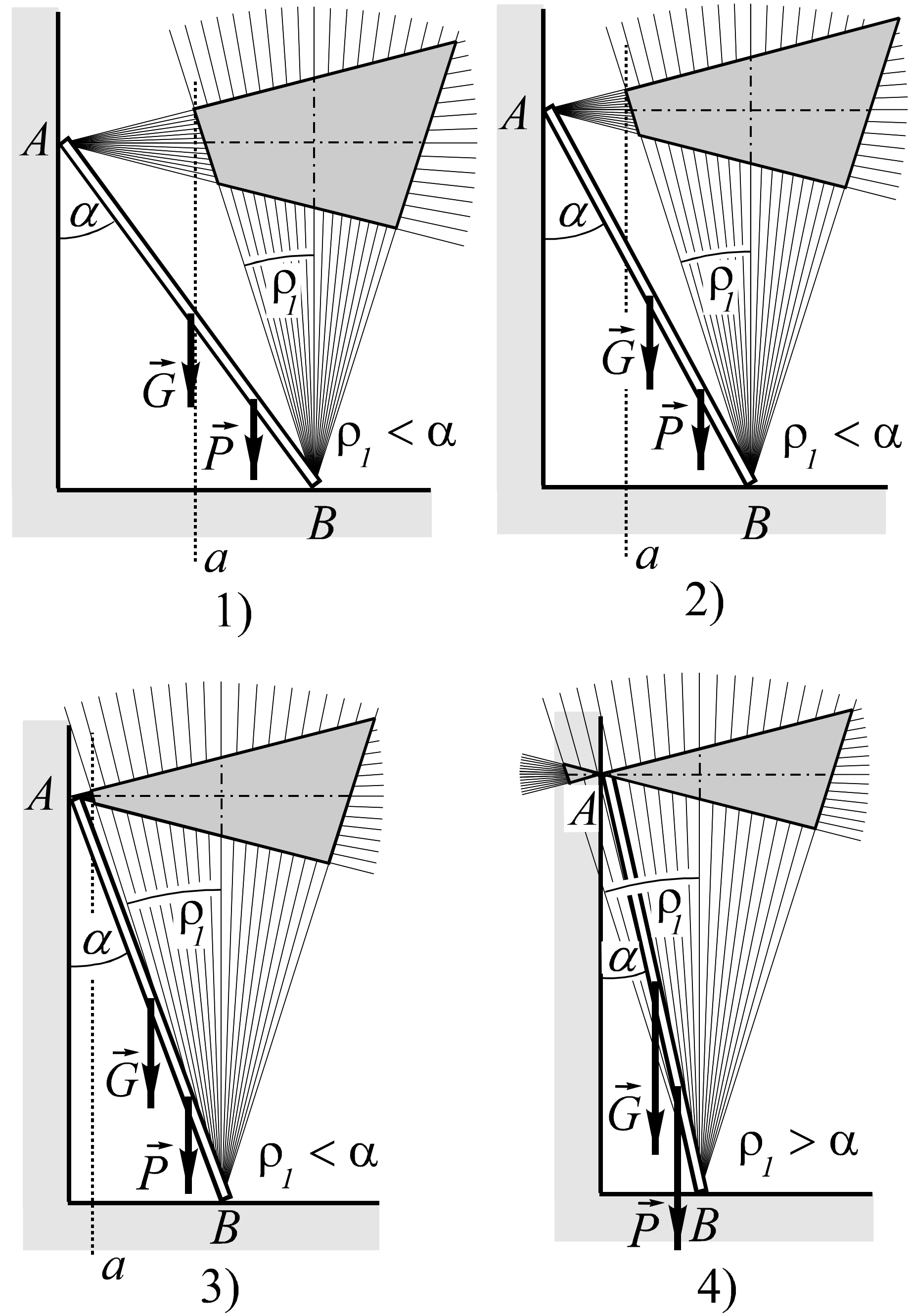
$$\sum X_i = F_A - G\frac{\sqrt{2}}{2} - G\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu N_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{3\sqrt{2}}{4}G$$

$$\sum M_{Oi} = N_B \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} - F_A \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} - G \cdot V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{4}l$$

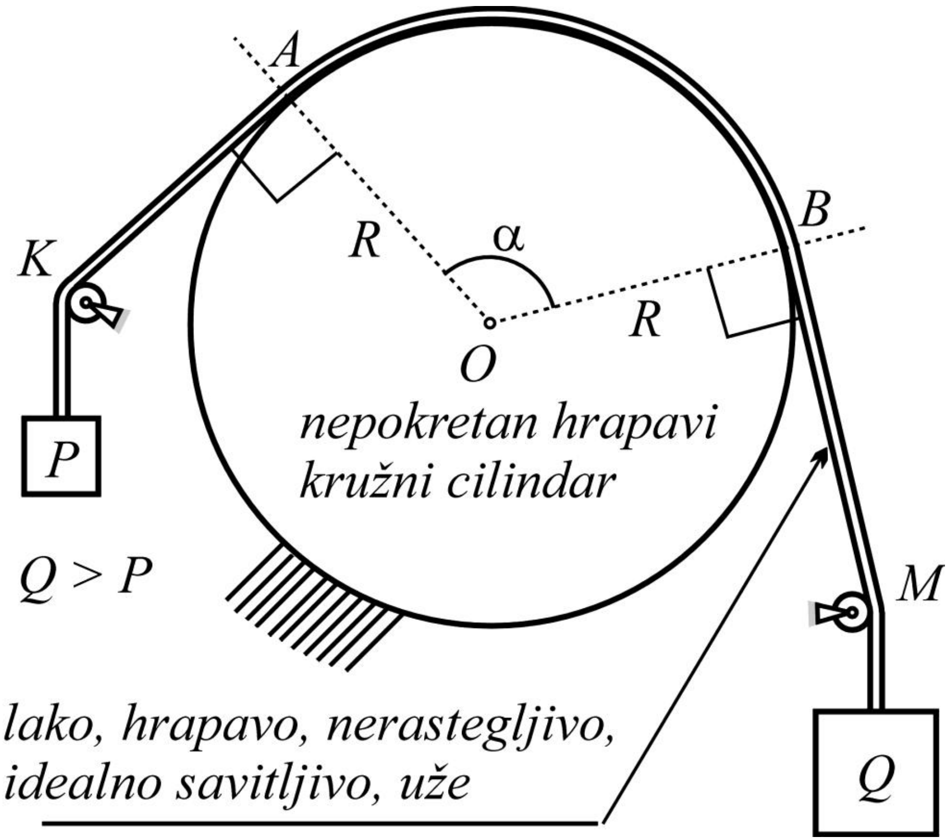
Primer 9.6

Koristeći konuse trenja i teoremu o tri neparalelne sile komentarisati ravnotežu teških merdevina težine *G* koje su opterećene i dodatnom težinom *P*.

