RAVANSKI GREDNI NOSAČI

Osnovni element ravanskih grednih nosača je štap, koji je u opštem slučaju opterećen proizvoljnim ravanskim sistemom sila i spregova. Zamišljenim presecanjem takvog štapa i posmatranjem jednog njegovog dela, dejstvo uklonjenog dela na posmatrani, sadrži unutrašnje sile u poprečnom i uzdužnom pravcu (tranverzanla i aksijalna sila) i unutrašnji spreg (napadni moment). Ove veličine (transverzalna sila, aksijalna sila i napadni moment) koje su definisane za gotovo svaki presek nosača veoma su važne za funkcionalnost, oblik i dimenzije samog nosača i nazivaju se presečnim silama. Osnovni zadatak pri proučavanju grednih nosača je određivanje presečnih sila u svim njegovim presecima u kojima su one definisane.

29. Tipovi grednih nosača

Prostu gredu, Sl.1, čini opterećen prav štap koji se oslanja na oslonce svojim krajevima. Jedan oslonac je pokretan (ovde *A*) a drugi nepokretan (*B*).

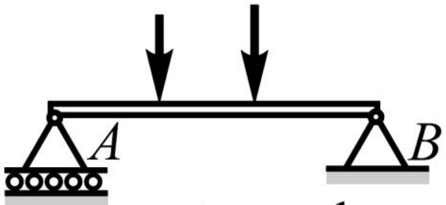
Greda s prepustom, Sl.2 i 3, za razliku od proste grede, predstavlja opterećen prav štap čiji se jedan oslonac ne nalazi na kraju.

Konzolu, Sl.5, predstavlja opterećen štap koji je uklešten na jednom kraju.

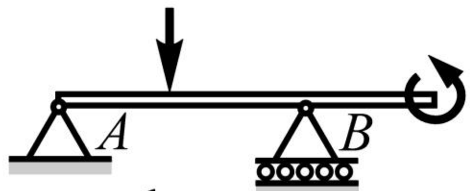
Ram, Sl.6, predstavlja opterećen i oslonjen (putem oslonaca i/ili ukleštenja) nosač koji je sačinjen od više štapova čije se ose seku.

Gerberov nosač, Sl.7, je nosač čiji su pojedini delovi (štapovi) zglobno povezani. Zglobove, koji povezuju delove nosača, zvaćemo Gerberovim zglobovima.

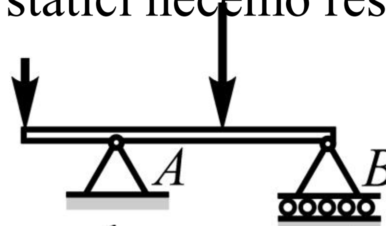
Za statički neodređenu gredu, Sl.8, nije moguće odrediti otpori oslonaca samo na osnovu uslova ravnoteže (ovakve grede u statici nećemo rešavati).



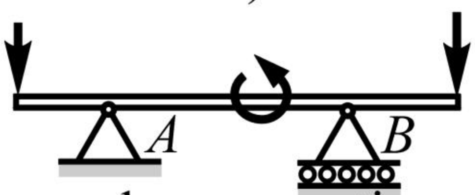
prosta greda
1)



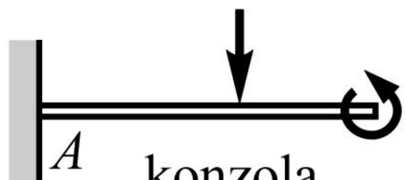
greda s prepustom
2)



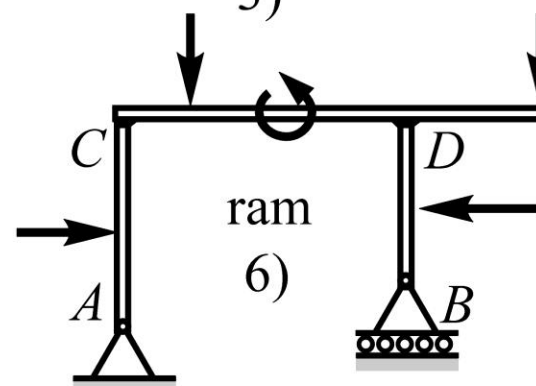
greda s prepustom
3)



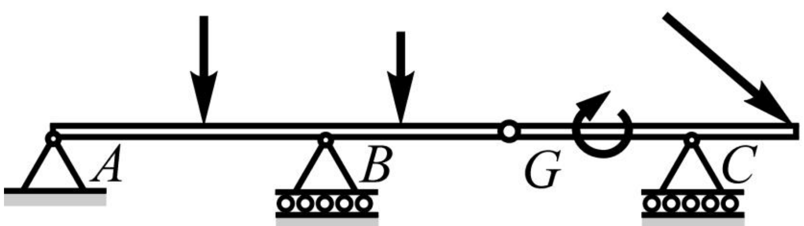
greda s prepustima
4)



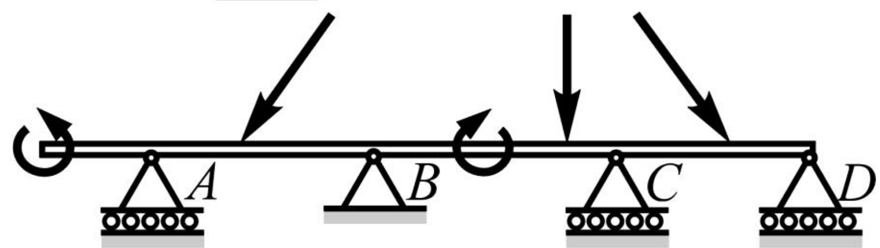
konzola
5)



ram
6)

