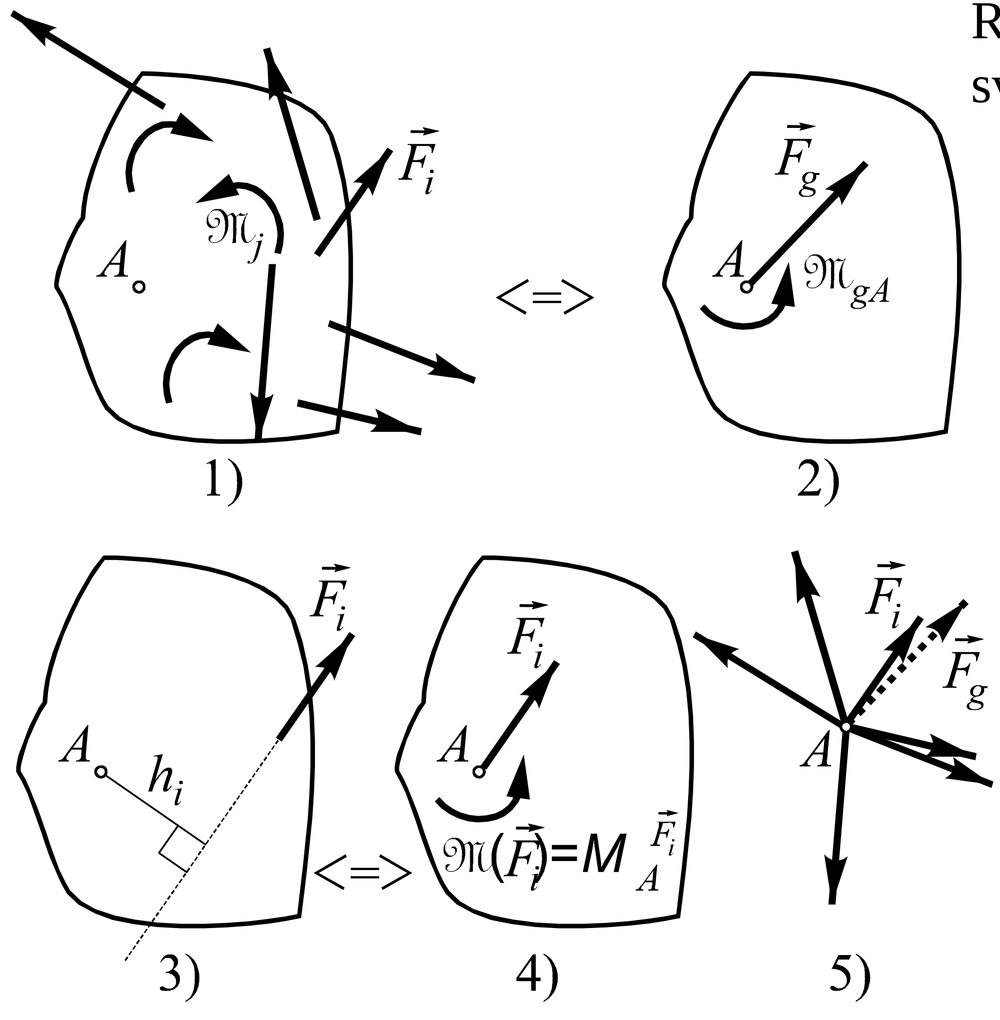
Onlajn učenje MEHANIKA br. 4
(ranijih godina, po starom nastavnom programu, ovaj materijal je nosio naziv Statika 4

15. Redukcija proizvoljnog ravanskog sistema sila i spregova na proizvoljno izabranu tačku.



Redukuje se na redukcionu tačku svaka sila koja pripada sistemu

Kada se proizvoljna i-ta sila, Sl.3, redukuje na tačku *A*, dobije se njeno ekvivalentno dejstvo, Sl.4, koje čine ista takva sila u tački A i spreg $\mathfrak{M}\left(\vec{F}_i\right)$ koji može biti izražen preko momenta sile $\vec{F}_i$ za redukcionu tačku *A:* $\mathfrak{M}(\vec{F}_i) = M_A^{\vec{F}_i}$

$$\mathfrak{M}_{gA} = \sum \mathfrak{M}(\vec{F}_i) + \sum \mathfrak{M}_j$$

$$\mathfrak{M}_{gA} = \sum M_{Ai}$$

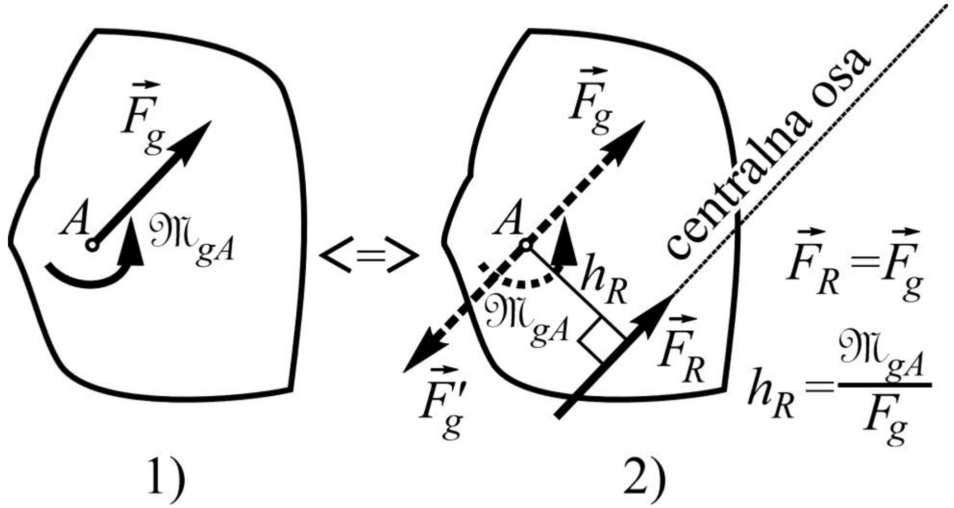
$$\vec{F}_g = \sum \vec{F}_i$$

16. Rezultanta prizvoljnog ravanskog sistema sila i spregova.

Da bi se proizvoljan ravanski sistem sila i spregova mogao svesti na rezultantu mora glavni vektor da bude različit od nula vektora $\vec{F}_g \neq \vec{0}$

$$F_g' = F_R = F_g$$

$$h_R = \frac{\mathfrak{M}_{gA}}{F_g}$$



Određivanje rezultante proizvoljnog ravanskog sistema sila i spregova

Napadna linija rezultante, koja je na rastojanju h_R od redukcione tačke, nosi naziv "centralna osa ravanskog sistema sila i spregova".

