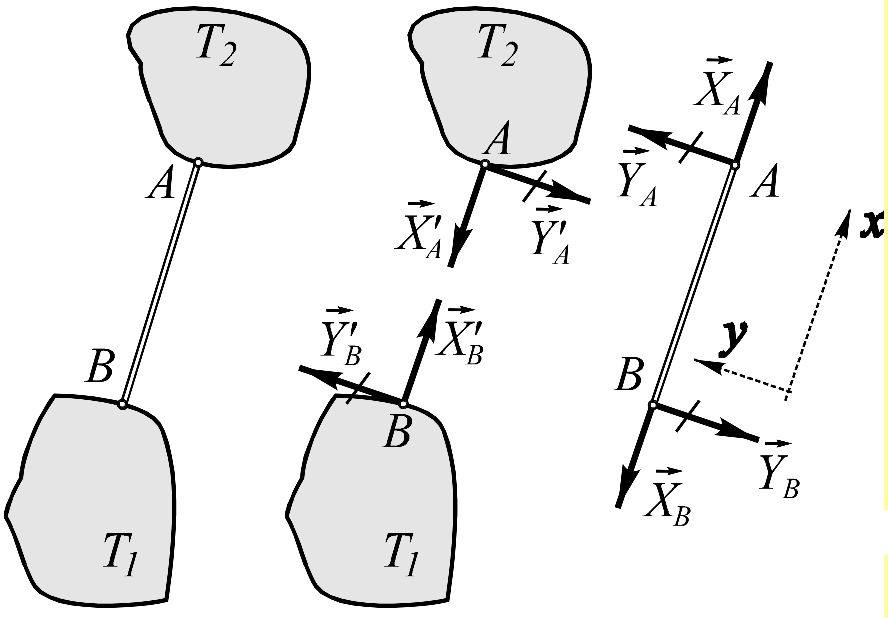
21. Analiza lakog štapa na čijim krajevima se nalaze zglobovi.



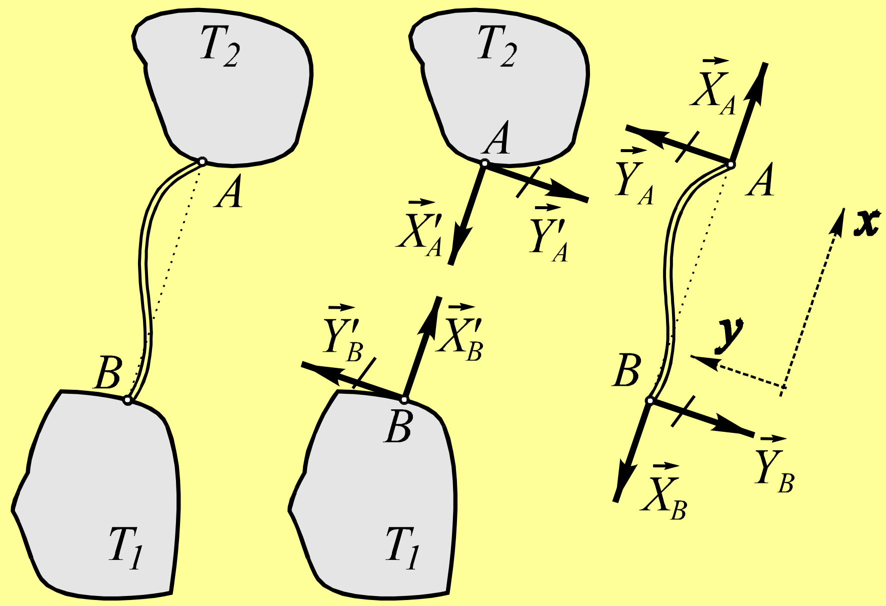
1) 2) 3)

Sl.3

$$\sum M_{Ai} = 0 \Rightarrow Y_B = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow Y_A = 0$$