Povučene vertikalne linije *a* na ovim slikama služe da se na osnovu pozicije napadne linije rezultante aktivnog opterećenja zaključi kada je ravnoteža merdevina moguća a kada ne. Zapravo, s obzirom na teoremu o tri neparalelne sile, ako bi se napadna linija te rezultante nalazila desno od linije *a*, merdevine bi se nalazile u ravnoteži a ako bi se ta napadna linija nalazila levo ravnoteža bi bila nemoguća.



39. Trenje užeta o cilindričnu površinu

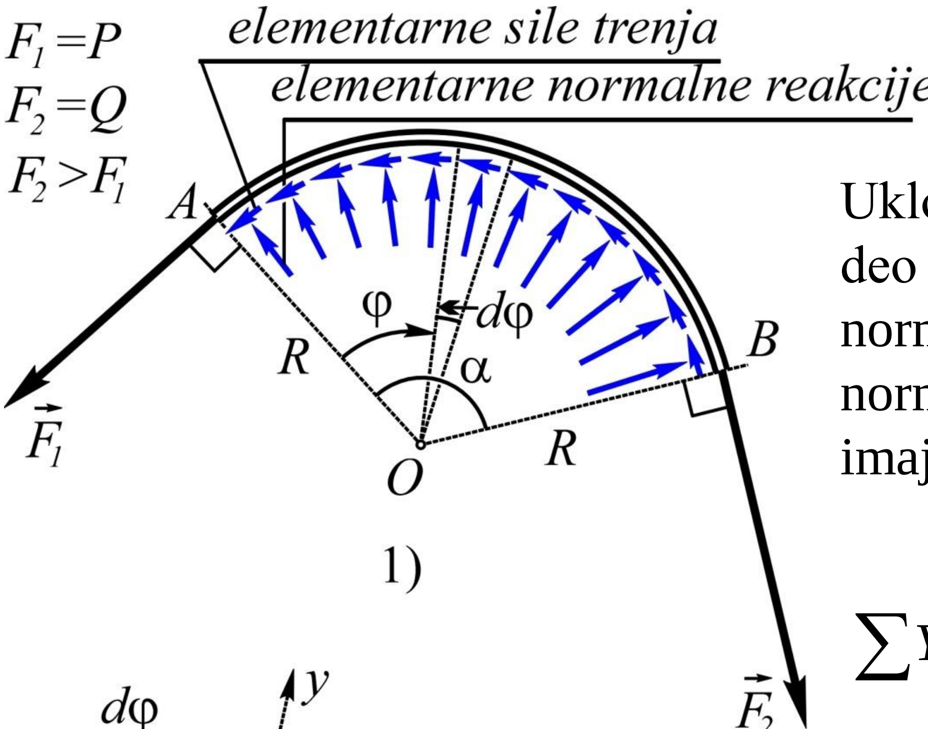


Sila u užetu na desnom kraju je intenziteta $F_2 = Q$ a na levom $F_1 = P$ gde je $Q > P$ (odnosno $F_2 > F_1$). Neka koeficijent trenja klizanja između užeta i cilindra iznosi μ i neka obuhvatni ugao (ugao AOB) iznosi α.

Problem će biti rešen ako se, na primer, za zadato F_1 odredi $F_{2\max}$. Posmatraće se ravnoteža užeta u graničnom slučaju.

Na slici 1 (naredni slajd) prikazan je uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na lučni deo užeta, koji obuhvata cilindričnu površinu. Proizvoljni presek tog dela užeta definisan je ugaonom koordinatom φ.

Na slici 2 prikazan je, u graničnom slučaju, uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na elementarni deo užeta, koji se proteže od preseka definisanog koordinatom φ do preseka definisanog koordinatom φ + dφ.



1)

Sila u užetu je funkcija koordinate φ

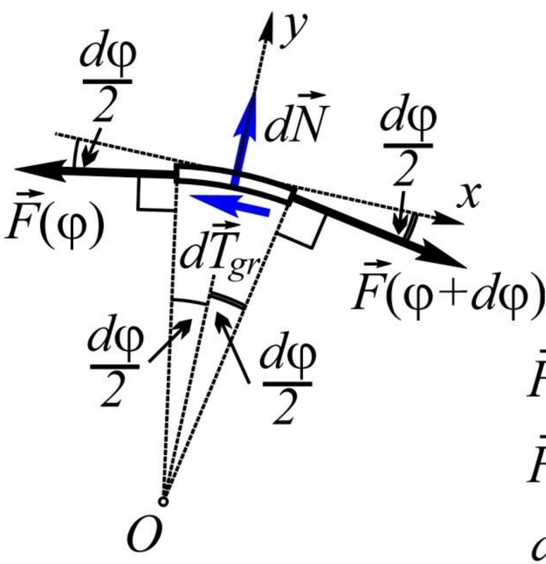
$$F = F(\varphi),\ F(0) = F_1,\ F(\alpha) = F_{2\max}$$

Uklonjena hrapava površina na taj lučni deo užeta dejstvuje elementarnim normalnim reakcijama, koje imaju pravac normala, i elementarnim silama trenja koje imaju pravac tangenti.

Sl.2

$$\sum Y_i = dN - F\sin\frac{d\varphi}{2} - (F + dF)\sin\frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2},\ dF \cdot d\varphi \approx 0\ \Rightarrow dN = F d\varphi$$



2)

$$\vec{F}(\varphi) = \vec{F}$$

$$\vec{F}(\varphi + d\varphi) = \vec{F} + d\vec{F}$$

$$dT_{gr} = \mu \cdot dN$$

$$\sum X_i = (F + dF)\cos\frac{d\varphi}{2} - F\cos\frac{d\varphi}{2} - \mu\, dN = 0,$$

$$\cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1 \Rightarrow \frac{dF}{F} = \mu d\varphi,\quad \ln F = \mu\varphi + C$$

$$C = \ln F_1,\quad F(\varphi) = F_1 e^{\mu\varphi}\quad F_{2\max} = F_1 e^{\mu\alpha}$$

Primer 9.7 Za krajeve užeta prebačenog preko cilindrične površine, gde je μ=1/π a α=π, vezan je horizontalni homogeni štap AB težine G, dužine 2R kao što je to na slici 1 prikazano. Štap je opterećen i dodatnim teretom težine P koji se nalazi desno od sredine štapa na nepoznatom rastojanju u. Odrediti dijapazon za *u* u prikazanom ravnotežnom položaju?