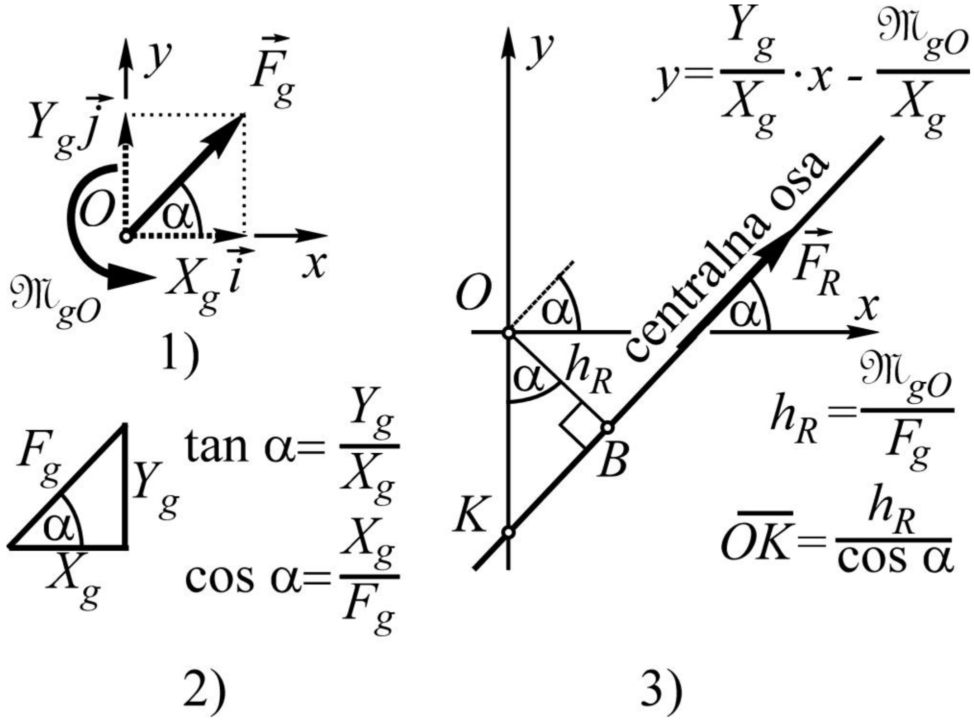
Vektor rezultante je istog pravca, smera i intenziteta kao i glavni vektor $\vec{F}_R = \vec{F}_g$

$\vec{F}_g = X_g \vec{i} + Y_g \vec{j}$ $\quad$ $\vec{F}_R = X_R \vec{i} + Y_R \vec{j}$ $\quad$ $\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j}$

$\vec{F}_R = \vec{F}_g = \sum \vec{F}_i$ $\quad$ $\Rightarrow \quad X_R = X_g = \sum X_i$ $\quad$ $Y_R = Y_g = \sum Y_i$

U cilju dobijanja jednačine centralne ose proizvoljnog ravanskog sistema sila i spregova dobro je prvo izvršiti redukciju sistema na tačku koordinatnog početka O i tako dobiti glavni vektor $\vec{F}_g$ i glavni moment $\mathfrak{M}_{gO}$.

$y = kx + n$ $\qquad$ $k = \tan\alpha$



Dobijanje jednačine centralne ose

$$\overline{OB} = h_R = \frac{\mathfrak{M}_{gO}}{F_g}$$

$$-n = \overline{OK} = \frac{h_R}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\mathfrak{M}_{gO}}{F_g \cos\alpha} = \frac{\mathfrak{M}_{gO}}{X_g}$$

Jednačina centralne ose za $X_g \neq 0$

$$y = \frac{Y_g}{X_g} \cdot x - \frac{\mathfrak{M}_{gO}}{X_g}$$

Ako je glavni moment za redukcionu tačku jednak nuli a $\vec{F}_g \neq \vec{0}$ onda rezultanta, ima napadnu liniju koja prolazi kroz redukcionu tačku.

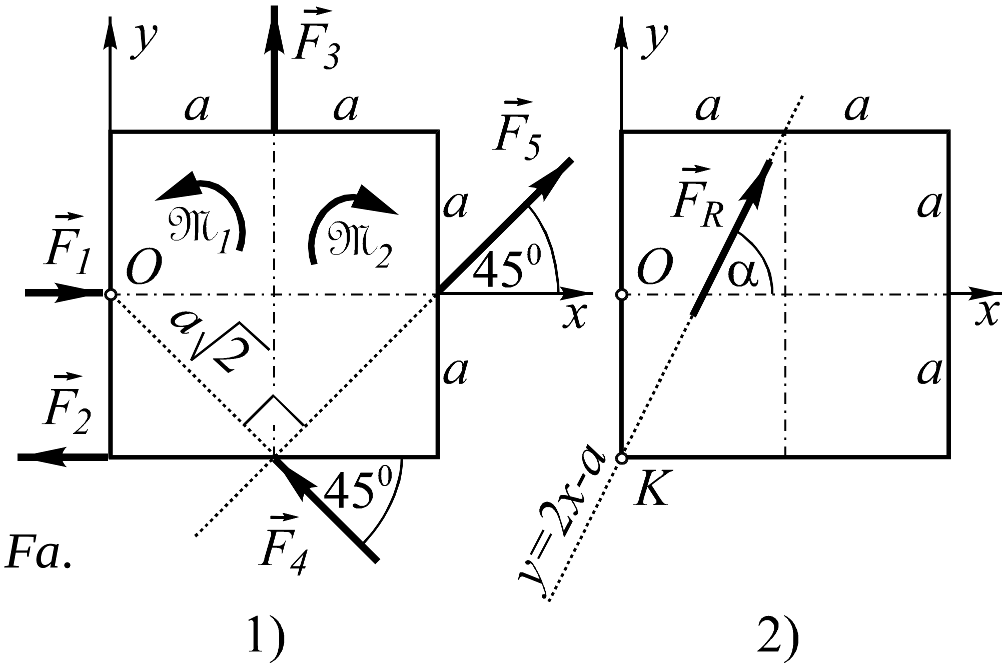
Ako je glavni moment za redukcionu tačku različit od nule a $\vec{F}_g = \vec{0}$ onda sistem nema rezultantu već se svodi na spreg koji je jednak dobijenom glavnom momentu.

Primer 6.1

U zavisnosti od poznatih veličina F i a odrediti rezultantu i njeno mesto za sistem sila i spregova koji dejstvuje na laku kvadratnu ploču (Sl.1).