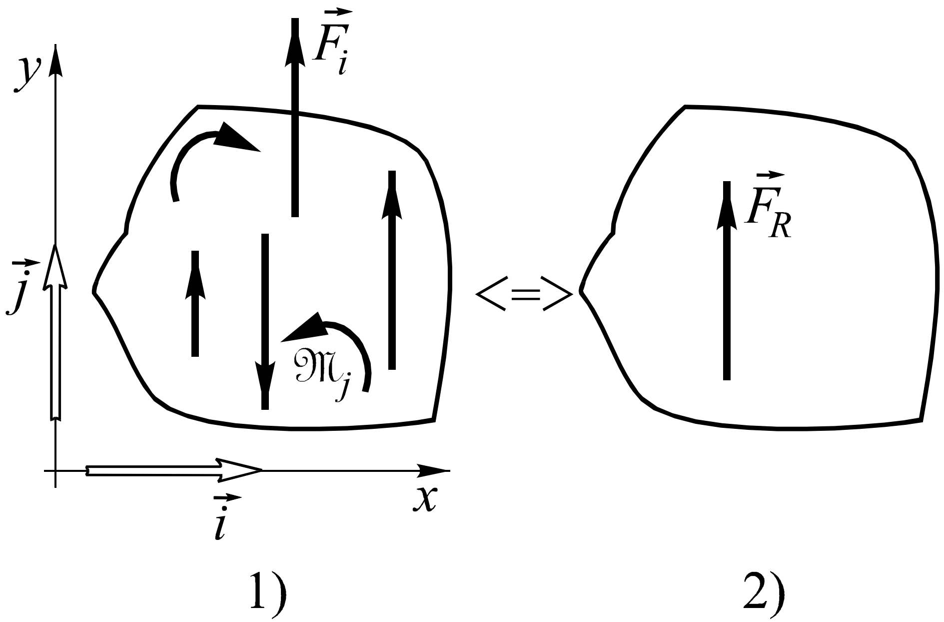
$$\sum X_i = 0 \Rightarrow X_B = X_A$$



1) 2) 3)

U slučaju da su tela povezana lakim krivolinijskim štapom na čijim su krajevima zglobovi, istim postupkom se dokazuje da laki krivolinijski štap dejstvuje na tela koja povezuje reakcijama istog pravca (i to pravca koji prolazi kroz krajnje tačke - zglobove), istog intenziteta a suprotnog smera.

22. Ravanski sistem paralelnih sila i spregova



Jedna koordinatna osa (na primer *y*) je paralelna silama dok je osa *x* upravna na njih.

$$\vec{F}_i = Y_i \vec{j} \qquad \vec{F}_R = Y_R \vec{j}$$

$$Y_R = \sum Y_i$$

Za analitičko nalaženje napadne linije rezultante pogodna je Varinjonova teorema

Nezavisnih uslova ravnoteže ravanskog sistema paralelnih sila i spregova ima dva i to:

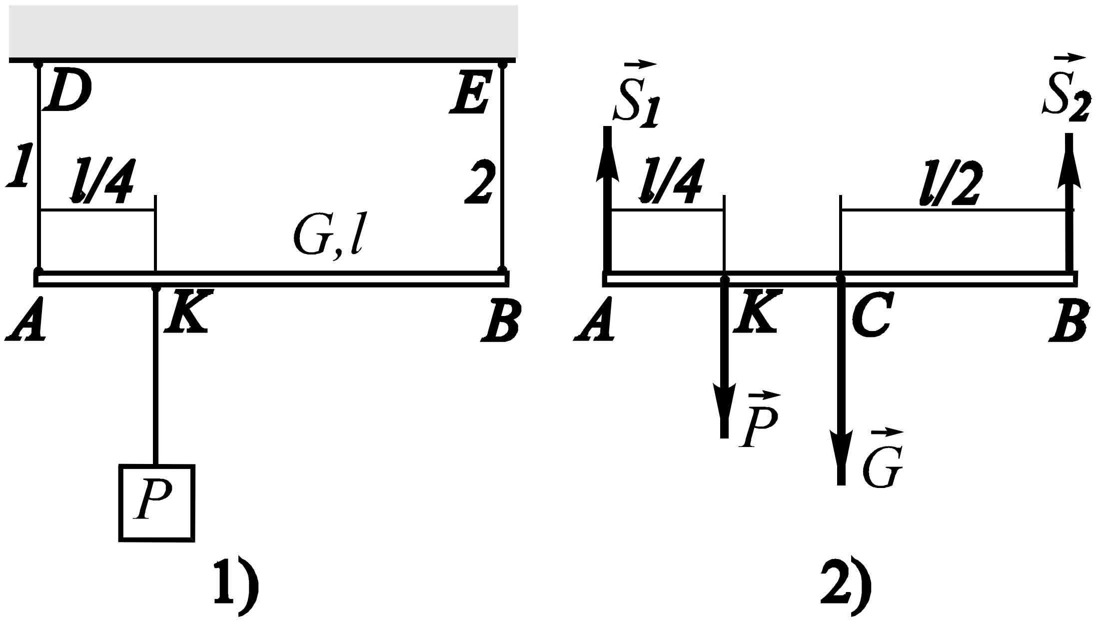
$$\sum Y_i = 0, \quad \sum M_{Ai} = 0,$$

s obzirom da je ona treća $\sum X_i = 0$ identički zadovoljena.