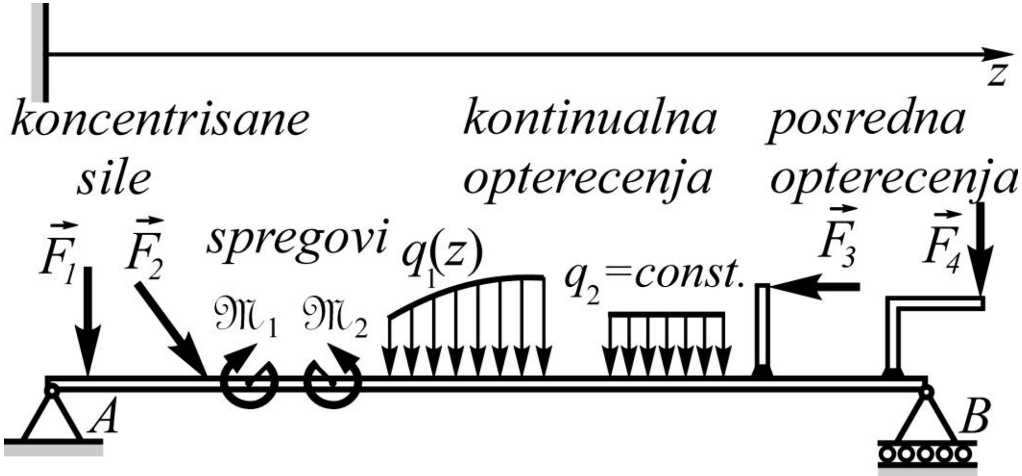


Gerberov nosač
7)



statički neodređen nosač
8)

30. Opterećenja grednih nosača



Osim koncentrisanih sila i koncentrisanih spregova koji neposredno dejstvuju na neke od tačaka grednih nosača u ovom kursu ćemo se sretati i sa kontinualnim (neprekidno raspoređenim) i posrednim opterećenjem.

Otpori nepokretnih i pokretnih oslonaca, koje ćemo uvek prethodno odrediti iz uslova ravnoteže, spadaće u koncentrisane sile. Reakcije ukleštenja, za koje se smatra da dejstvuju na krajnju tačku nosača, činiće koncentrisana sila i koncentrisan reaktivni spreg (moment ukleštenja).

Kontinualno opterećenje se zadaje specifičnim opterećenjem q (opterećenjem po dužini), čija je dimenzija sila kroz dužinu (npr. kN/m). Ono je, u opštem slučaju, funkcija koordinate z, dakle $q=q(z)$.

Opterećenje koje ne dejstvuje neposredno na gredu već na neki pridodat element (npr. štap ili ugaonik), koji je kruto vezan (npr. zavaren) za gredu, nazivamo posrednim opterećenjem.

31. Kontinualno opterećenje

Na Sl.1 prikazano je proizvoljno poprečno kontinualno opterećenje $q(z)$, koje se proteže na dužini l , $0 \leq z \leq l$.

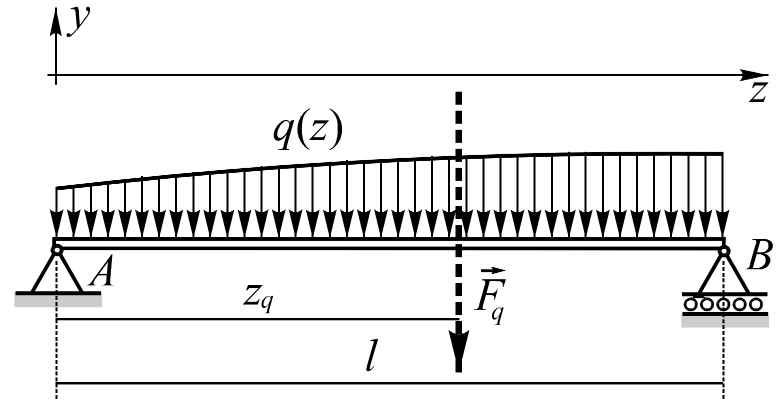
Kontinualno opterećenje može biti shvaćeno kao beskonačno mnogo, jednako usmerenih, paralelnih sila.

$$F_{qi} = q_i \cdot \Delta z \quad \Rightarrow F_q = \sum F_{qi} = \sum q_i \cdot \Delta z$$

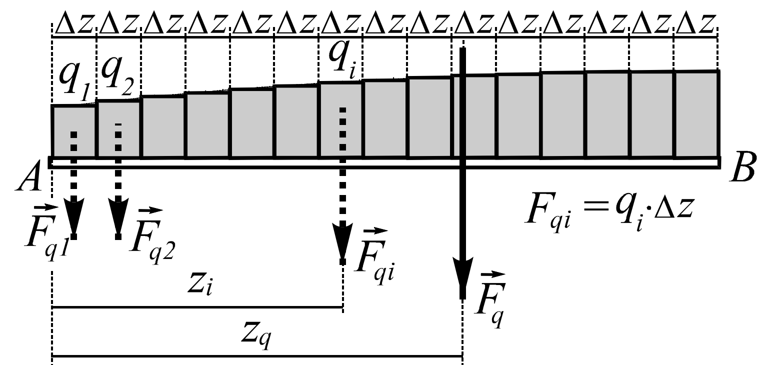
$$M_A^{\vec{F}_q} = \sum M_A^{\vec{F}_{qi}} \Rightarrow \; z_q = \frac{\sum F_{qi} z_i}{F_q} = \frac{\sum q_i z_i \Delta z}{\sum q_i \Delta z}$$