Podaci su: $F_1 = 5F, F_2 = F_3 = 2F,$

$F_4 = F_5 = 2\sqrt{2}F, \mathfrak{M}_1 = 1Fa, \mathfrak{M}_2 = 2Fa.$



$$X_R = X_g = \sum X_i = F_1 - F_2 - F_4 \cos 45^0 + F_5 \cos 45^0 = 3F,$$

$$Y_R = Y_g = \sum Y_i = F_3 + F_4 \sin 45^0 + F_5 \sin 45^0 = 6F,$$

$$\Rightarrow \frac{Y_g}{X_g} = 2$$

$$\vec{F}_R = 3F\,\vec{i} + 6F\,\vec{j}$$

$$F_R = \sqrt{(3F)^2 + (6F)^2} = 3\sqrt{5}F$$

$$\mathfrak{M}_{gO} = \sum M_{O\,i} = -F_2 \cdot a + F_3 \cdot a + F_5 \cdot a\sqrt{2} + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = 3Fa, \Rightarrow \frac{\mathfrak{M}_{gO}}{X_g} = a$$

$$y = 2 \cdot x - a$$

17. Uslovi ravnoteže prizvoljnog ravanskog sistema sila i spregova

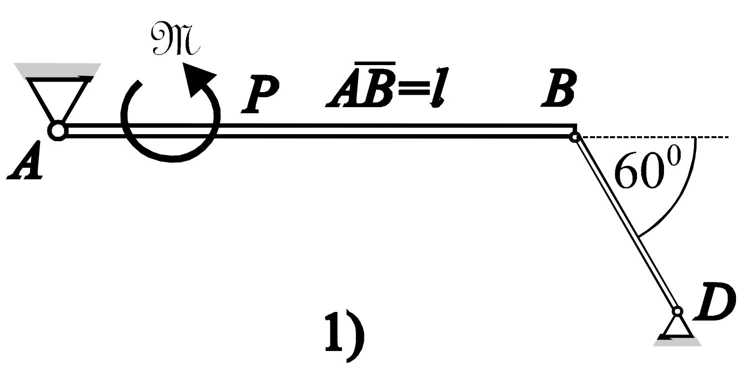
$$\vec{F}_g = \vec{0}, \quad \mathfrak{M}_{gA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_{Ai} = 0$$

Dobijeni uslovi ravnoteže su međusobno nezavisni i da dovode do tri nezavisne algebarske jednačine.

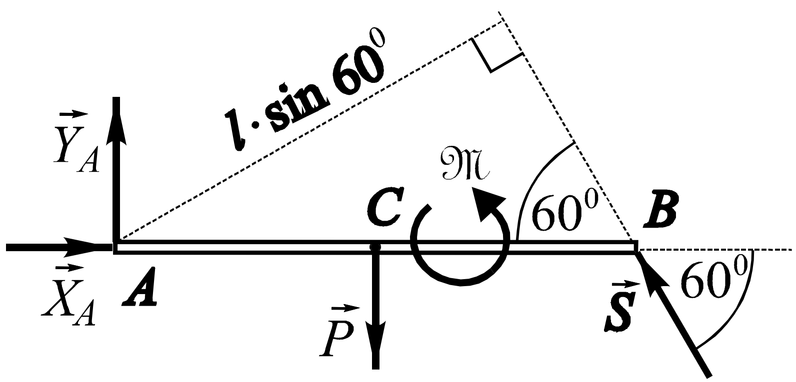
Što se tiče ortogonalnog *xy* koordinatnog sistema (u cilju pisanja prva dva uslova ravnoteže) treba znati da on može biti usvojen bilo kako. Treba ga tako izabrati da dobijene jednačine budu što jednostavnije za njihovo formiranje i rešavanje.

U cilju dobijanja treće (momentne) jednačine treba znati da proizvoljno izabrana momentna tačka može biti bilo koja tačka u ravni, koja može pripadati materijalnom delu tela ili biti ma gde van njega. Treba je izabrati tako da dobijena momentna jednačine bude što jednostavnija za njeno formiranje i rešavanje. Veoma je čest slučaj da se na samom početku rešavanja problema pogodnim izborom momentne tačke dobija momentna jednačina u kojoj figuriše samo jedna nepoznata veličina. U takvom slučaju prvo treba rešiti tu nepoznatu pa tek zatim pisati preostale jednačine kako bi se na što lakši način odredile sve tri nepoznate.

Primer 6.2



1)



2)

Homogeni štap AB težine P, dužine l, nalazi se u ravnoteži u horizontalnom položaju (Sl.1). Na štap dejstvuje spreg momenta $\mathfrak{M}$ smera datog na slici. Štap je u tački A zglobno vezan a u tački B se podupire na laki štap BD koji sa horizontalom gradi ugao od 60^0. Odrediti reakcije veza u zavisnosti od poznatih veličina $\mathfrak{M}$, P i l.

$$\sum M_{Ai} = -P\cdot\frac{l}{2} + S\cdot l\sin 60^0 + \mathfrak{M} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{3}P - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\mathfrak{M}}{l}$$

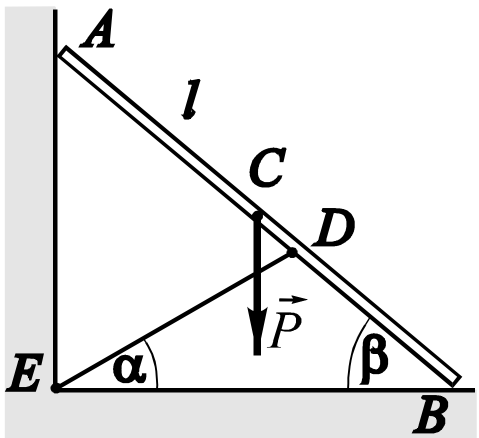
$$\sum X_i = X_A - S\cos 60^0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$X_A = \frac{\sqrt{3}}{6}P - \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\mathfrak{M}}{l}$$

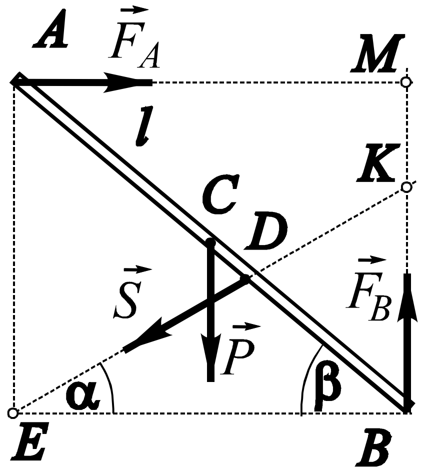
$$\sum Y_i = Y_A - P + S\sin 60^0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Y_A = \frac{1}{2}P + \frac{\mathfrak{M}}{l}$$

Primer 6.3



1)



2)

Homogeni štap *AB* težine *P*, dužine *l*, koji sa horizontalom gradi ugao β, naslanja se u tački *A* na gladak vertikalni zid a u tački *B* na gladak horizontalni pod (Sl.1). Za tačku *D* štapa vezano je uže *ED* koje sa horizontalom gradi ugao α, kako je to na slici prikazano. Odrediti sve reakcije veza u zavisnosti od poznatih veličina α, β, *P* i *l*.