Primer 6.12

Poznate veličine: *G*, *P* i *l*

Odrediti sile u užadima *AD* i *BE*?



$$\sum M_{Ai} = -P \cdot \frac{l}{4} - G \cdot \frac{l}{2} + S_2 \cdot l = 0$$

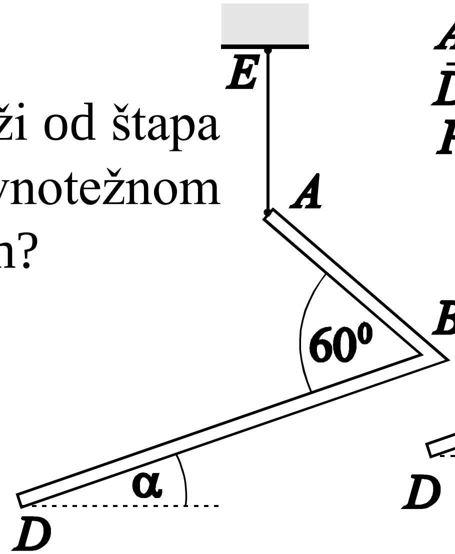
$$\Rightarrow \quad S_2 = \frac{G}{2} + \frac{P}{4}$$

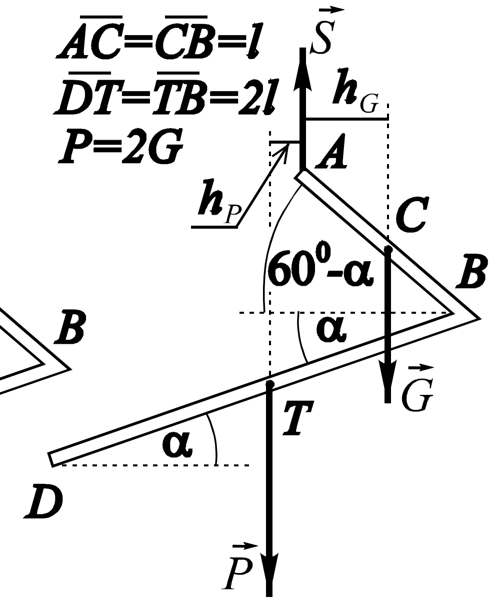
$$\sum Y_i = -P - G + S_1 + S_2 = 0$$

$$\Rightarrow \; S_1 = \frac{G}{2} + \frac{3}{4} P$$

Primer 6.13

Štap *BD* je dva puta duži i dva puta teži od štapa *AB*. Odrediti koliki ugao α u ravnotežnom položaju gradi štap *BD* sa horizontalom?





Uvedimo da je G težina a 2l dužina štapa AB. Shodno tome, težina dužeg štapa BD je P=2G a dužina mu je 4l.

$$\sum M_{Ai} = P \cdot h_P - G \cdot h_G = 0$$

1) **2)**

$$h_G = l\cos\left(60^0 - \alpha\right), \qquad h_P = 2l\cos\alpha - 2l\cos\left(60^0 - \alpha\right) \Rightarrow$$

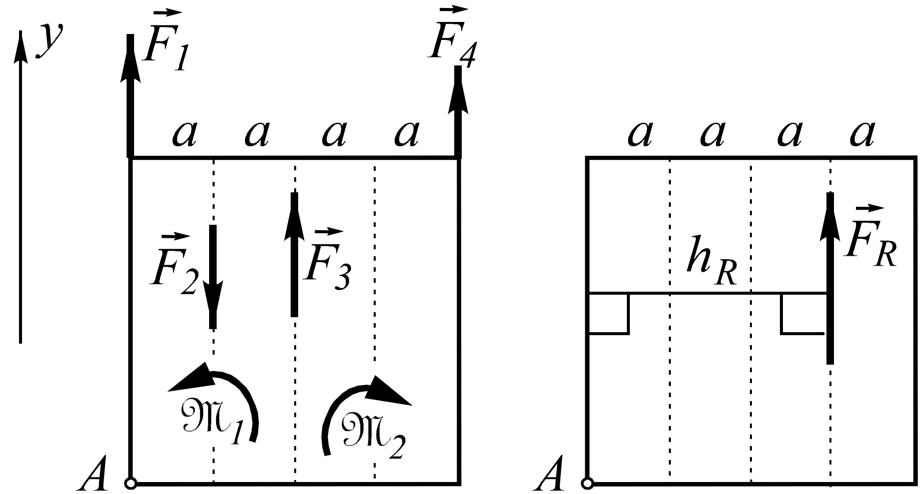
$$2G\left[2l\cos\alpha - 2l\cos\left(60^0 - \alpha\right)\right] = Gl\cos\left(60^0 - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos\alpha = 5\cos\left(60^0 - \alpha\right) \qquad \Rightarrow \quad 4\cos\alpha = 5\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{\sqrt{3}}{5} \approx 19^0 6' 24''$$

Primer 6.14

U zavisnosti od poznatih veličina F i a odrediti rezultantu i njeno mesto za zadat sistem paralelnih sila i spregova koji dejstvuje na laku ploču (Sl.1)?