$$F_{2\max} = F_1 \cdot e^{\mu\alpha} \quad \Rightarrow \quad F_{2\max} = F_1 \cdot e$$

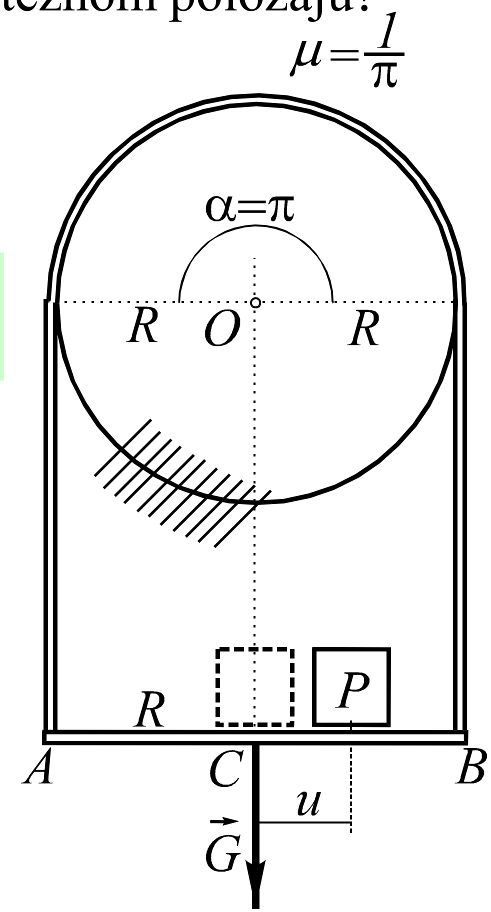
$$\sum Y_i = F_1 + F_{2\max} - G - P = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{G+P}{e+1}, F_{2\max} = \frac{e}{e+1}(G+P)$$

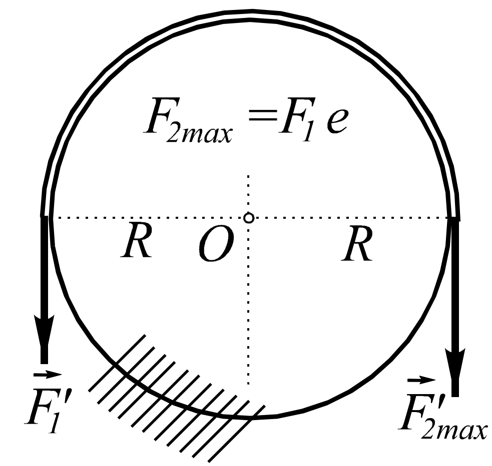
Momentni uslov ravnoteže sistema sila sa slike 3, izborom sredine štapa za momentnu tačku, daje jednačinu:

$$\sum M_{Ci} = -F_1 \cdot R + F_{2\max} \cdot R - P \cdot U = 0$$

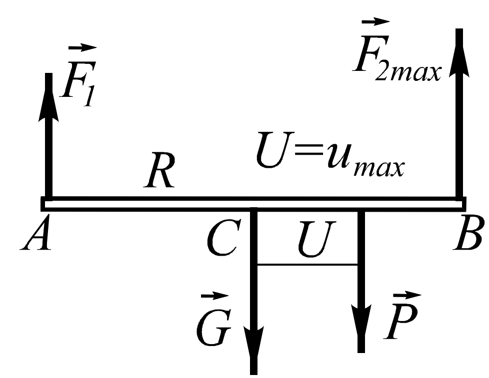
$$\Rightarrow u_{\max} = U = \frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{G+P}{P} \cdot R$$



1)



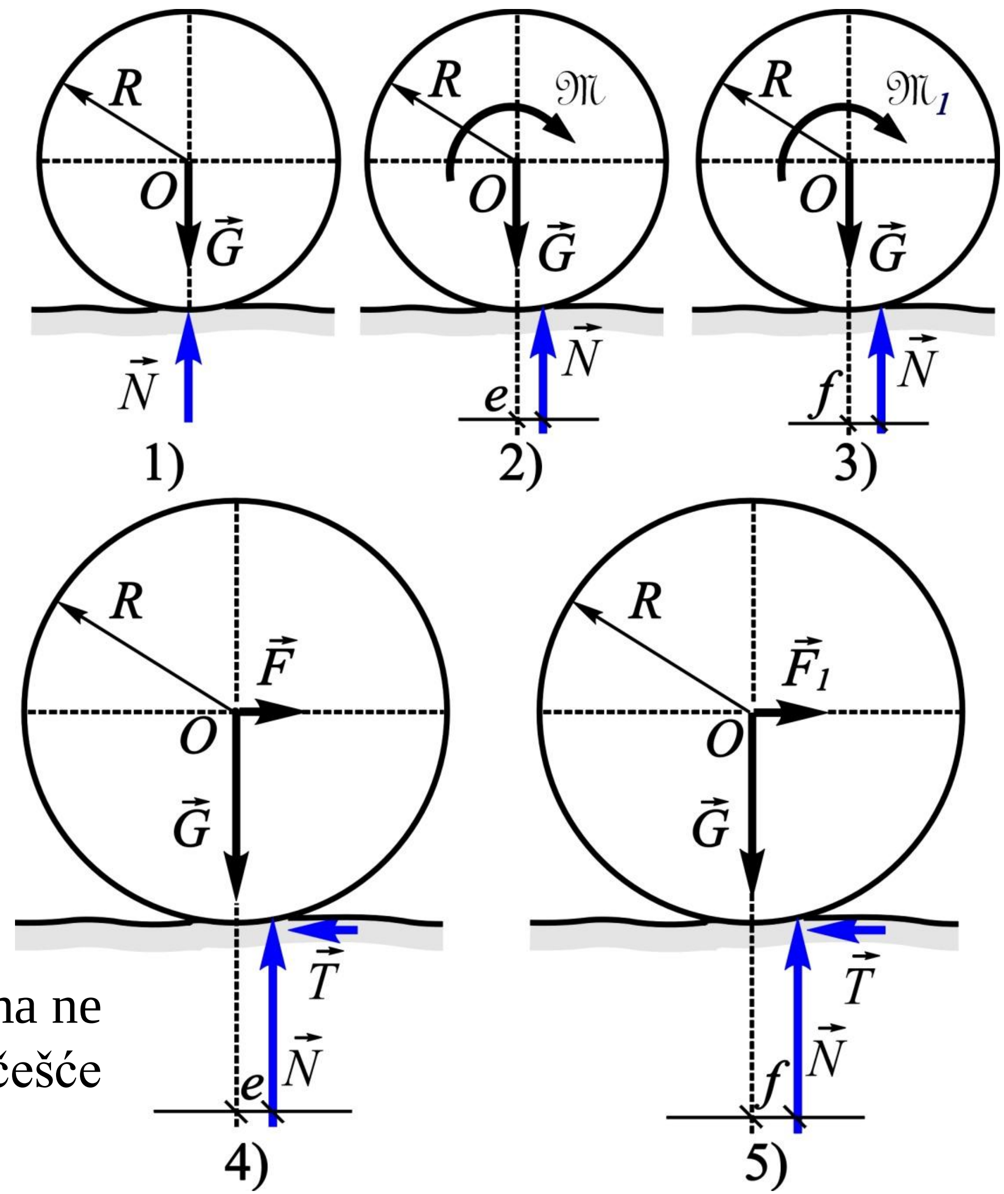
2)