$$\sum M_{K\,i} = P \cdot \frac{l}{2}\cos\beta - F_A \cdot \overline{MK} = 0 \quad \Rightarrow F_A = \frac{Pl\cos\beta}{2\overline{MK}} = \frac{P\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\overline{MK} = \overline{MB} - \overline{KB} = l\sin\beta - l\cos\beta\tan\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\overline{MK} = \frac{l\sin\beta\cos\alpha - l\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{l\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

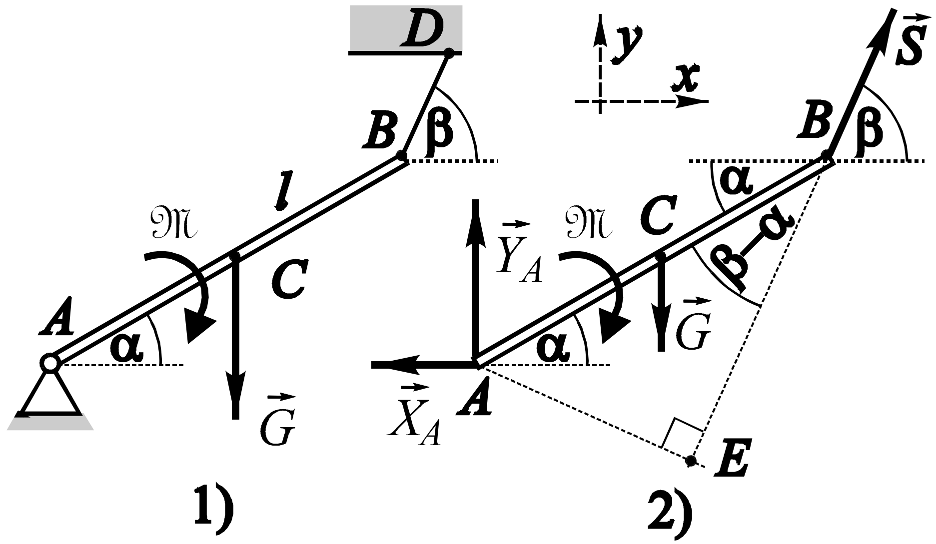
$$\sum X_i = F_A - S\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{P\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\sum Y_i = F_B - P - S\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_B = P + \frac{P\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)}$$

Primer 6.4



Homogeni štap AB težine G, dužine l, koji sa horizontalom gradi ugao α, vezan je u tački A zglobno a za njegovu tačku B vezano je uže BD koje sa horizontalom gradi ugao β (Sl.1). Na štap dejstvuje i spreg momenta $\mathfrak{M}$ smera datog na slici. Odrediti sve reakcije veza u zavisnosti od poznatih veličina α, β, G, $\mathfrak{M}$ i l.

$$\sum M_{Ai} = -G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + S\cdot l\sin(\beta-\alpha) - \mathfrak{M} = 0 \Rightarrow \quad S = \frac{G\cos\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)} + \frac{\mathfrak{M}}{l\sin(\beta-\alpha)}$$

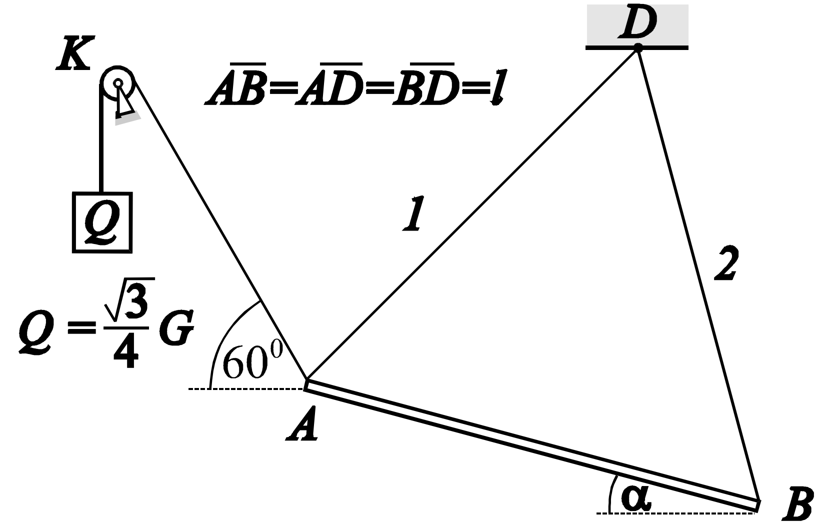
$$\sum X_i = -X_A + S\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = \frac{G\cos\alpha\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} + \frac{\mathfrak{M}\cos\beta}{l\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\sum Y_i = Y_A - G + S\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = G - \frac{G\cos\alpha\sin\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} - \frac{\mathfrak{M}\sin\beta}{l\sin(\beta-\alpha)}$$

Primer 6.5

Poznatih veličina G i l

Odrediti ugao α i reakcije u užadima



1)

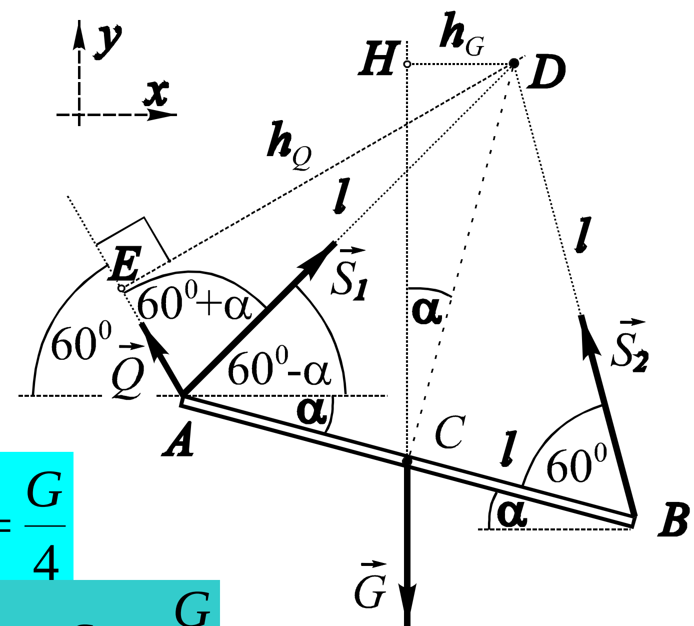
$$\sum M_{D\,i} = G\cdot h_G - Q\cdot h_Q = 0$$

$$h_G = \overline{CD}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l\sin\alpha$$

$$h_Q = l\sin\left(60^0+\alpha\right) = l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}Gl\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}Gl\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\sqrt{3}\sin\alpha = \cos\alpha \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad \alpha = 30^0$$