1) 2)

Podaci su: $F_1 = F_2 = 1F,$

$$F_3 = F_4 = 2F, \mathfrak{M}_1 = 2Fa, \mathfrak{M}_2 = 1Fa.$$

$$Y_R = \sum Y_i = F_1 - F_2 + F_3 + F_4 = 4F \quad \Rightarrow F_R = 4F \quad \Rightarrow \vec{F}_R = 4F\,\vec{j}$$

Za nalaženje mesta rezultante (rastojanja h_R) koristimo Varinjonovu teoremu za tačku A.

$$M_A^{\vec{F}_R} = \sum M_{Ai}$$

Ona daje jednačinu:

$$F_R \cdot h_R = -F_2 \cdot a + F_3 \cdot 2a + F_4 \cdot 4a + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 \quad \Rightarrow \quad h_R = 3a$$

23. Slaganje dve paralelne sile isog smera. **Neka je F_1>F_2**

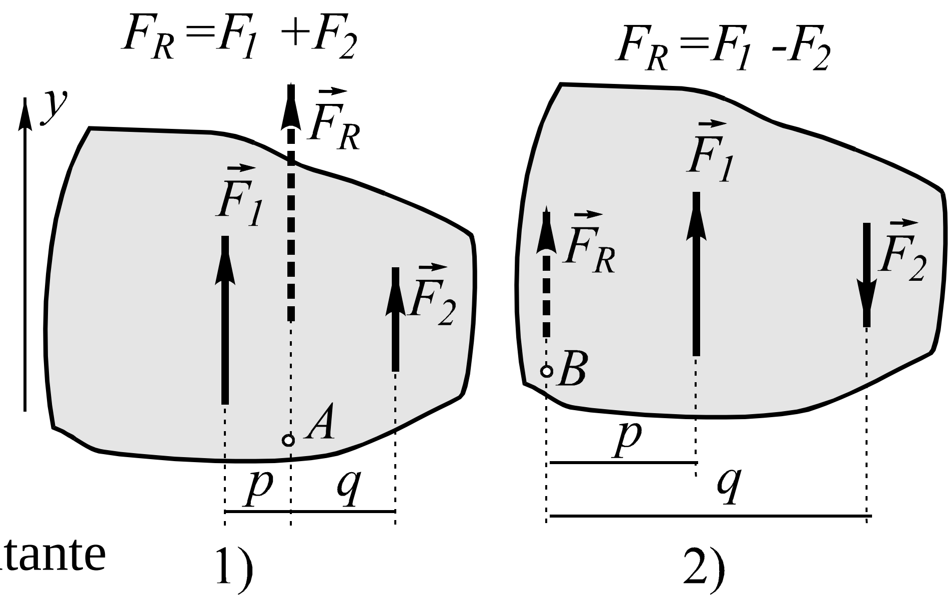
Iz slike 1) sledi

$$F_R = F_1 + F_2$$

$$M_A^{\vec{F}_R} = M_A^{\vec{F}_1} + M_A^{\vec{F}_2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -F_1 \cdot p + F_2 \cdot q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{F_2}{F_1}$$



Ovde je napadna linija rezultante bliža napadnoj liniji sile većeg intenziteta

24. Slaganje dve paralelne sile suprotnog smera. **Neka je F_1>F_2**

Iz slike 2) sledi

$$F_R = F_1 - F_2$$

Ovde se napadna linija rezultante nalazi bliže sili većeg intenziteta ali ne između napadnih linija sila

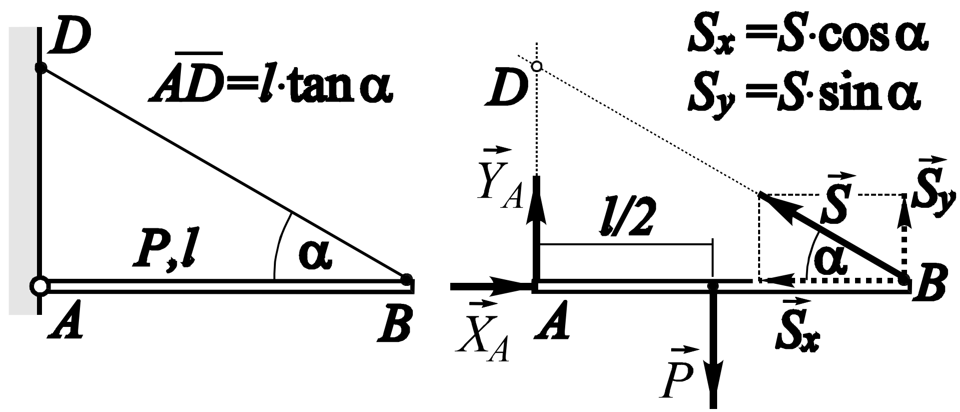
$$M_B^{\vec{F}_R} = M_B^{\vec{F}_1} + M_B^{\vec{F}_2} \quad \Rightarrow \quad 0 = F_1 \cdot p - F_2 \cdot q \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{F_2}{F_1}$$

25. Varijante nezavisnih uslova ravnoteže za ravanske probleme

PROZVOLJAN SISTEM SILA I SPREGOVA

Prva varijanta	$\sum X_i = 0,$	$\sum Y_i = 0,$	$\sum M_{Ai} = 0$
Druga varijanta	$\sum X_i = 0,$	$\sum M_{Ai} = 0,$	$\sum M_{Bi} = 0$
Treća varijanta	$\sum M_{Ai} = 0,$	$\sum M_{Ai} = 0,$	$\sum M_{Ci} = 0$

Primer 6.16 Poznate veličine: P, l i α. Odrediti sve reakcije veza?