3)

40. Kotrljanje točka po deformabilnoj podlozi

Iako se pri kotrljanju točka deformišu i sam točak i podloga, smatrajmo ovde da je samo podloga deformabilna.



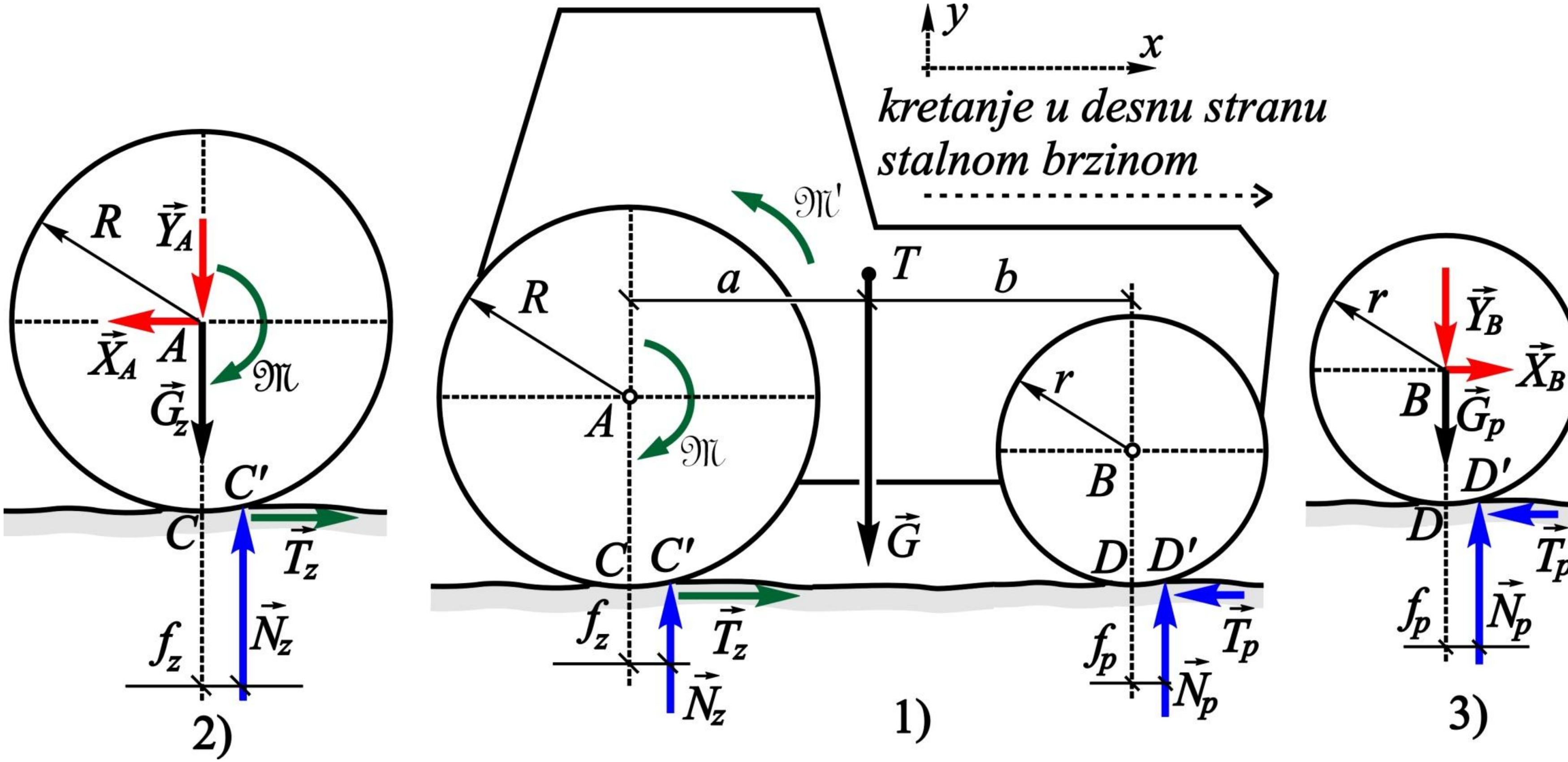
Istaknimo još jednu veoma važnu činjenicu. Radi se o tome da se, u opštem slučaju, pri kotrljanju točka bez klizanja javlja i sila trenja klizanja, što znači da i točak i podloga moraju da budu hrapavi.

Sl.2 $e = \dfrac{\mathfrak{M}}{G}$, $0 \le e \le e_{max} = f$

Sl.4 $e = \dfrac{FR}{G}$, $0 \le e \le e_{max} = f$

Pošto se u većini praktičnih problema ne javlja klizanje, ove sile trenja najčešće zadovoljavaju uslov $T < \mu \cdot N$

Primer 9.8 Uzimajući u obzir deformabilnost podloge a zanemarujući sve ostale otpore odrediti sve reakcije veza i pogonski moment $\mathfrak{M}$ za uprošćen model traktora sa pogonom na zadnje točkove koji se kreće stalnom brzinom. Smatrati da su poznate sledeće veličine: ukupna težina traktora G i težine njegovih točkova G_z i G_p kao i geometrijske mere a, b, R, r, f_z i f_p.