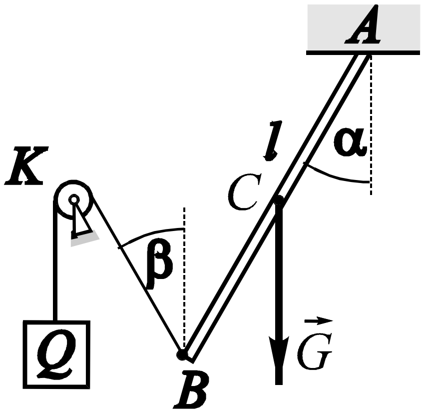
2)

$$\sum X_i = -G\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 60^0 + S_1\cos 30^0 = 0 \Rightarrow S_1 = \frac{G}{4}$$

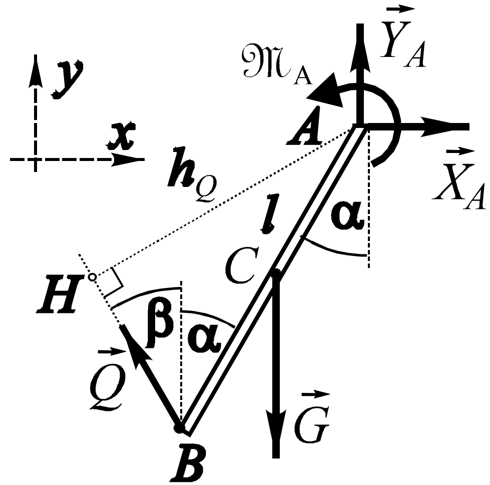
$$\sum Y_i = G\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 60^0 + S_1\sin 30^0 - G + S_2 = 0 \qquad \Rightarrow S_2 = \frac{G}{2}$$

Primer 6.6

Homogeni štap AB težine G, dužine l, koji sa vertikalom gradi ugao α, uklešten je u tački A a za njegovu tačku B je vezano uže koje sa vertikalom gradi ugao β (Sl.1). Uže je prebačeno preko idealnog kotura K a na njegovom drugom kraju je okačen teret težine Q. Odrediti sve reakcije veza u zavisnosti od poznatih veličina α, β, G, Q i l.



1)



2)

Mada to u ovom zadatku ne donosi neku prednost, prvo napišimo momentnu jednačinu za momentnu tačku A

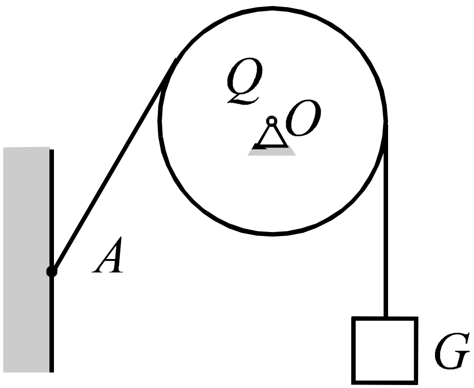
$$\sum M_{Ai} = G \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha - Q \cdot l\sin(\alpha+\beta) + \mathfrak{M}_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M}_A = Q \cdot l\sin(\alpha+\beta) - G \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha$$

Druga dva uslova ravnoteže odrediće preostale dve nepoznate:

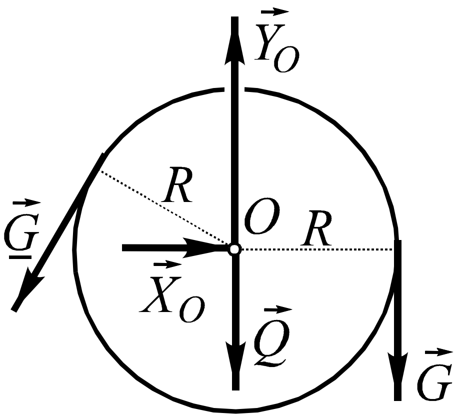
$$\sum X_i = X_A - Q\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = Q\sin\beta$$

$$\sum Y_i = Y_A - G + Q\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = G - Q\cos\beta$$

18. Analiza idealnog kotura



1)



2)

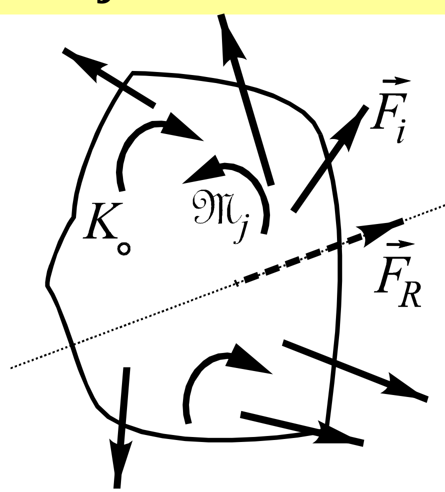
Kotur konačnih dimenzija (Sl.1), težine Q, zglobno vezan sa okolinom u tački O, naziva se idealnim iz razloga što je kružnog oblika sa težištem u centru kruga O i što je zglobno povezan sa okolinom baš u centru O.

$$\sum M_{O\,i} = \underline{G}\cdot R - G\cdot R = 0 \Rightarrow \underline{G} = G$$

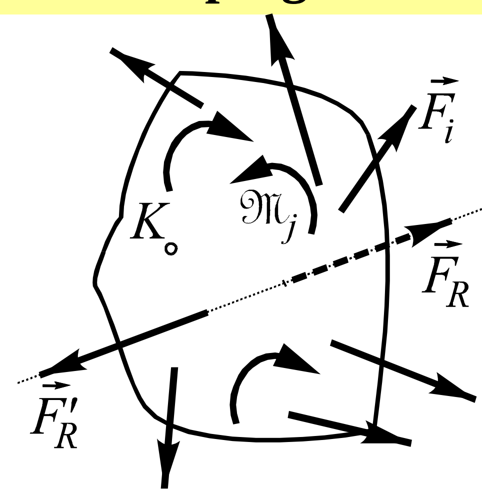
19. Varinjonova teorema za proizvoljan ravanski sistem sila i spregova

Suma momenata nekog ravanskog sistema sila i spregova za proizvoljno izabranu tačku jednaka momentu njegove rezultante za istu tačku.

$$M_K^{\vec{F}_R} = \sum M_{K\,i}$$



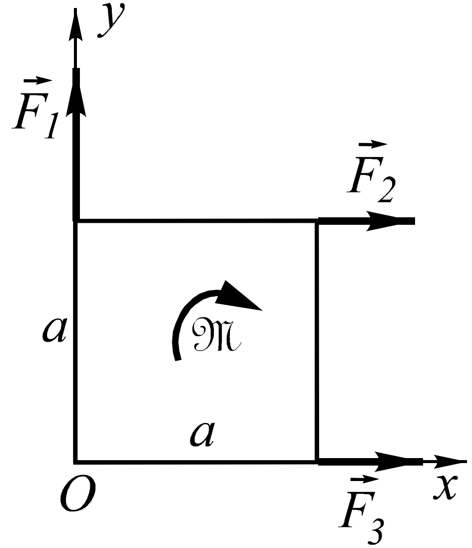
1)