1) 2)

Prva varijanta

$$\sum M_{A\,i} = -P\cdot\frac{l}{2} + S\sin\alpha\cdot l = 0 \Rightarrow S = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

$$\sum X_i = X_A - S\cos\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad X_A = \frac{P}{2}\cot\alpha$$

$$\sum Y_i = Y_A - P + S\sin\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_A = \frac{P}{2}$$

Korišćena Varinjonova teorema za $M_A^{\vec{S}}$

$$M_A^{\vec{S}} = M_A^{\vec{S}_x} + M_A^{\vec{S}_y} =$$
$$= 0 + S_y\cdot l = S\sin\alpha\cdot l$$

Druga varijanta

$$\sum M_{A\,i} = 0 \quad\Rightarrow\quad S = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

$$\sum M_{B\,i} = P\cdot\frac{l}{2} - Y_A\cdot l = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_A = \frac{P}{2}$$

$$\sum X_i = 0 \quad\Rightarrow\quad X_A = \frac{P}{2}\cot\alpha$$

Treća varijanta

$$\sum M_{A\,i} = 0 \quad\Rightarrow\quad S = \frac{P}{2\sin\alpha},$$

$$\sum M_{B\,i} = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_A = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_{D\,i} = X_A\cdot\overline{AD} - P\cdot\frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow\quad X_A = \frac{P}{2\tan\alpha} = \frac{P}{2}\cot\alpha$$

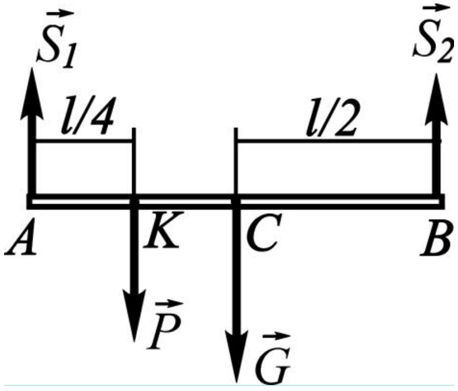
PARALELAN SISTEM SILA I SPREGOVA

Prva varijanta $\sum Y_i = 0, \sum M_{Ai} = 0$

Druga varijanta $\sum M_{Ai} = 0, \sum M_{Bi} = 0$

Primer 6.17

Rešiti primer 6.12 u varijanti korišćenja samo momentnih uslova ravnoteže



$$\sum M_{Ai} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{G}{2} + \frac{P}{4}$$

$$\sum M_{Bi} = -S_1 \cdot l + P \cdot \frac{3}{4} l + G \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{G}{2} + \frac{3}{4} P$$

SUČELJAN SISTEM SILA

Prva varijanta $\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0$

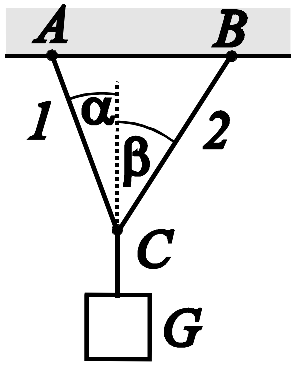
Druga varijanta $\sum X_i = 0, \quad \sum M_{Ai} = 0$

Treća varijanta $\sum M_{Ai} = 0, \sum M_{Bi} = 0$

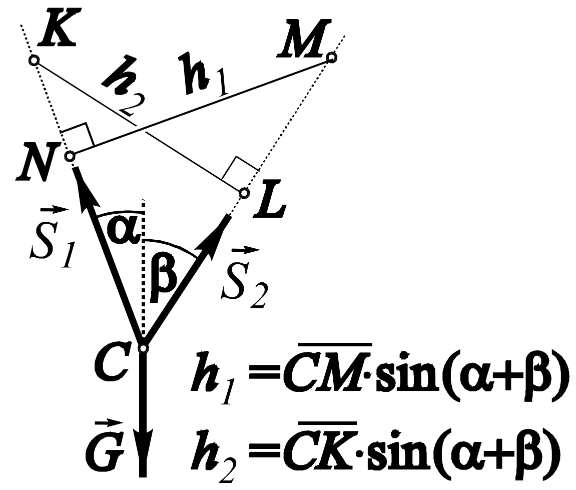
Primer 6.18

Poznate veličine: α, β i *G*

Odrediti sile u užadima *AC* i *BC*



1)



2)

Rešimo zadatak analitički u varijantama u kojima se koriste i momentni uslovi ravnoteže.