$$dF_q = q(z) \cdot dz \qquad \Rightarrow F_q = \int_0^l q(z)\, dz$$

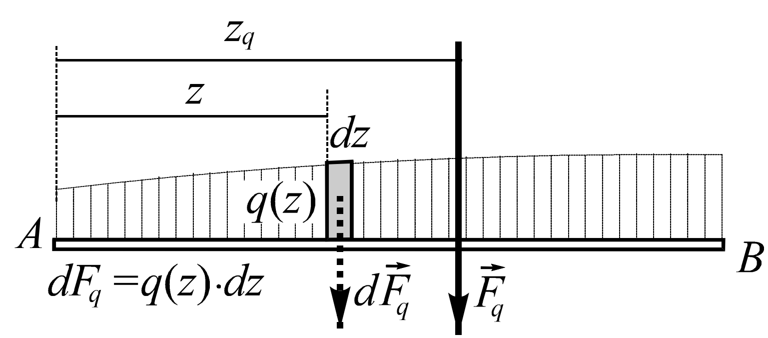
$$z_q = \frac{\int_0^l z\, q(z)\, dz}{F_q} = \frac{\int_0^l z\, q(z)\, dz}{\int_0^l q(z)\, dz}$$



1)



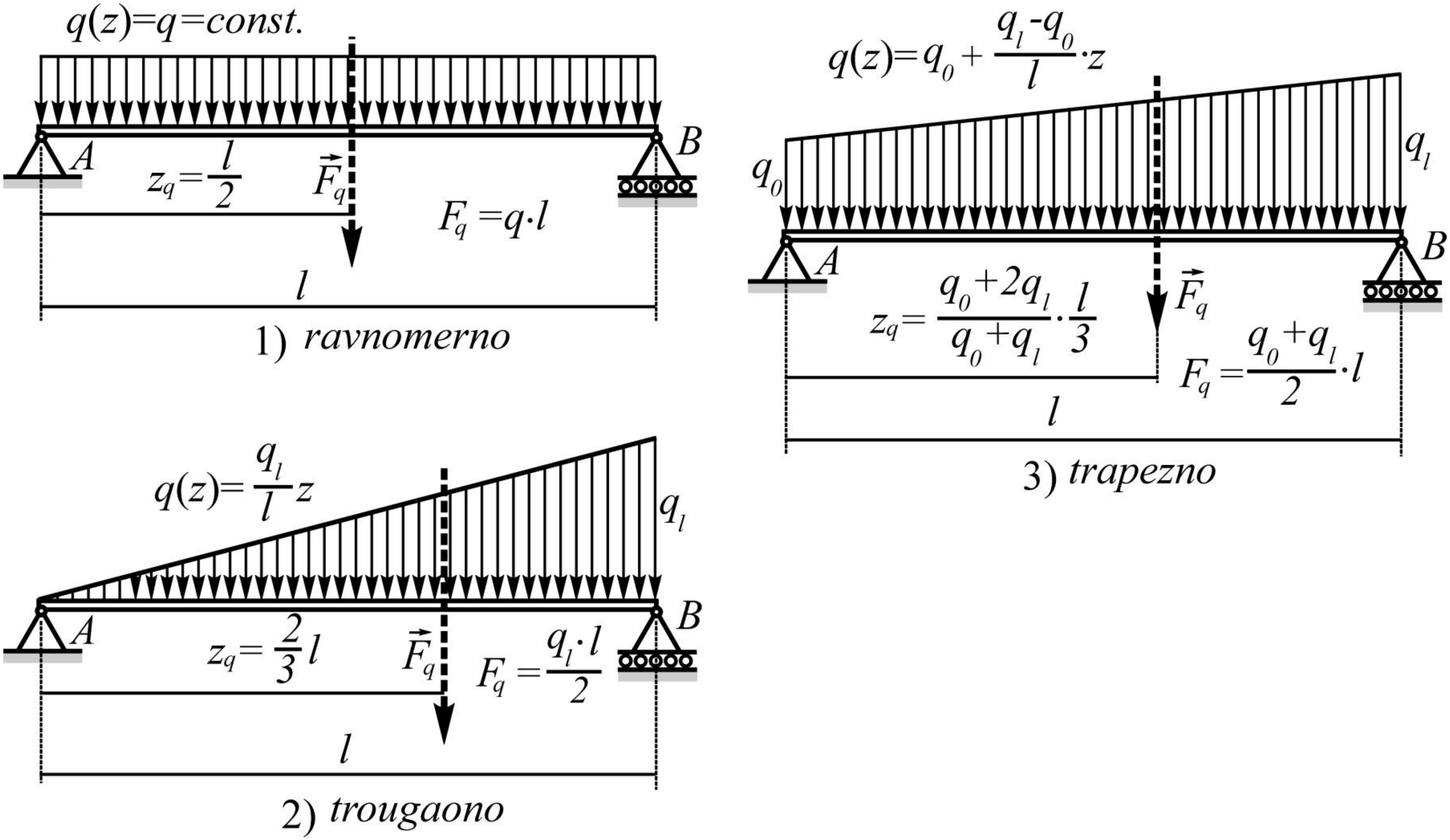
2)



3)

Primer 8.1

Odrediti rezultante ravnomernog, trougaonog i trapeznog kontinualnog opterećenja kao i njihova mesta.



