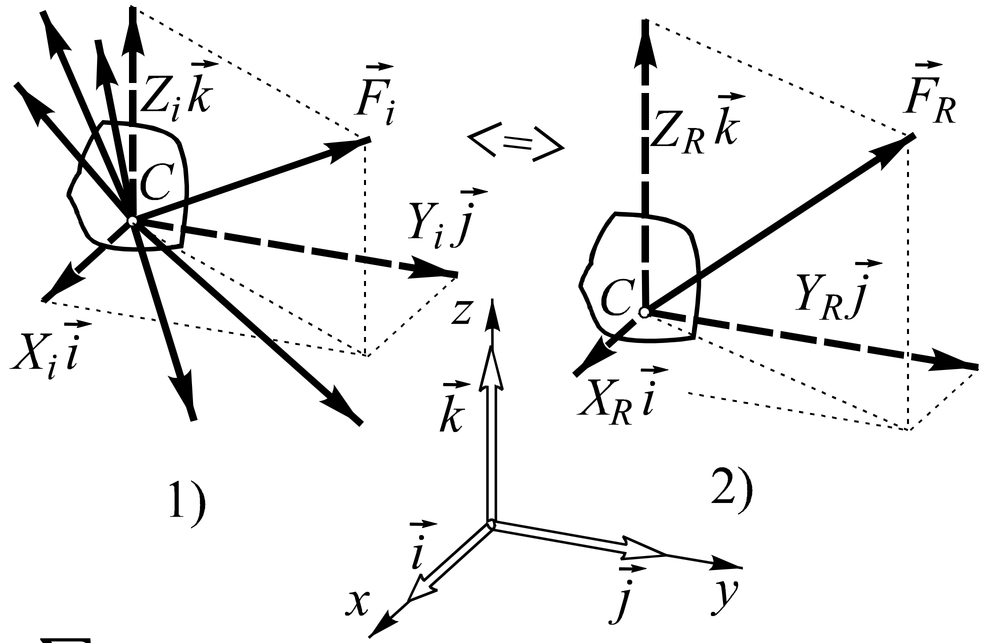
Onlajn učenje MEHANIKA br. 3 (ranijih godina, po starom nastavnom programu, ovaj materijal je nosio naziv Statika 3

8. Sučeljni sistem sila i njegova rezultanta.

Ako se napadne linije svih sila koje sačinjavaju sistem seku u jednoj tački onda se takav sistem sila naziva sučeljnim sistemom.



$$\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j} + Z_i\vec{k}$$

$$\vec{F}_R = X_R\vec{i} + Y_R\vec{j} + Z_R\vec{k}$$

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i$$

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2}$$

Primer 4.1

$$\vec{F}_1 = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \vec{F}_2 = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k} \qquad \vec{F}_3 = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$X_R = \sum X_i = X_1 + X_2 + X_3 = 2 - 6 + 1 = -3$$

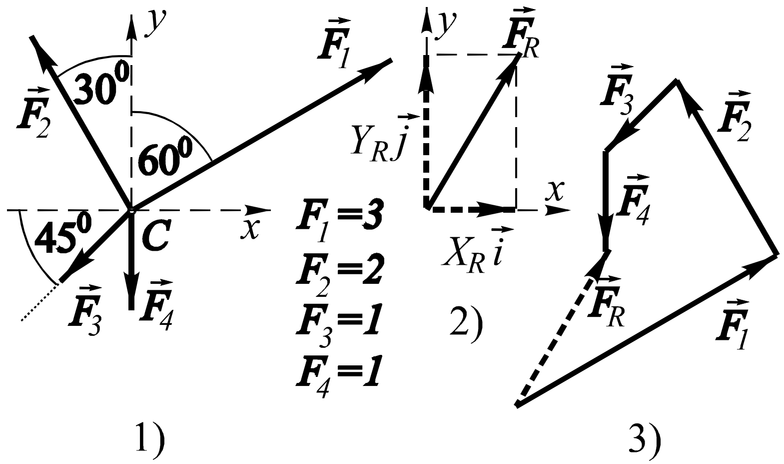
$$Y_R = \sum Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 = -4 - 2 + 1 = -5$$

$$Z_R = \sum Z_i = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 3 - 1 + 2 = 4$$

$$\vec{F}_R = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$F_R = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}$$