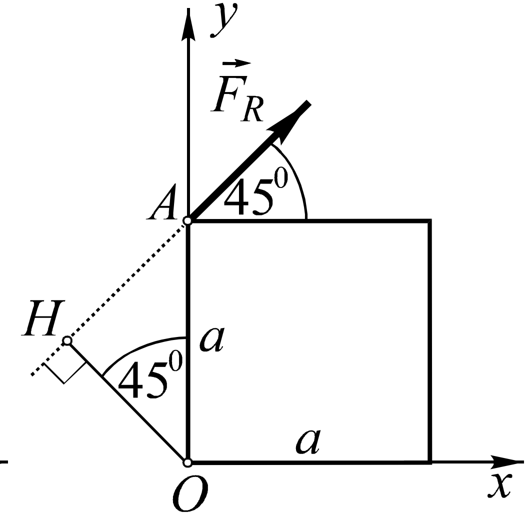
2)

Primer 6.7

Za dati sistem sila i spregova koji dejstvuje na laku kvadratnu ploču (Sl.1) u zavisnosti od poznatih veličina F i a, prvo odrediti rezultantu, a zatim i njenu napadnu liniju neposrednom primenom Varinjonove teoreme. Podaci su: $F_1=2F$, $F_2=F_3=F$ i $\mathfrak{M}=Fa$.



1)



2)

$$X_R = X_g = \sum X_i = F_2 + F_3 = 2F$$

$$Y_R = Y_g = \sum Y_i = F_1 = 2F$$

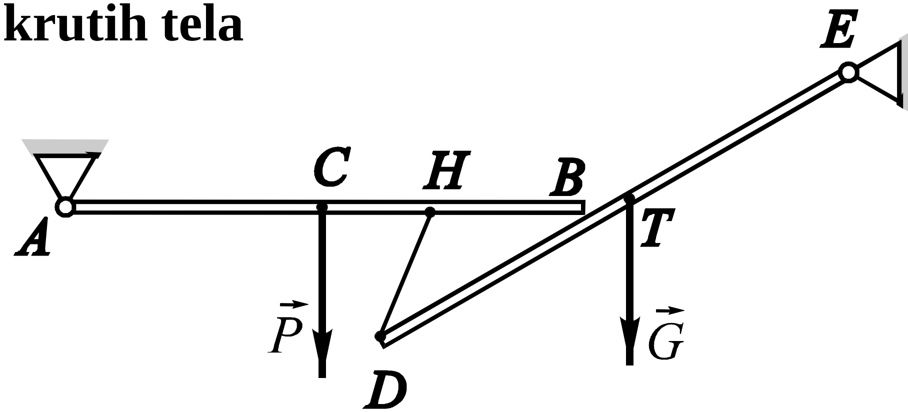
$$\Rightarrow \vec{F}_R = 2F\,\vec{i} + 2F\,\vec{j},\; F_R = \sqrt{(2F)^2 + (2F)^2} = 2\sqrt{2}F$$

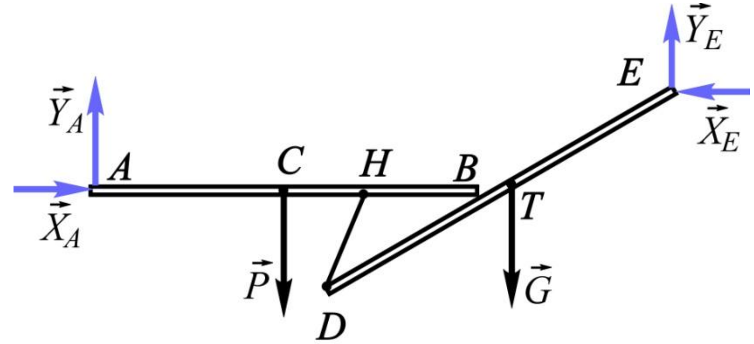
$$\alpha = \arctan\frac{Y_R}{X_R} = \arctan 1 = 45^0$$

$$M_O^{\vec{F}_R} = \sum M_{O\,i} \Rightarrow -F_R\cdot\overline{OH} = -F_2\cdot a - \mathfrak{M} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

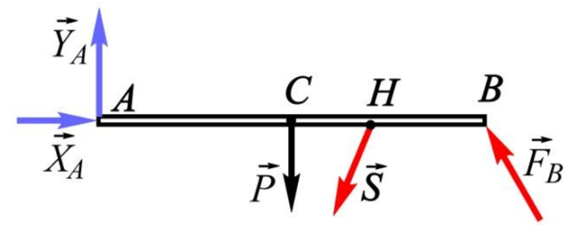
$$\overline{OA} = \frac{\overline{OH}}{\cos\alpha} = a$$

20. Ravnoteža ravanskog sistema krutih tela

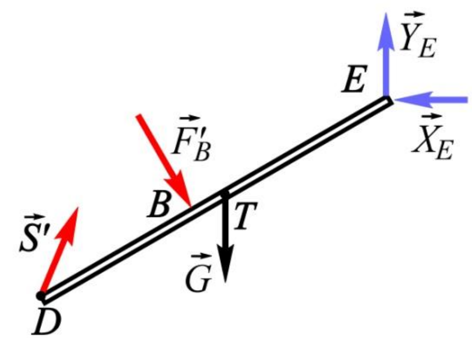




1) uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na celinu



2) uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na jednu komponentu celine



3) uravnotežen sistem sila koji dejstvuje na drugu komponentu celine

Od svih tih reakcija, one u zglobovima A i E (to su: X_A, Y_A, X_E i Y_E) predstavljaju reakcije spoljašnjih veza, pošto njima dejstvuje okolina na komponente sistema.

Preostale reakcije S i F_B predstavljaju reakcije unutrašnjih veza, pošto njima međusobno dejstvuju komponente celine između sebe.

Kod problema iz sistema krutih tela uvek se nameće pitanje "Kojim redosledom najlakše odrediti sve nepoznate veličine u zavisnosti od poznatih?"