Ravnomerno (pravougaono) kontinualno opterećenje

$$F_q = q\int_0^l dz = q \cdot z\Big|_0^l = q \cdot (l - 0) = q \cdot l$$

$$z_q = \frac{q\int_0^l z\,dz}{ql} = \frac{\frac{1}{2} z^2\Big|_0^l}{l} = \frac{\frac{1}{2}\left(l^2 - 0^2\right)}{l} = \frac{l}{2}$$

Trougaono kontinualno opterećenje

$$F_q = \frac{q_l}{l}\int_0^l z\,dz = \frac{q_l}{l} \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^l = \frac{q_l}{l} \cdot \frac{l^2}{2}\Big| = \frac{q_l \cdot l}{2}$$

$$z_q = \frac{\frac{q_l}{l}\int_0^l z^2\,dz}{\frac{q_l \cdot l}{2}} = \frac{2}{l^2} \cdot \frac{z^3}{3}\Big|_0^l = \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3} l$$

Trapezno kontinualno opterećenje

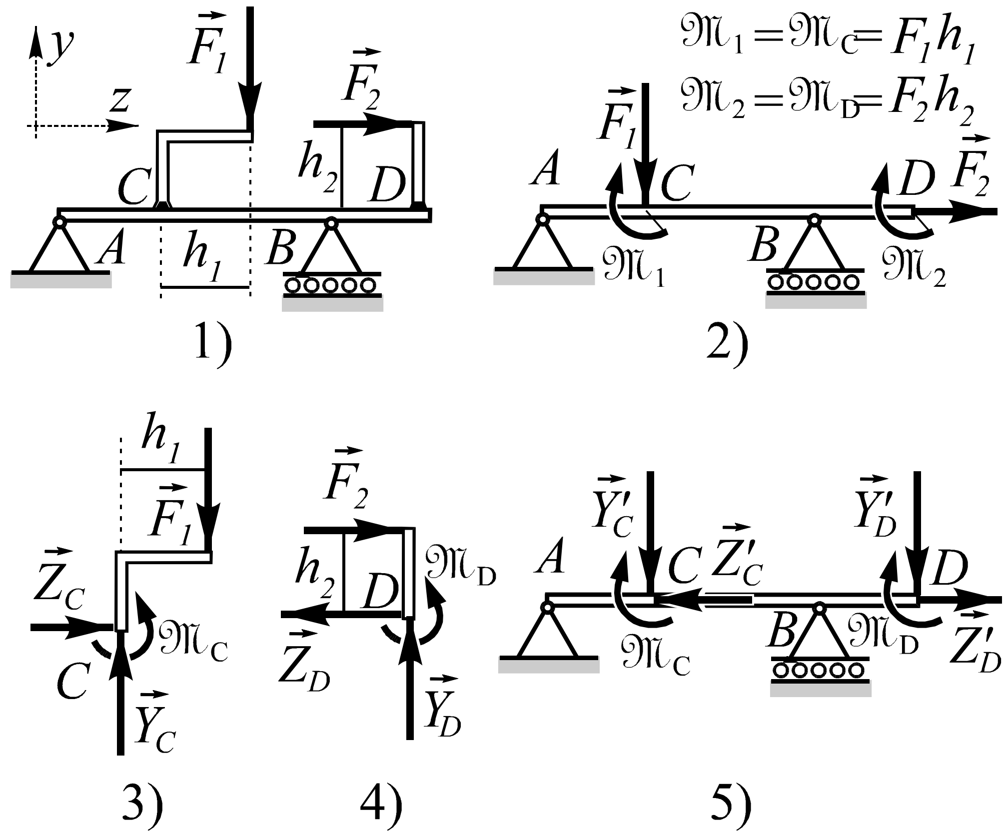
$$F_q = \int_0^l \left(q_0 + \frac{q_l - q_0}{l} z \right) dz = q_0 \int_0^l dz + \frac{q_l - q_0}{l} \int_0^l z\,dz = q_0 \cdot l + \frac{q_l - q_0}{l} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{q_0 + q_l}{2} \cdot l$$

$$\int_0^l \left(q_0 + \frac{q_l - q_0}{l} z \right) z\,dz = q_0 \frac{z^2}{2}\Big|_0^l + \frac{q_l - q_0}{l} \frac{z^3}{3}\Big|_0^l = q_0 \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{q_l - q_0}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{q_0 + 2q_l}{6} \cdot l^2$$

$$z_q = \frac{\int_0^l \left(q_0 + \frac{q_l - q_0}{l} z \right) z\,dz}{F_q} = \frac{q_0 + 2q_l}{q_0 + q_l} \cdot \frac{l}{3}$$

32. Posredno opterećenje

Za određivanje presečnih sila grednog nosača važno je znati kakvo je dejstvo ovih ekscentričnih sila (posrednog opterećenja) na tačke grednog nosača (ovde su to *C* i *D*) u kojima su pridodati elementi kruto vezani za njega.



Uslovi ravnoteže, Sl.3

$$\sum Y_i = Y_C - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C = F_1$$

$$\sum Z_i = Z_C = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_C = 0$$

$$\sum M_{C\,i} = -F_1 \cdot h_1 + \mathsf{M}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{M}_C = F_1 \cdot h_1$$

Uslovi ravnoteže, Sl.4

$$\sum Y_i = Y_D = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_D = 0$$

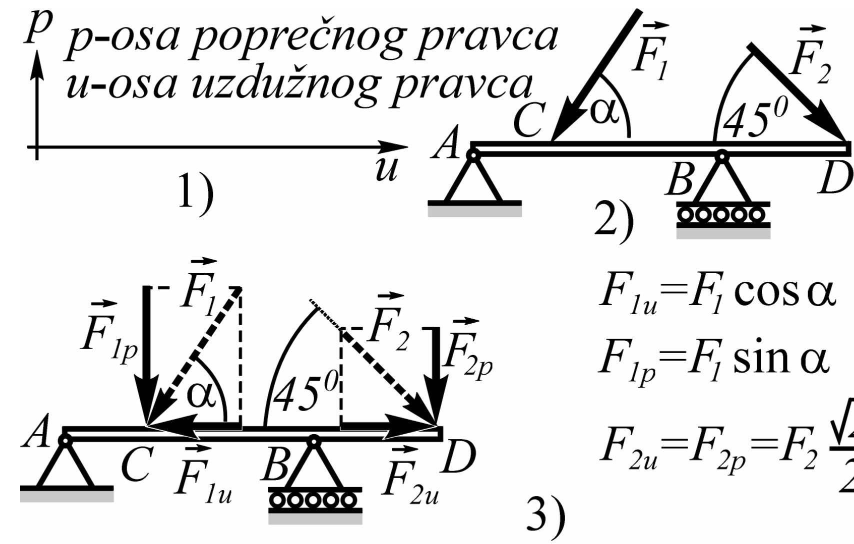
$$\sum Z_i = -Z_D + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_D = F_2$$