Treća varijanta

$$\sum M_{K\,i} = S_2 \cdot \overline{CK} \sin(\alpha+\beta) - G \cdot \overline{CK} \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

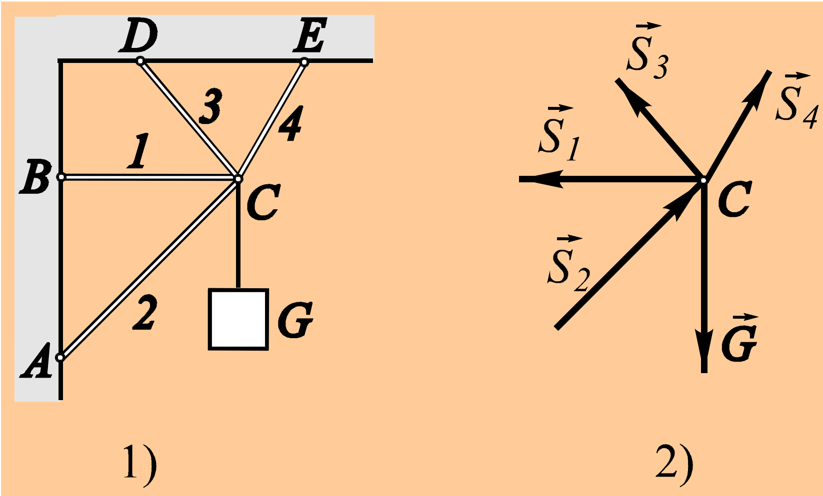
$$\sum M_{M\,i} = G \cdot \overline{CM} \sin\beta - S_1 \cdot \overline{CM} \sin(\alpha+\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{G\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Druga varijanta

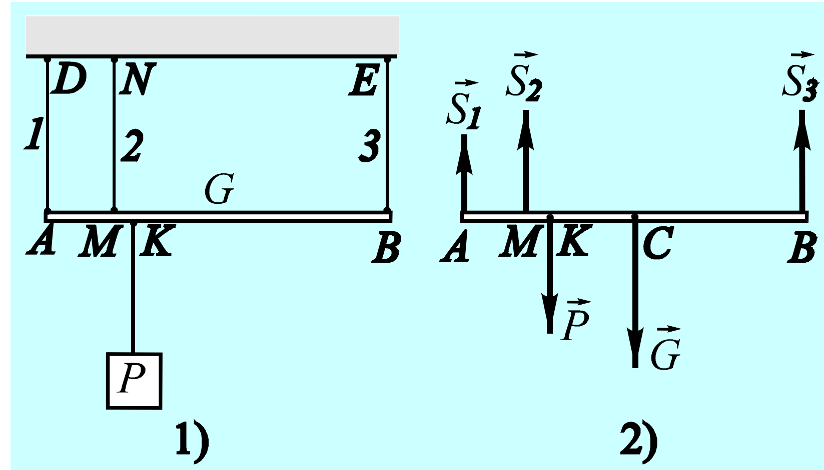
$$\sum M_{K\,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2$$

$$\sum X_i = -S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1$$

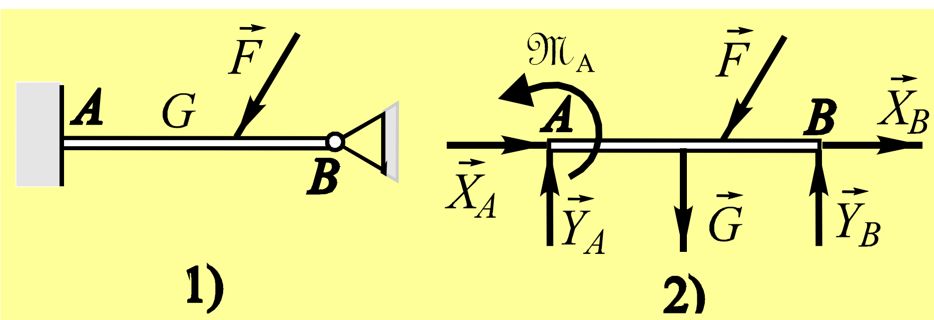
26. Statička određenost i neodređenost



Dva puta satatički neodređen sučeljan ravanski sistem sila



Paralelan ravanski sistem sila koji je jednom satatički neodređen



Dva puta satatički neodređen proizvoljan ravanski sistem sila i spregova

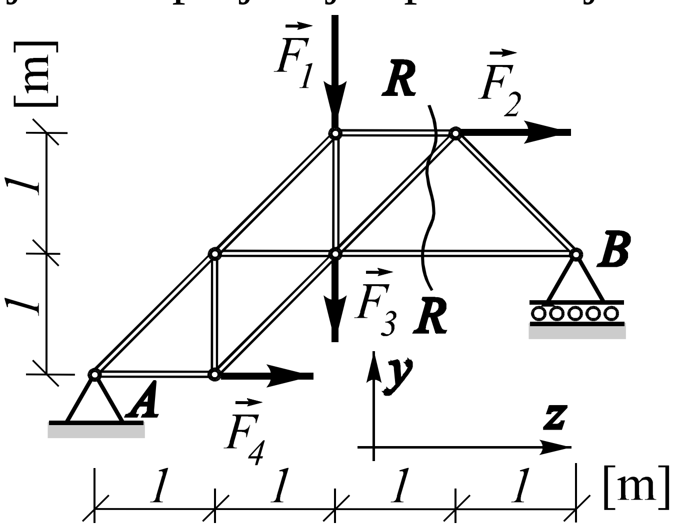
Problemi ravnoteže u kojima je broj nepoznatih veličina veći od broja nezavisnih uslova ravnoteže su statički neodređeni.