Sl.1 $\sum M_{C'i} = -G(a - f_z) + N_p(a + b + f_p - f_z) = 0 \Rightarrow N_p = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} G$

$\sum Y_i = N_z + N_p - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N_z = \dfrac{b + f_p}{a + b + f_p - f_z} G$

Sl.3 $\sum M_{Di} = N_p \cdot f_p - X_B \cdot r = 0 \Rightarrow \quad X_B = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} \cdot \dfrac{f_p}{r} \cdot G$

$\sum X_i = X_B - T_p = 0 \quad \Rightarrow \quad T_p = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} \cdot \dfrac{f_p}{r} \cdot G$

$\sum Y_i = -Y_B - G_p + N_p = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} G - G_p$

Sl.1 $\sum X_i = T_z - T_p = 0 \quad \Rightarrow \quad T_z = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} \cdot \dfrac{f_p}{r} \cdot G$

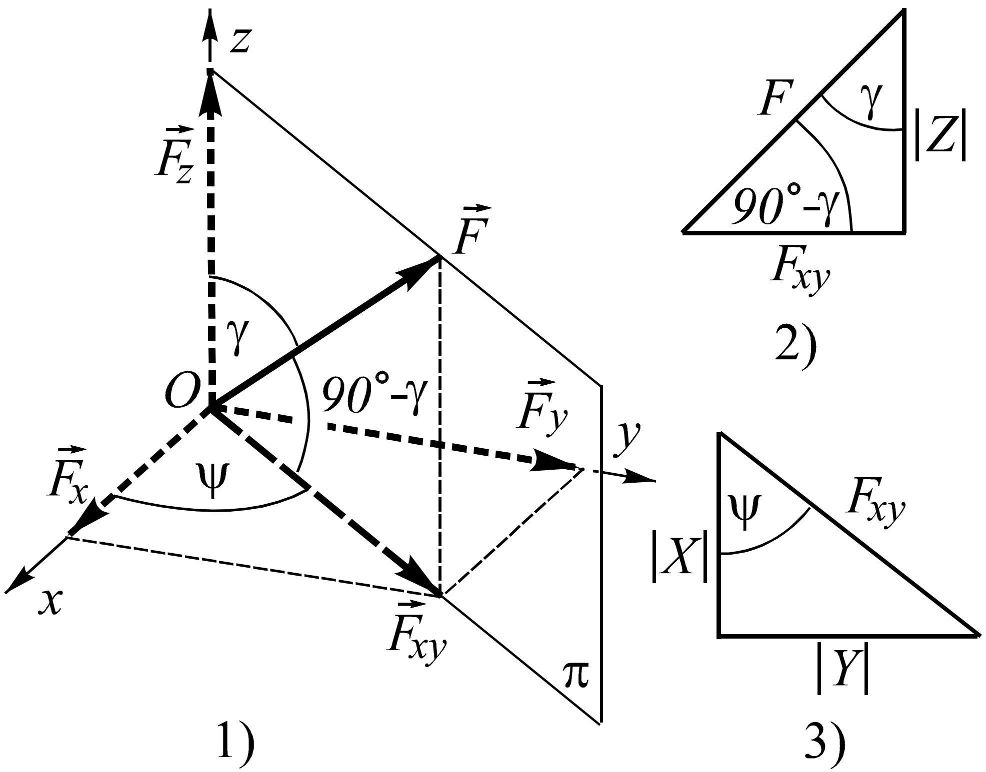
Sl.2 $\sum M_{Ai} = T_z \cdot R + N_z \cdot f_z - \mathfrak{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M} = \dfrac{(a - f_z) f_p R + (b + f_p) f_z r}{(a + b + f_p - f_z) r} G$

$\sum X_i = -X_A + T_z = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = \dfrac{a - f_z}{a + b + f_p - f_z} \cdot \dfrac{f_p}{r} \cdot G$

$\sum Y_i = -Y_A - G_z + N_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = \dfrac{b + f_p}{a + b + f_p - f_z} G - G_z$

41. Prostorno projektovanje vektora kada su zadati uglovi

(dvostruko projektovanje)



Varijanta prostornog projektovanja vektora sa dva zadata ugla

Prvo se razlaže vektor $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{xy}$$

$$Z = F\cos\gamma$$

$$F_{xy} = F\cos\left(90^0 - \gamma\right) = F\sin\gamma$$

Zatim se razlaže komponenta $\vec{F}_{xy}$

$$\vec{F}_{xy} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$X = F_{xy}\cos\psi = F\sin\gamma\cos\psi$$

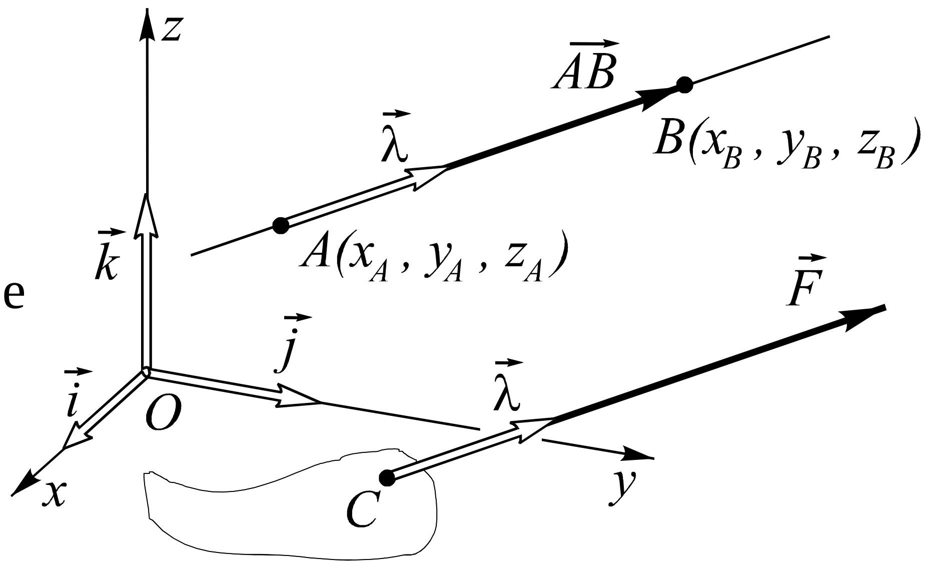
$$Y = F_{xy}\sin\psi = F\sin\gamma\sin\psi$$

42. Prostorno projektovanje vektora kada su poznate koordinate tačaka paralelne prave.

Treba odrediti projekcije X, Y i Z vektora $\vec{F}$

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Poznate su koordinate tačaka A i B koje leže na pravoj paralelnoj vektoru $\vec{F}$



$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{\lambda} \qquad \vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$\frac{\vec{F}}{F} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} \quad \Rightarrow \vec{F} = \frac{F}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} + z_B\,\vec{k}, \quad \overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} + z_A\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\vec{F} = \frac{F\left[(x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}\right]}{\overline{AB}} \quad \Longrightarrow$$