$$\sum M_{D\,i} = -F_2 \cdot h_2 + \mathsf{M}_D = 0 \Rightarrow \mathsf{M}_D = F_2 \cdot h_2$$

Opterećenje sa Sl.2, moglo je biti dobijeno i redukcijom sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na tačke C i D.

Pre određivanja presečnih sila poželjno da se kose sile zamene svojim komponentama u poprečnom i uzdužnom pravcu u odnosu na gredu

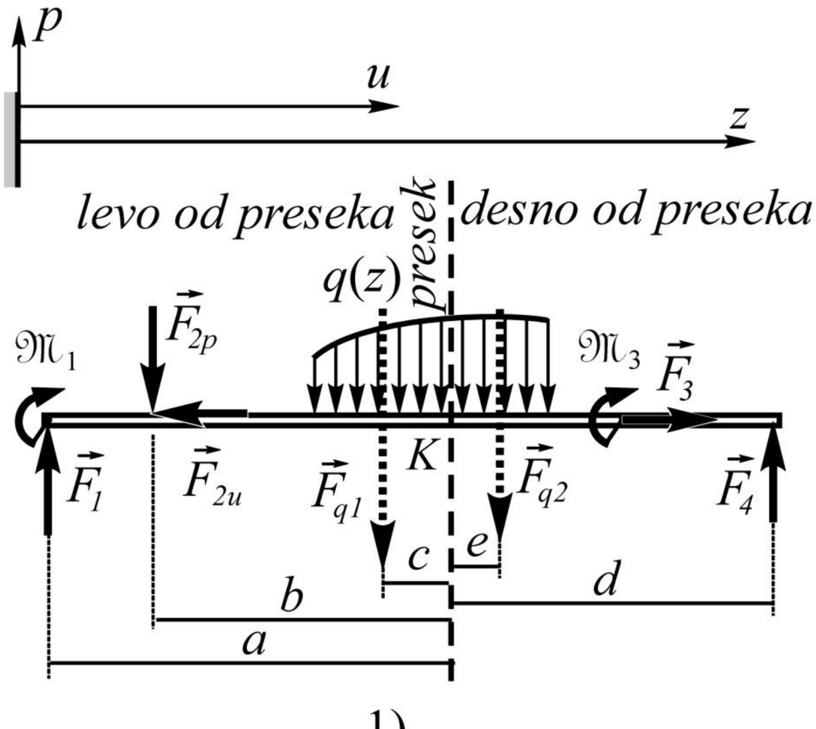
33. Presečne sile. Određivanje: transverzalnih sila, aksijalnih sila i napadnog momenta.

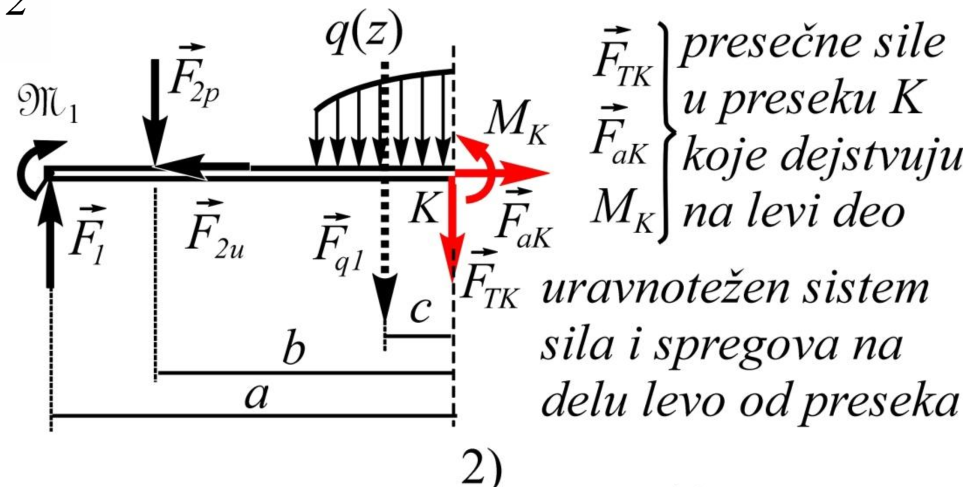


$$F_{1u}=F_1\cos\alpha$$

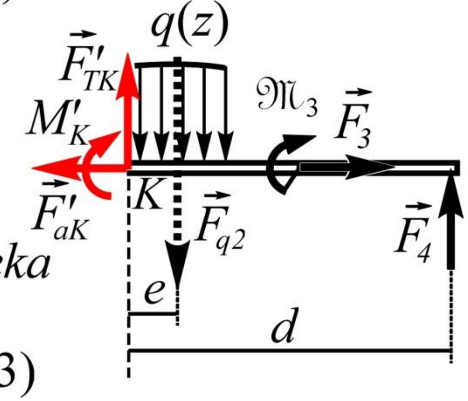
$$F_{1p}=F_1\sin\alpha$$

$$F_{2u}=F_{2p}=F_2\frac{\sqrt{2}}{2}$$





uravnotežen sistem
sila i spregova na
delu desno od preseka



Presečne sile u ma kom preseku grednog nosača, određuju se tek nakon što se odrede otpori oslonaca

F_T -transverzalna sila

F_a -aksijalna sila

M -napadni moment

Kada je poznato svo spoljašnje opterećenje koje dejstvuje na nosač, kao na slici, može se posmatrati ravnoteža levog ili desnog dela od proizvoljnog preseka kako bi se na osnovu uslova ravnoteže tog dela odredile presečne sile. Uklonjeni deo nosača dejstvuje na posmatrani u samom preseku upravo sa presečnim silama.