Primer 6.8

Poznate veličine: P, G, a, $\mathfrak{M}=Ga/4$

Odrediti sve reakcije veza i $\overline{DK}$

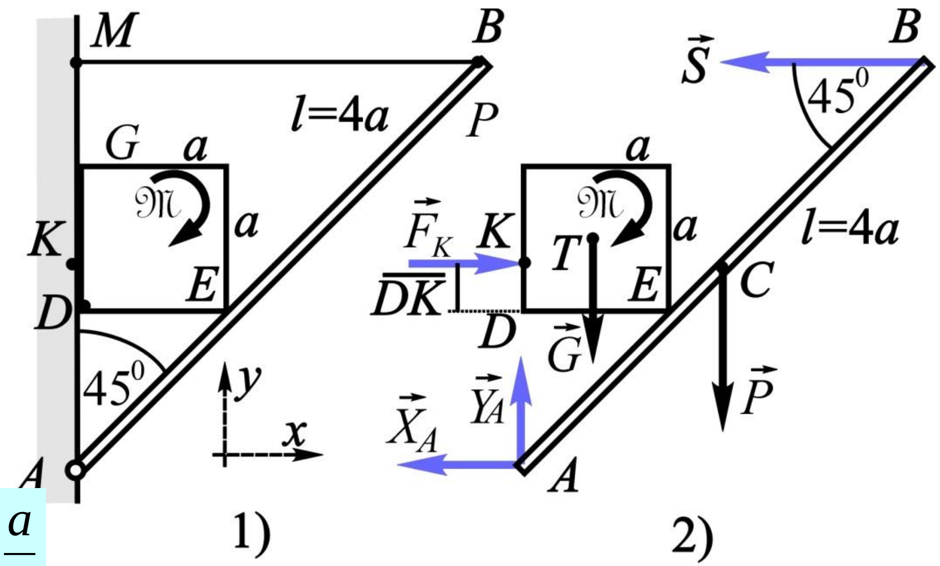
Sl.4

$$\sum Y_i = F_E \sin 45^0 - G = 0$$

$$\Rightarrow F_E = \sqrt{2}G$$

$$\sum X_i = F_K - F_E \cos 45^0 = 0 \Rightarrow F_K = G$$

$$\sum M_{Ei} = G\frac{a}{2} - F_K \overline{DK} - \mathfrak{M} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{DK} = \frac{a}{4}$$



Sl.3 $$\sum M_{Ai} = S\cdot 4a\frac{\sqrt{2}}{2} - P\cdot 2a\frac{\sqrt{2}}{2} - F_E\cdot\overline{AE} = 0$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{P}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}G$$

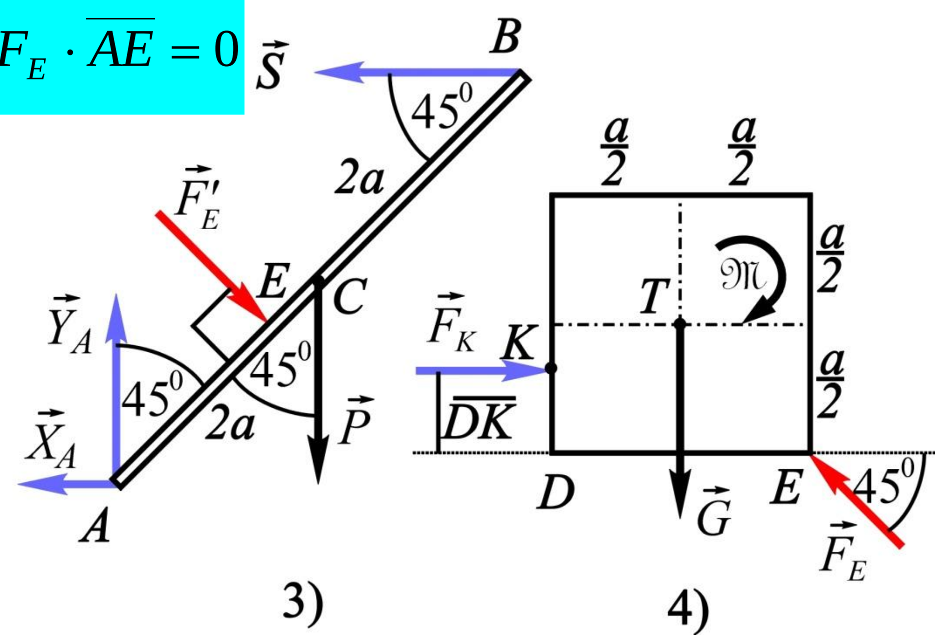
$$\overline{AE} = \sqrt{2}a$$

Sl.2

$$\sum X_i = -X_A + F_K - S = 0$$

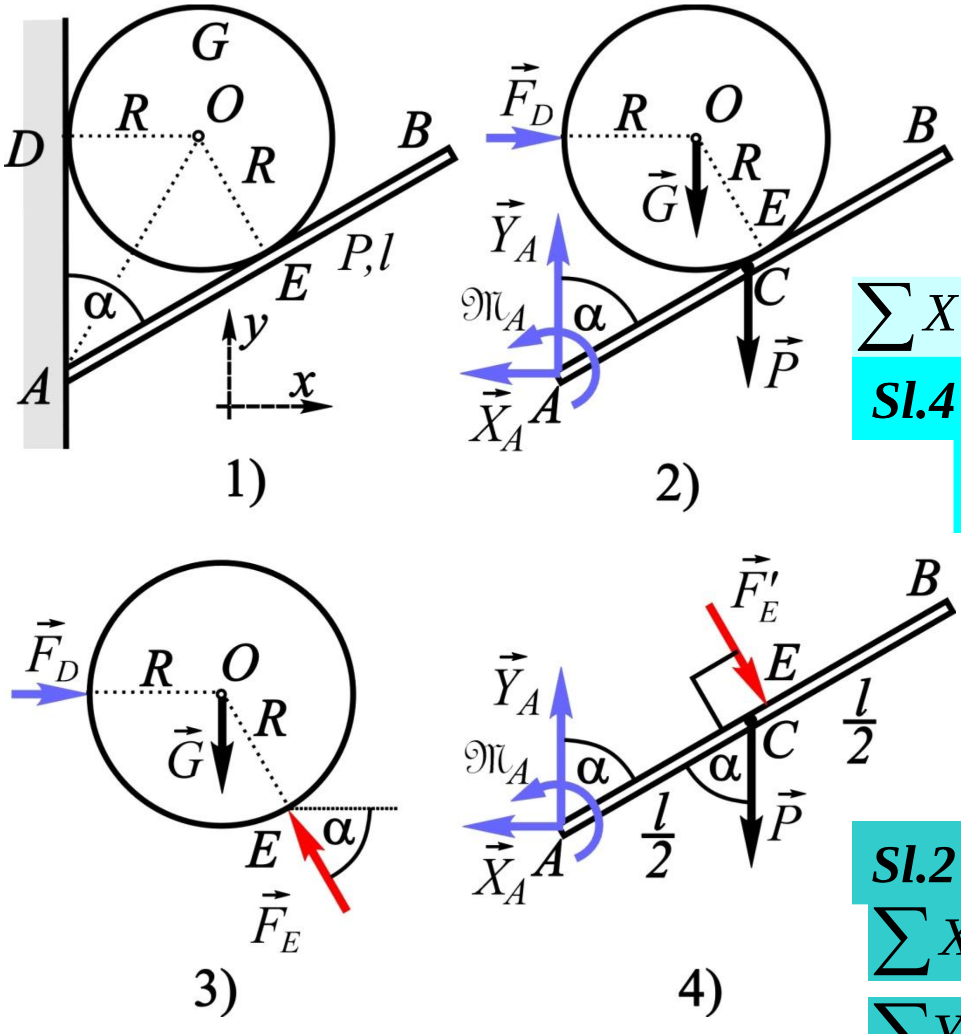
$$\Rightarrow \quad X_A = G - \frac{\sqrt{2}}{2}G - \frac{P}{2}$$

$$\sum Y_i = Y_A - P - G = 0 \Rightarrow Y_A = P + G$$



Primer 6.9

Poznate veličine: P, G, R i α
Odrediti sve reakcije veza?