Problem je onoliko puta statički neodređen kolika je razlika između broja nepoznatih veličina i broja nezavisnih uslova ravnoteže.

27. Ravanska rešetka. Osnovne pretpostavke i osnovni pojmovi.

Ravanska rešetka je ravanski nosač, sačinjen od međusobno povezanih štapova, koji predstavlja krutu celinu. Štapovi su povezani međusobno svojim krajnjim tačkama. U idealizaciji koja je usvojena, štapovi rešetke se smatraju lakim štapovima a njihove međusobne veze su zglobovi. Zglobovi koji povezuju najmanje dva štapa rešetke nazivaju se njenim čvorovima.

Neka je broj štapova rešetke označen sa S a broj čvorova sa n. Geometrijski gledano rešetka za osnovu ima trougao. Najjednostavnija rešetka ima oblik jednog trougla i sačinjena je od tri štapa (S =3) i tri čvora (n=3). $S = 3 + 2 \cdot k$
Pretpostavlja se da su koncentrisane sile koje dejstvuju na pojedine čvorove jedina spoljašnja opterećenja rešetke.

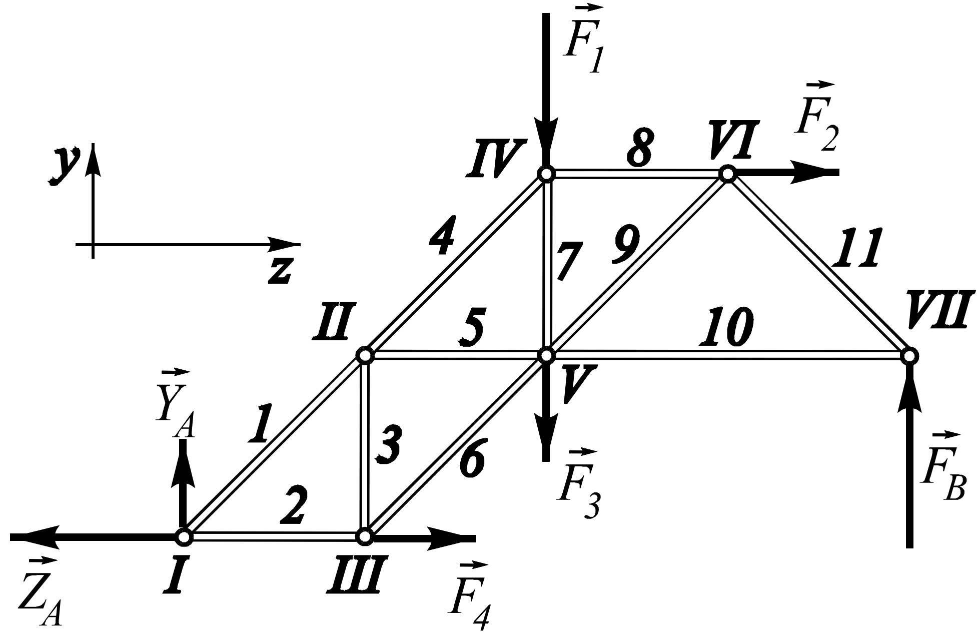


$F_1 = 2$ kN
$F_2 = 1$ kN
$F_3 = 1$ kN
$F_4 = 1$ kN

Osim aktivnih (zadatih) sila, na čvorove dejstvuju i reakcije spoljašnjih veza (otpori oslonaca), s obzirom da je rešetka oslonjena (ili na neki drugi način povezana sa okolinom) preko nekih od njenih čvorova.

Kod nosača se sreću nepokretni i pokretni oslonci.

Dok se u nepokretnom osloncu A javljaju reakcije u oba upravna pravca (y i z) u pokretnom osloncu B nema reakcije u horizontalnom pravcu (tački B je omogućeno kretanje u tom pravcu bez otpora) već samo u vertikalnom. Rešavanje rešetke podrazumeva određivanje otpora oslonaca i sila u štapovima.



Štapovi su označeni arapskim brojevima a čvorovi rimskim.