Transverzalna sila je unutrašnja sila u poprečnom pravcu (odnosno, u pravcu je zamišljenog preseka za koji se podrazumeva da je upravan na osu grede).

Aksijalna sila je unutrašnja sila u uzdužnom pravcu (u pravcu ose grede) koja postoji samo u onim segmentima grede koji su, između ostalog, aksijalno opterećeni (na zatezanje ili pritisak).

Napadni moment (odnosno, moment savijanja) je unutrašnji spreg usled kojeg se realne (deformabilne) grede savijaju (pri savijanju, osa grede iz pravolinijskog oblika prelazi u krivolinijski).

ODREĐIVANJE TRANSVERZALNIH SILA

Uslov ravnoteže levog dela

$$\sum F_{i\,p} = \sum F_{i\,p}^{l} - F_{T\,K} = 0$$

$$\Rightarrow F_{T\,K} = \sum F_{i\,p}^{l}$$

Uslov ravnoteže desnog dela

$$\sum F_{i\,p} = \sum F_{i\,p}^{d} + F_{T\,K} = 0$$

$$\Rightarrow F_{T\,K} = -\sum F_{i\,p}^{d}$$

ODREĐIVANJE AKSIJALNIH SILA

Uslov ravnoteže levog dela

$$\sum F_{i\,u} = \sum F_{i\,u}^{l} + F_{a\,K} = 0$$

$$\Rightarrow F_{a\,K} = -\sum F_{i\,u}^{l}$$

Uslov ravnoteže desnog dela

$$\sum F_{i\,u} = \sum F_{i\,u}^{d} - F_{a\,K} = 0$$

$$\Rightarrow F_{a\,K} = \sum F_{iu}^{d}$$

ODREĐIVANJE NAPADNOG MOMENTA

Uslov ravnoteže levog dela

$$\sum M_{K\,i} = \sum M_{K\,i}^{l} + M_{K} = 0 \Rightarrow$$

$$M_{K} = -\sum M_{K\,i}^{l}$$

računanje napadnog momenta gledanjem levo od preseka

$$M_K = \sum M_{K\,i}^{l}$$

presek (K)

Uslov ravnoteže desnog dela

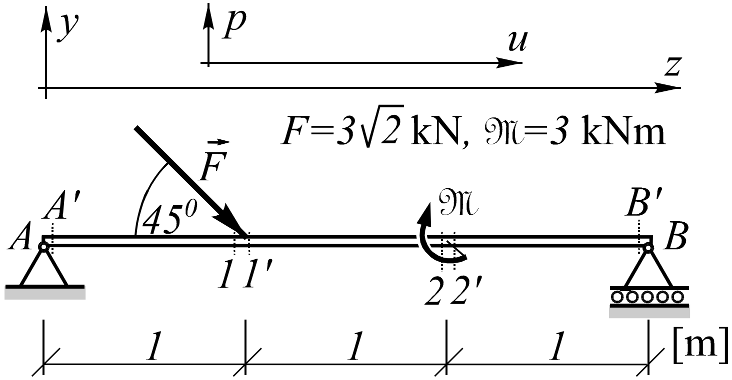
$$\sum M_{K\,i} = \sum M_{K\,i}^{d} - M_{K} = 0 \Rightarrow$$

računanje napadnog momenta gledanjem desno od preseka

$$M_{K} = \sum M_{K\,i}^{d}$$

$$M_K = \sum M_{K\,i}^{d}$$

Primer 8.2 Za gredu prikazanu na slici, odrediti presečne sile u presecima: A', B', 1, $1'$, 2 i $2'$?



1)

Prvo se kosa sila $\vec{F}$ razloži na komponente i odrede otpori oslonaca

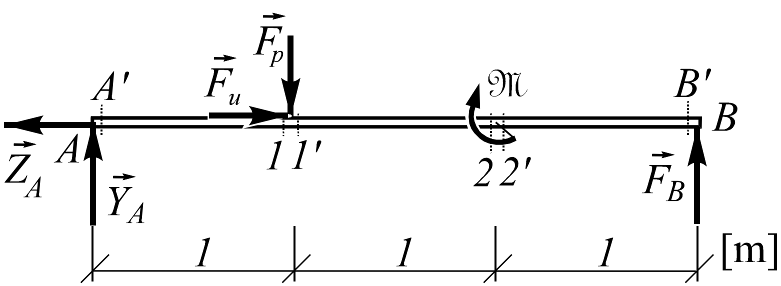
$$\sum M_{Ai} = -F_p \cdot 1 + F_B \cdot 3 - \mathfrak{M} = 0 \Rightarrow F_B = 2\text{ kN}$$

$$\sum Y_i = Y_A - F_p + F_B = 0 \Rightarrow Y_A = 1\text{ kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + F_u = 0 \Rightarrow Z_A = 3\text{ kN}$$

$F_u = F_p = F\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3$ kN

$Y_A = 1$ kN, $Z_A = 3$ kN, $F_B = 2$ kN



2)