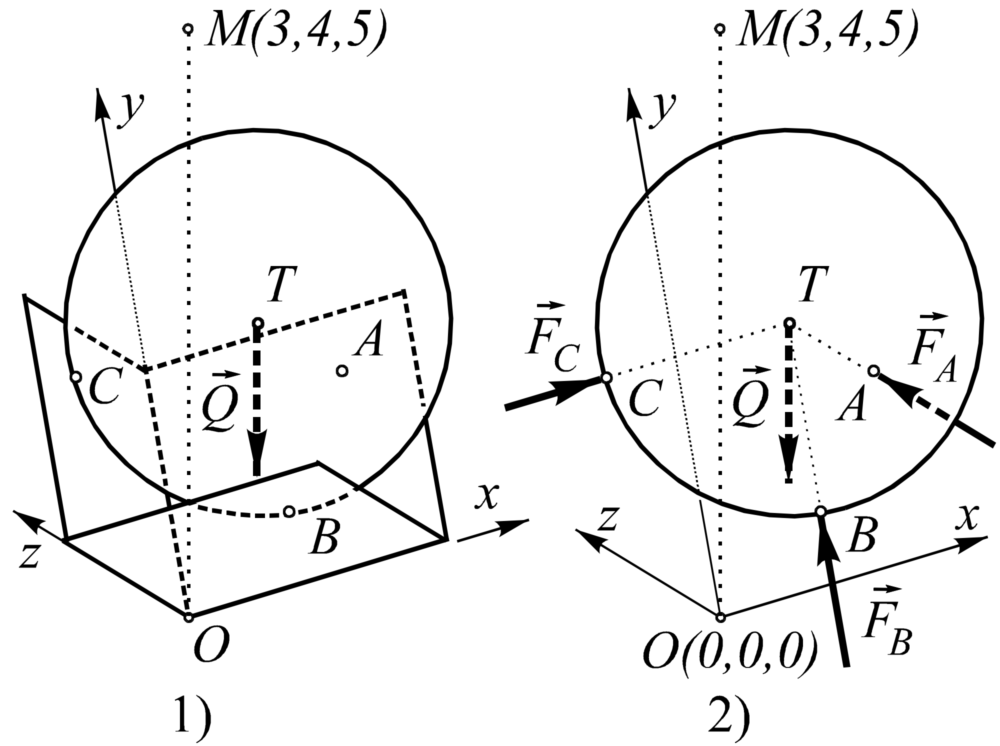
$$X = \frac{x_B - x_A}{\overline{AB}}F$$

$$Y = \frac{y_B - y_A}{\overline{AB}}F$$

$$Z = \frac{z_B - z_A}{\overline{AB}}F$$

Primer 4.8

Poznata veličina: *P*
Poznato je da se tačka *M*, čije su koordinate (3, 4, 5) u tom nagnutom koordinatnom sistemu, nalazi na vertikali koja prolazi kroz tačku koordinatnog početka *O*



Odrediti: F_A, F_B, F_C

$$\vec{Q} = \frac{Q}{\overline{\overline{MO}}}\overrightarrow{MO}$$

$$\vec{Q} = X_Q\vec{i} + Y_Q\vec{j} + Z_Q\vec{k}, \quad \overrightarrow{MO} = -3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{Q} = \frac{Q}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}}\left(-3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}\right)$$

$$X_Q = -\frac{3}{5\sqrt{2}}Q, \quad Y_Q = -\frac{4}{5\sqrt{2}}Q, \quad Z_Q = -\frac{Q}{\sqrt{2}}$$