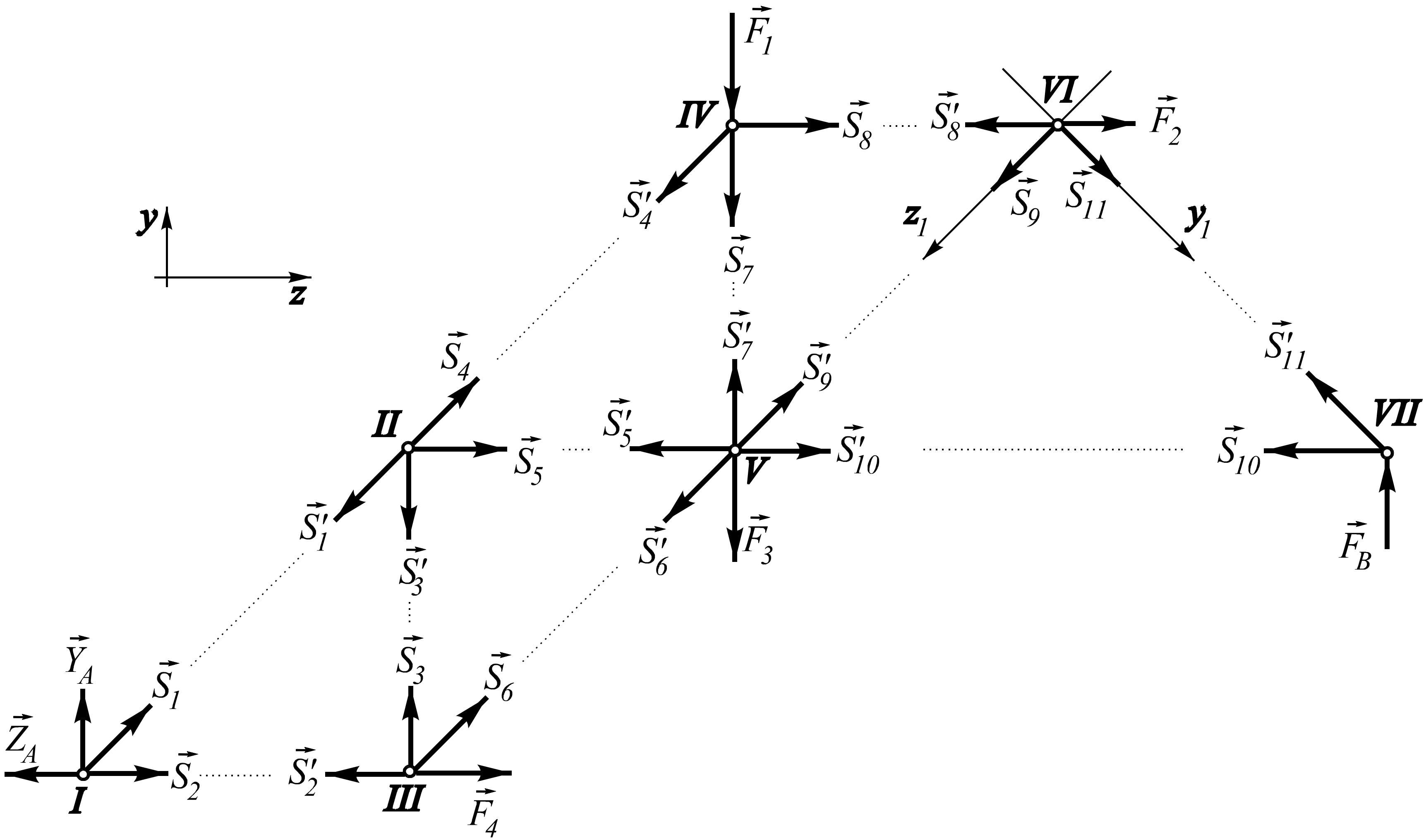
Određivanje otpora oslonaca

$$\sum M_{I\,i} = -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 2 + F_B \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = 2 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = Y_A - F_1 - F_3 + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 1 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + F_2 + F_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = 2 \text{ kN}$$

28. Analitičko određivanje sila u štapovima izdvajanjem čvorova



Svi čvorovi rešetke i sile koje na njih dejstvuju

Određivanje sila u čvoru I:

$$\sum Y_i = Y_A + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = -\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$\sum Z_i = -Z_A + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_2 = 0 \;\Rightarrow\; S_2 = 3\ \text{kN}$$

Određivanje sila u čvoru III:

$$\sum Z_i = -S_2 + S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 = 0 \Rightarrow S_6 = 2\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$\sum Y_i = S_3 + S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; S_3 = -2\ \text{kN}$$

Određivanje sila u čvoru II:

$$\sum Y_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 = 0 \;\Rightarrow\; S_4 = -3\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$\sum Z_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0 \Rightarrow S_5 = 2\ \text{kN}$$

Određivanje sila u čvoru IV:

$$\sum Z_i = -S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_8 = 0 \;\Rightarrow\; S_8 = -3\ \text{kN}$$

$$\sum Y_i = -F_1 - S_7 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; S_7 = 1\ \text{kN}$$

Određivanje sila u čvoru VI:

$$\sum Z_{1i} = S_9 + S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_9 = 2\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

$$\sum Y_{1i} = S_{11} - S_8 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{11} = -2\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

Određivanje preostale sile u čvoru VII i provera drugog uslova ravnoteže:

$$\sum Z_i = -S_{10} - S_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{10} = 2\ \mathrm{kN}$$

Prva provera

$$\sum Y_{1i} = F_B + S_{11} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + \left(-2\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Provera uslova ravnoteže u čvoru V:

Druga provera

$$\sum Z_i = -S_5 - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_{10} + S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Treća provera

$$\sum Y_i = S_7 + S_9 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$