Sl.3

$$\sum Y_i = F_E \sin\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow F_E = \frac{G}{\sin\alpha}$$

$$\sum X_i = F_D - F_E \cos\alpha = 0 \Rightarrow F_D = G\cot\alpha$$

Sl.4

$$\sum M_{Ai} = -P\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha - F_E\cdot\overline{AE} + \mathfrak{M}_A = 0$$

$$\overline{AE} = R\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}_A = \frac{Pl}{2}\sin\alpha + \frac{GR}{\sin\alpha}\cot\frac{\alpha}{2}$$

Sl.2

$$\sum X_i = -X_A + F_D = 0 \Rightarrow X_A = G\cot\alpha$$

$$\sum Y_i = Y_A - P - G = 0 \Rightarrow Y_A = P + G$$

Primer 6.10

Poznate veličine: P, G, F, a i b

Odrediti uglove α i β i reakcije veza?

Sl.4

$$\sum M_{Ai} = -G\cdot b\sin\beta + F\cdot 2b\cos\beta = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots \Big| \cdot \frac{1}{b\cos\beta} \qquad \Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{2F}{G}$$

$$\sum Y_i = Y_A - G = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = G$$

$$\sum X_i = -X_A + F = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = F$$

Sl.3

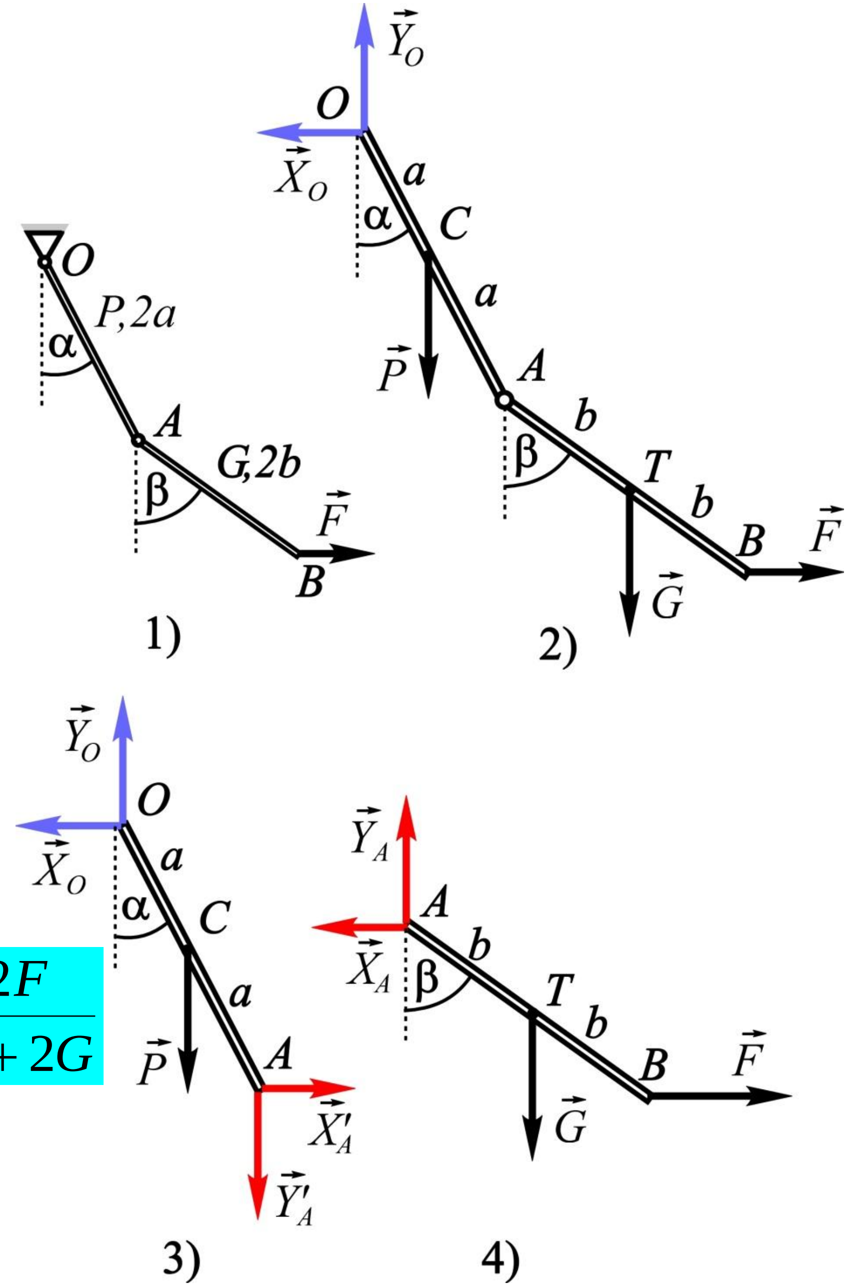
$$\sum M_{Oi} = -P\cdot a\sin\alpha - Y_A\cdot 2a\sin\alpha +$$

$$+ X_A\cdot 2a\cos\alpha = 0 \Big| \cdot \frac{1}{a\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2F}{P+2G}$$

Sl.2

$$\sum X_i = -X_O + F = 0 \quad \Rightarrow \quad X_O = F$$

$$\sum Y_i = Y_O - P - G = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_O = P + G$$



Primer 6.11

Poznate veličine: P, G, F i a

Odrediti reakcije veza u A i B ?

Sl.2 $\sum M_{Ai} = 0 \Rightarrow$

$$-G \cdot \frac{a}{2} - P \cdot \frac{3}{2} a + F \cdot \sqrt{3} a + Y_B \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_B = \frac{G}{4} + \frac{3}{4} P - \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_B - G - P = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_A = \frac{3}{4} G + \frac{P}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Sl.3 $\sum M_{Ci} = 0 \Rightarrow$

$$G \cdot \frac{a}{2} - Y_A \cdot a + X_A \cdot \sqrt{3} a = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_A = \frac{\sqrt{3}(G+P) + 6F}{12}$$

Sl.2 $\sum X_i = -X_A - X_B + F = 0$

$$\Rightarrow \quad X_B = \frac{-\sqrt{3}(G+P) + 6F}{12}$$