Presečne sile:

$$F_{a\,A'} = F_{a\,1} = -\sum F_{i\,u}^{l} = -(-Z_A) = 3\text{ kN}$$

$$F_{a\,1'} = F_{a\,2} = F_{a\,2'} = F_{a\,B'} = \sum F_{i\,u}^{d} = 0$$

$$F_{T\,A'} = F_{T\,1} = \sum F_{i\,p}^{l} = Y_A = 1\text{ kN}$$

$$F_{T\,1'} = F_{T\,2} = F_{T\,2'} = F_{T\,B'} = -\sum F_{i\,p}^{d} =$$
$$= -(F_B) = -2\text{ kN}$$

$$M_{A'} = \sum M_{A'i}^{l} = Y_A \cdot \varepsilon = Y_A \cdot 0 = 0$$

$$M_{1'} = M_1 = \sum M_{1i}^{l} = +Y_A \cdot 1 = 1\text{ kNm}$$

$$M_{B'} = \sum M_{B'i}^{d} = 0,$$

$$M_{2'} = \sum M_{2'i}^{d} = +F_B \cdot 1 = 2\text{ kNm},$$

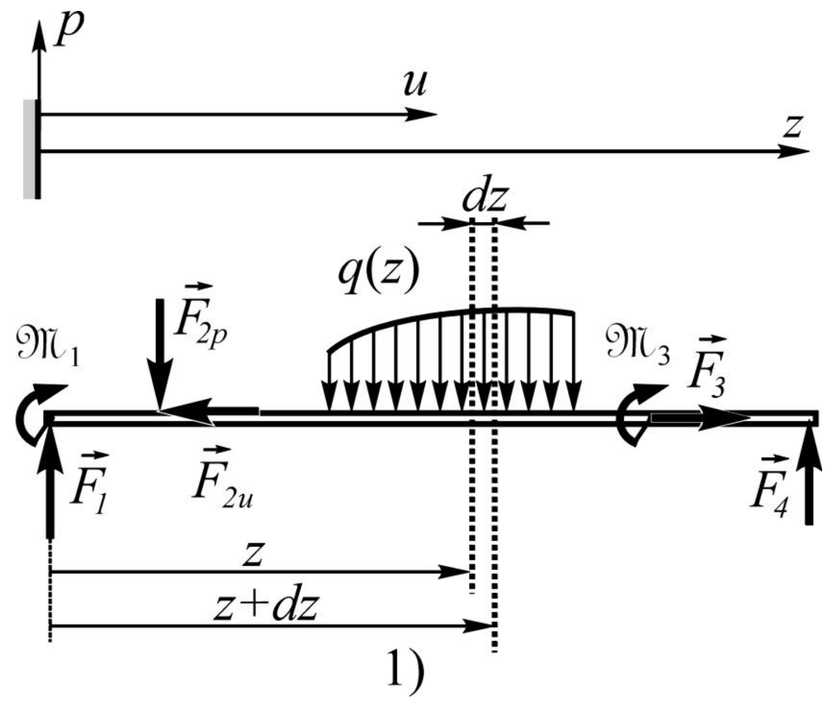
$$M_2 = \sum M_{2i}^{d} = +F_B \cdot 1 - \mathfrak{M} = -1\text{ kNm}.$$

Ovaj jednostavan primer jasno ukazuje na sledeće važne zaključke koji će se često koristiti:

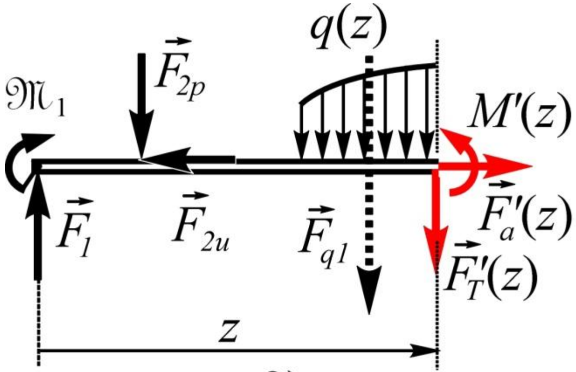
-Ako na neku tačku grednog nosača dejstvuje koncentrisana spoljašnja sila u poprečnom pravcu, onda se transverzalne sile, u presecima neposredno levo i neposredno desno od te tačke, razlikuju za konačnu vrednost.

-Ako na neku tačku grednog nosača dejstvuje koncentrisana spoljašnja sila u uzdužnom pravcu, onda se aksijalne sile, u presecima neposredno levo i neposredno desno od te tačke, razlikuju za konačnu vrednost.

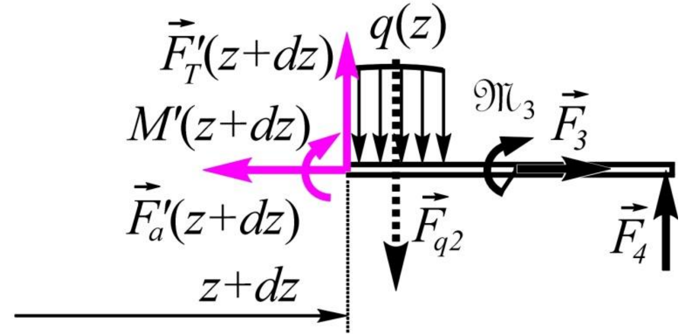
-Ako na neku tačku grednog nosača dejstvuje koncentrisan spreg, onda se napadni momenti, u presecima neposredno levo i neposredno desno od te tačke, razlikuju za konačnu vrednost.