Primer 4.2



$$X_1 = F_1 \sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad Y_1 = F_1 \cos 60^0 = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = -F_2 \sin 30^0 = -1, \quad Y_2 = F_2 \cos 30^0 = \sqrt{3}$$

$$X_3 = Y_3 = -F_3 \cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X_4 = 0, \quad Y_4 = -F_4 = -1$$

$$X_R = \sum X_i = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.89$$

$$Y_R = \sum Y_i = \frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \approx 1.525$$

$$\vec{F}_R = \frac{3\sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$F_R = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} - 2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

9. Ravnoteža sučeljnog sistema sila. Poligon sila. Analitički uslovi ravnoteže.

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

Ravanski sistem

$$\Rightarrow \quad \sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0$$

Prostorni sistem

$$\left(\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0\right)$$

Primer 4.3

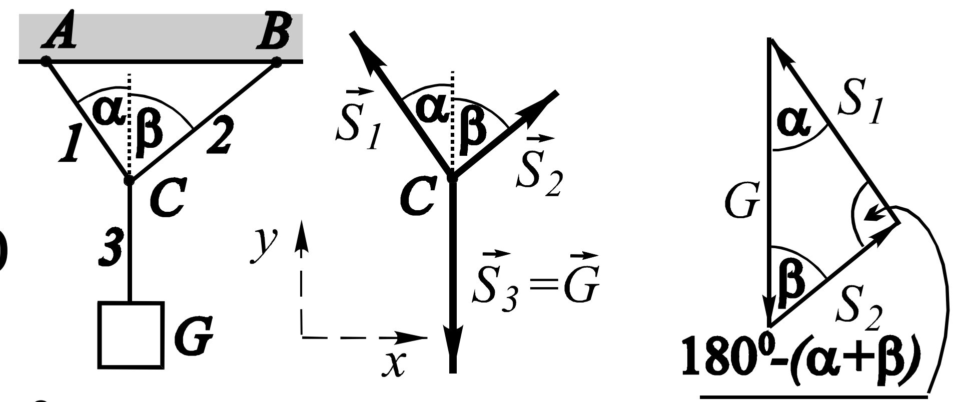
Poznate veličine: α, β, G

Odrediti: $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$

***Prvi način: uslovi ravnoteže*, Sl.2)**

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow -\boldsymbol{S_1} \sin\alpha + \boldsymbol{S_2} \sin\beta = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S_1} \cos\alpha + \boldsymbol{S_2} \cos\beta - G = 0$$



1) 2) 3)

Množenjem prve od ovih jednačina sa $\cos\alpha$, druge sa $\sin\alpha$, pa sabiranjem

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_2}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - G\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S_2} = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad \boldsymbol{S_1} = \frac{G\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\sin\left[180^0 - (\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta)$$