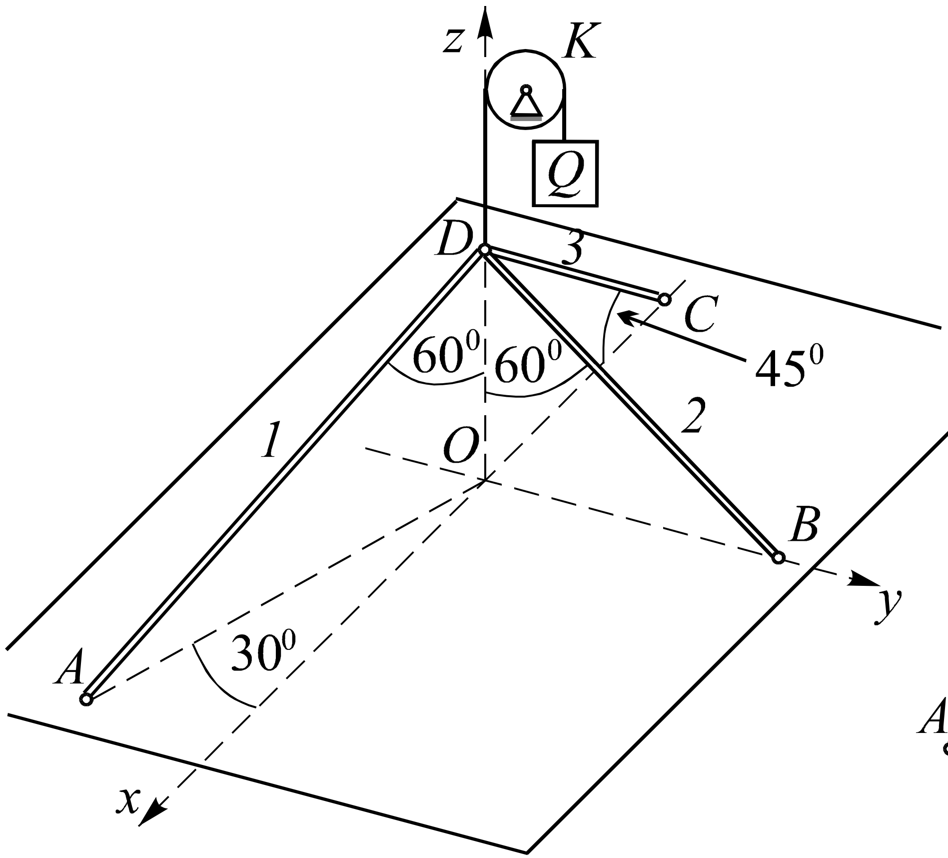
***Uslovi ravnoteže*, Sl. 2)**

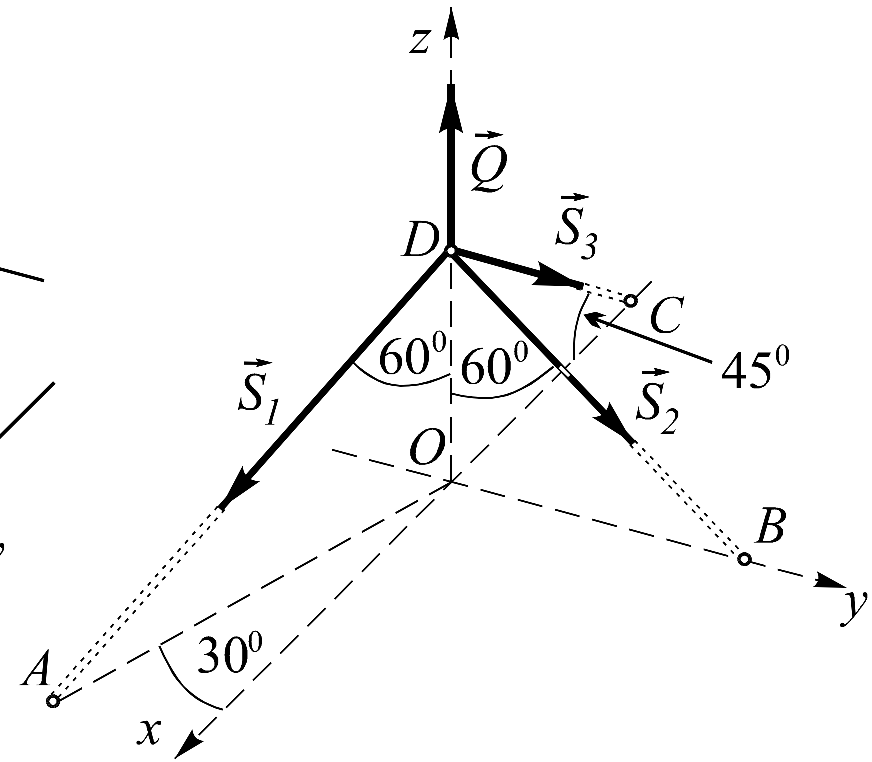
$$\sum X_i = \boldsymbol{F_C} - \frac{3}{5\sqrt{2}}Q = 0$$

$$\sum Y_i = \boldsymbol{F_B} - \frac{4}{5\sqrt{2}}Q = 0$$

$$\sum Z_i = \boldsymbol{F_A} - \frac{Q}{\sqrt{2}} = 0 \quad ...$$

Primer 4.9





$$X_2 = 0, \quad Y_2 = S_2 \sin 60^0, \quad Z_2 = -S_2 \cos 60^0$$

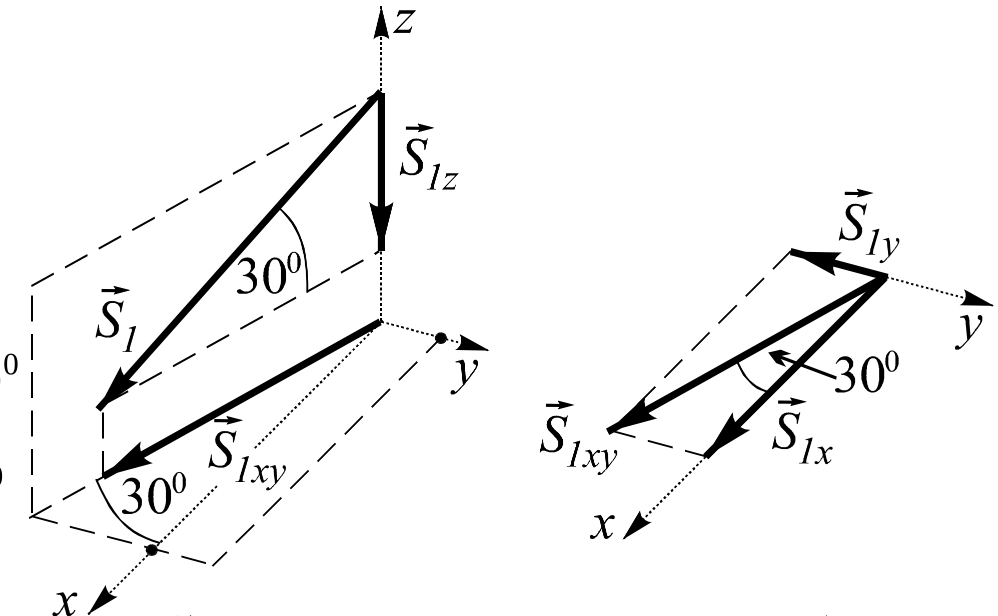
$$X_3 = -S_3 \cos 45^0, \quad Y_3 = 0, \quad Z_3 = -S_3 \sin 45^0$$

$$\vec{S}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$

$$S_{1z} = S_1 \sin 30^0, \quad S_{1xy} = S_1 \cos 30^0$$

$$S_{1x} = S_{1xy} \cos 30^0 = S_1 \cos 30^0 \cos 30^0$$

$$S_{1y} = S_{1xy} \sin 30^0 = S_1 \cos 30^0 \sin 30^0$$



1) 2)

Razlaganje sile $\vec{S}_1$ *na komponente*

$$\sum X_i = \frac{3}{4}\boldsymbol{S_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{S_3} = 0$$

$$\sum Y_i = -\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{S_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{S_2} = 0$$

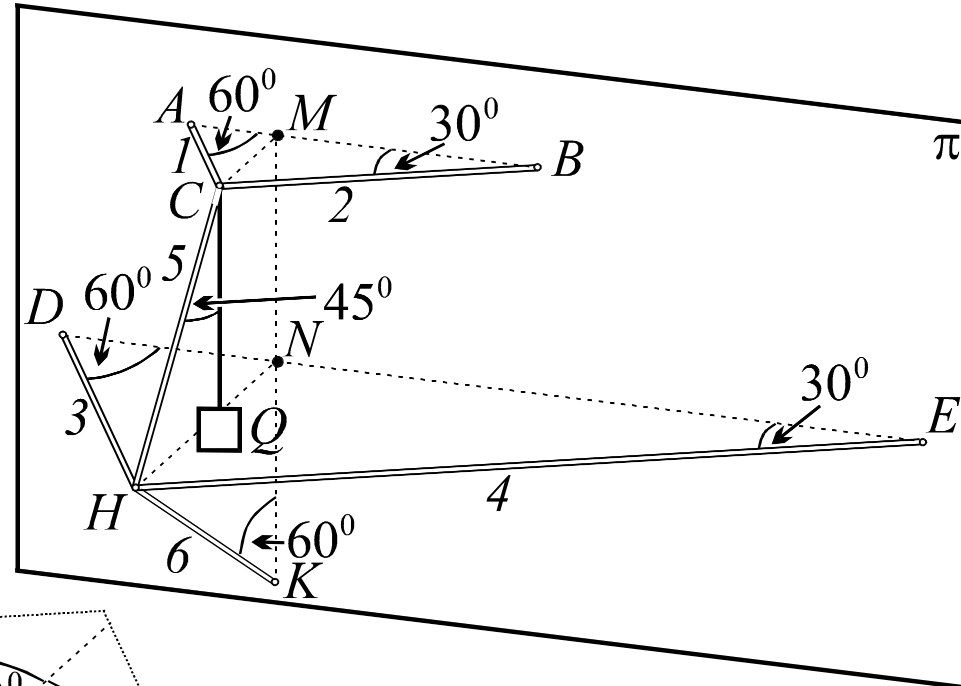
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_3} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{S_1}, \quad \boldsymbol{S_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{S_1}$$

$$\sum Z_i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{S_1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{S_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{S_3} + Q = 0$$

$$\boldsymbol{S_1} = \frac{2}{3}Q, \quad \boldsymbol{S_2} = \frac{1}{3}Q, \quad \boldsymbol{S_3} = \frac{\sqrt{2}}{2}Q$$