34. Veze između napadnog momenta, transverzalne sile i specifičnog opterećenja

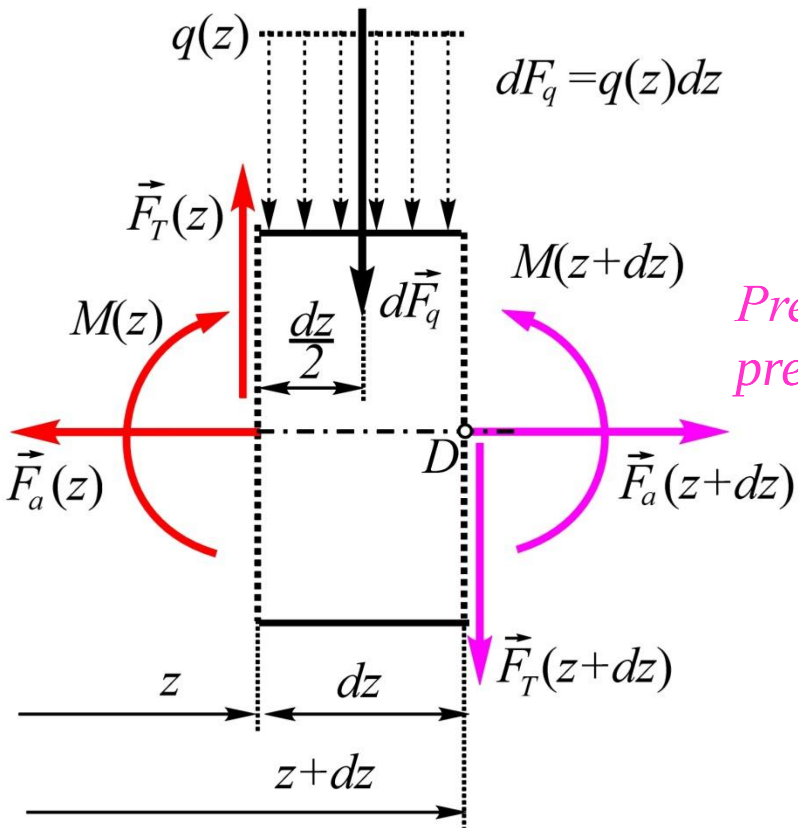


2)



4)

Presečne sile u preseku z



Presečne sile u preseku z+dz

3)

Momentni uslov ravnoteže, Sl.3, za momentnu tačku *D*, daje vezu između napadnog momenta i transverzalne sile:

$$\sum M_{D\,i} = M(z+dz) - M(z) - F_T(z)\,dz + \quad q(z)\,dz \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_T(z) = \frac{M(z+dz) - M(z)}{dz} \Rightarrow \qquad F_T = \frac{dM}{dz}$$

Član koji sadrži $dz \cdot dz$ je zanemaren jer predstavlja malu veličinu drugog reda.

Dakle transverzalna sila se može dobiti kao izvod napadnog momenta, koji je funkcija uzdužne koordinate *z*, po toj koordinati.

Uslov ravnoteže, koji govori o sumi projekcija sila u poprečnom pravcu, Sl.3, daje vezu između transverzalne sile i specifičnog opterećenja $q(z)$:

$$\sum F_{i\,p} = F_T(z) - F_T(z+dz) - q(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad q(z) = -\frac{F_T(z+dz) - F_T(z)}{dz} \quad \Rightarrow$$

$$q(z) = -\frac{dF_T(z)}{dz} = -\frac{d^2M(z)}{dz^2}$$

Dakle, specifično opterećenje promenjenog predznaka -*q* koje je u opštem slučaju funkcija uzdužne koordinate z jednako je prvom izvodu transverzalne sile ili drugom izvodu napadnog momenta po toj koordinati.

Imajući u vidu dobijene veze kao i zaključke iz primera 8.2, dolazimo do sledećih novih važnih zaključaka:

-Ako se između dva preseka grede, koja se nalaze na konačnom rastojanju, ne nalaze ni kontinualno opterećenje ($q=0$) ni spoljašnje poprečne koncentrisane sile ni koncentrisani spregovi, onda je u svakom preseku između tih preseka transverzalna sila konstantna a napadni moment je linearna funkcija uzdužne koordinate;

-Ako se između dva preseka grede, koja se nalaze na konačnom rastojanju, nalazi samo ravnomerno kontinualno opterećenje ($q=const.$), onda je u svakom preseku između tih preseka transverzalna sila linearna funkcija uzdužne koordinate a napadni moment je kvadratna funkcija iste;

-Ako se između dva preseka grede, koja se nalaze na konačnom rastojanju, nalazi samo trougaono ili trapezno kontinualno opterećenje, $q(z)=kz+n$, onda je u svakom preseku između tih preseka transverzalna sila kvadratna funkcija uzdužne koordinate a napadni moment je kubna funkcija iste;

-Ako je u nekom intervalu $F_T>0$, a prati se tok funkcije s leva na desno (dakle $dz>0$), onda mora biti $dM>0$, što znači da napadni moment $M(z)$, idući s leva na desno, u tom intervalu, raste;

-Ako je, suprotno prethodnom, u nekom intervalu $F_T<0$, onda za $dz>0$ mora biti $dM<0$, što znači da napadni moment M(z), idući s leva na desno, u tom intervalu, opada;

-Ako je u nekom intervalu $F_T=0$, za $dz\neq0$, onda mora biti $dM=0$, što znači da je napadni moment M(z), u tom intervalu, konstantan;

Ako je u nekom konačnom intervalu, u kom se nalazi samo poprečno kontinualno opterećenje, transverzalna sila takva funkcija da u jednoj tački tog intervala (na primer, tački *e*, sa slike) menja svoj znak, onda funkcija napadnog momenta u toj tački (odnosno, preseku) ima svoj lokalni maksimum (minimum);