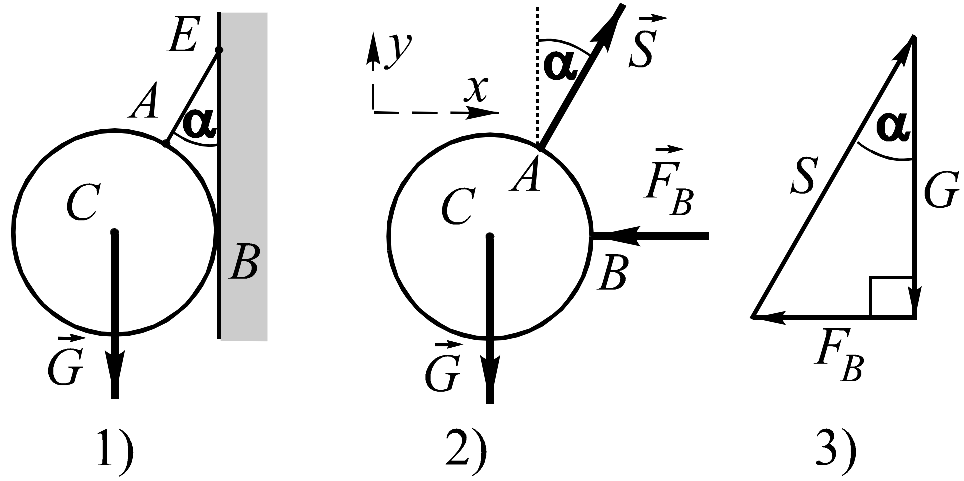
***Drugi način: poligon sila*, Sl.3)**

$$\frac{G}{\sin\left[180^0 - (\alpha+\beta)\right]} = \frac{\boldsymbol{S_1}}{\sin\beta} = \frac{\boldsymbol{S_2}}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

Primer 4.4

Poznate veličine: α, G

Odrediti: $\vec{S}$, $\vec{F}_B$



***Prvi način: poligon sila,* Sl.3)**

$$\tan\alpha = \frac{\boldsymbol{F_B}}{G} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F_B} = G\tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{G}{\boldsymbol{S}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S} = \frac{G}{\cos\alpha}$$

Drugi način: uslovi ravnoteže

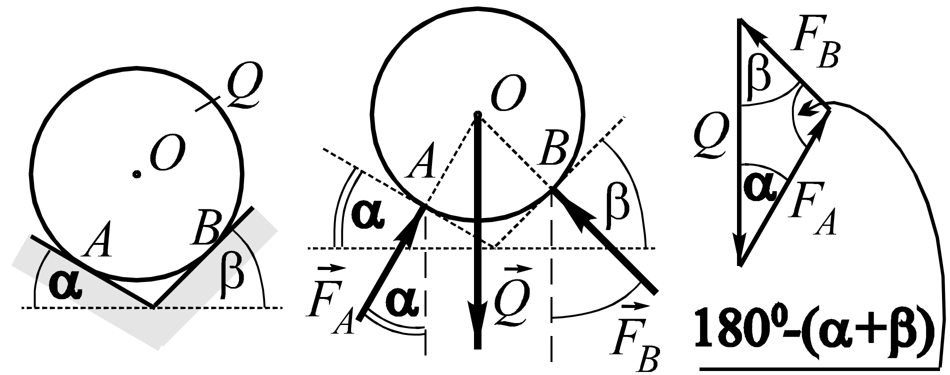
$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S}\cos\alpha - G = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S} = \frac{G}{\cos\alpha}$$

$$\sum X_i = S\sin\alpha - \boldsymbol{F_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F_B} = G\tan\alpha$$

Primer 4.5

Poznate veličine: α, β, Q

Odrediti: $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$



1) 2) 3)

***Prvi način: poligon sila,* Sl.3)**

Primena sinusne teoreme na trougao sila

$$\frac{Q}{\sin\left[180^0-(\alpha+\beta)\right]}=\frac{\boldsymbol{F_A}}{\sin\beta}=\frac{\boldsymbol{F_B}}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_A}=\frac{Q\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\quad \boldsymbol{F_B}=\frac{Q\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Drugi način: uslovi ravnoteže

$$\sum X_i=0\Rightarrow \boldsymbol{F}_A\sin\alpha-\boldsymbol{F}_B\sin\beta=0 \qquad \Big|\cdot\cos\beta$$

$$\sum Y_i=0\Rightarrow \boldsymbol{F}_A\cos\alpha+\boldsymbol{F}_B\cos\beta-Q=0 \qquad \Big|\cdot\sin\beta$$

Nakon naznačenog množenja ovih jednačina pa sabiranja i korišćenja identiteta

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

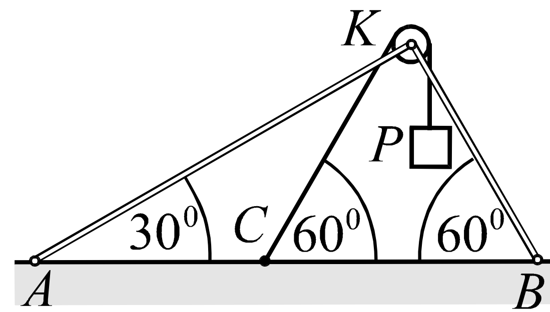
dobija se $\quad \boldsymbol{F}_A(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-Q\sin\beta=0\Rightarrow \boldsymbol{F}_A=\dfrac{Q\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

zatim se na osnovu prve jednačine dobija $\quad \boldsymbol{F}_B=\dfrac{\boldsymbol{F}_A\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{Q\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