Primer 4.10

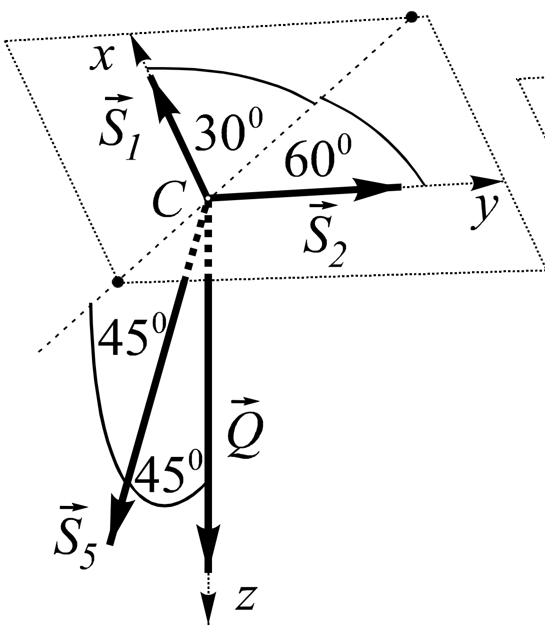
Određivanje projekcija sile $\vec{S}_5$



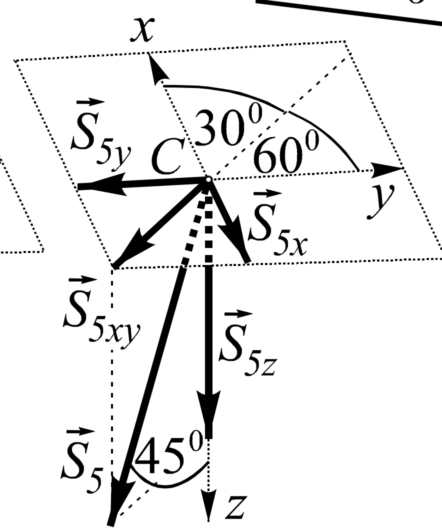
$$X_5 = -S_5 \sin 45^0 \cos 30^0$$

$$Y_5 = -S_5 \sin 45^0 \cos 60^0$$

$$Z_5 = S_5 \cos 45^0$$



1)



2)

Uslovi ravnoteže tačke C

$$\sum X_i = \boldsymbol{S_1} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} \boldsymbol{S_5} = 0$$

$$\sum Y_i = \boldsymbol{S_2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \boldsymbol{S_5} = 0$$

$$\sum Z_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{S_5} + Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_5} = -\sqrt{2}Q,\ \ \boldsymbol{S_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}Q,\ \ \boldsymbol{S_2} = -\frac{1}{2}Q$$

zbog $\vec{S}_5' = -\vec{S}_5 \ \Rightarrow$

$$X_5' = -X_5 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}S_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}Q$$

$$Y_5' = -Y_5 = \frac{\sqrt{2}}{4}S_5 = -\frac{1}{2}Q$$

$$Z_5' = -Z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_5 = Q$$

Uslovi ravnoteže tačke H

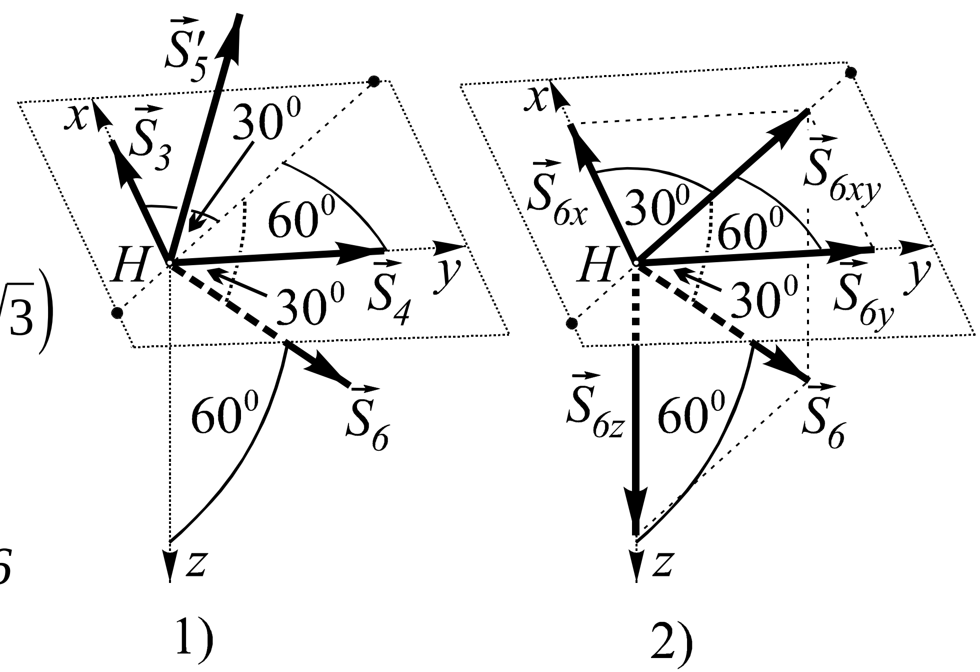
$$\sum X_i = \boldsymbol{S_3} + \frac{3}{4}\boldsymbol{S_6} - \frac{\sqrt{3}}{2}Q = 0$$

$$\sum Y_i = \boldsymbol{S_4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{S_6} - \frac{1}{2}Q = 0$$

$$\sum Z_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{S_6} + Q = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S_6} = -2Q, \boldsymbol{S_3} = \frac{Q}{2}\left(3+\sqrt{3}\right), \boldsymbol{S_4} = \frac{Q}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$



Predznaci u dobijenim rešenjima ukazuju na to da su štapovi *1*, *2*, *5* i *6* pritisnuti, a štapovi *3* i *4* zategnuti.