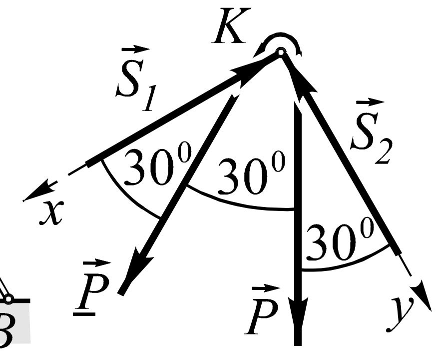
Primer 4.6

Poznata veličina: P

Odrediti: S_1, S_2



1)



2)

***Uslovi ravnoteže,* Sl. 2)**

$$\sum X_i = -\boldsymbol{S_1} + P\cos 30^0 + P\cos 60^0 = 0$$

$$\sum Y_i = -\boldsymbol{S_2} + P\cos 30^0 + P\cos 60^0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S_1} = +\frac{\sqrt{3}+1}{2}P, \quad \boldsymbol{S_2} = +\frac{\sqrt{3}+1}{2}P$$

Za reakcije lakih štapova usvojeni su smerovi koji su u skladu sa pretpostavkom da su oba laka štapa pritisnuta.

Predznaci “+” u dobijenim rešenjima ukazuju na to da su laki štapovi opterećeni baš kao što je i pretpostavljeno, to znači da su oba pritisnuta.

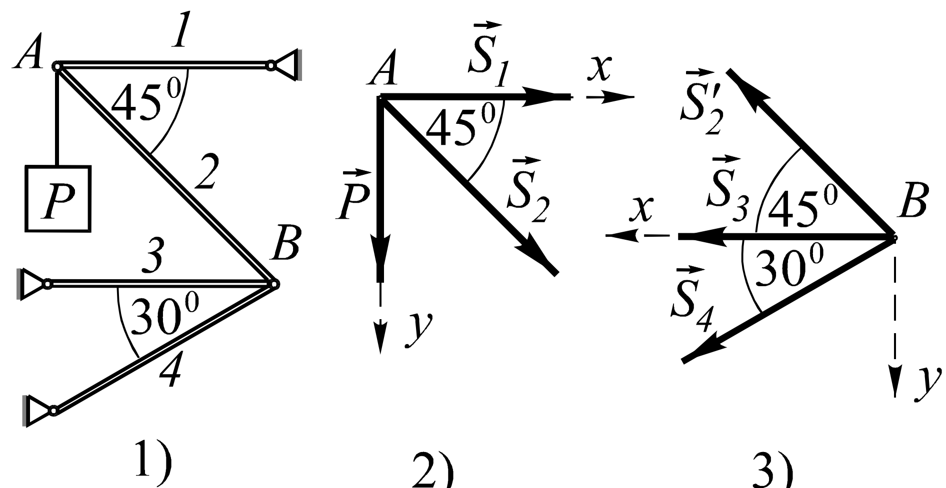
Intenzitet sile u lakom štapu uvek je jednak vrednosti koja stoji iza predznaka.

Da su drugačije usvojeni smerovi za sile u lakim štapovima (što bi odgovaralo pretpostavci da su laki štapovi zategnuti) rezultati bi se u odnosu na dobijene razlikovali samo u predznacima, ali bi zaključci, u vezi intenziteta sila i karaktera opterećenja, ostali isti.

Primer 4.7

Poznata veličina: P

Odrediti: S_1, S_2, S_3, S_4



***Uslovi ravnoteže tačke A*, Sl. 2)**

$$\sum Y_i = \boldsymbol{S_2} \sin 45^0 + P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_2} = -\sqrt{2}P$$

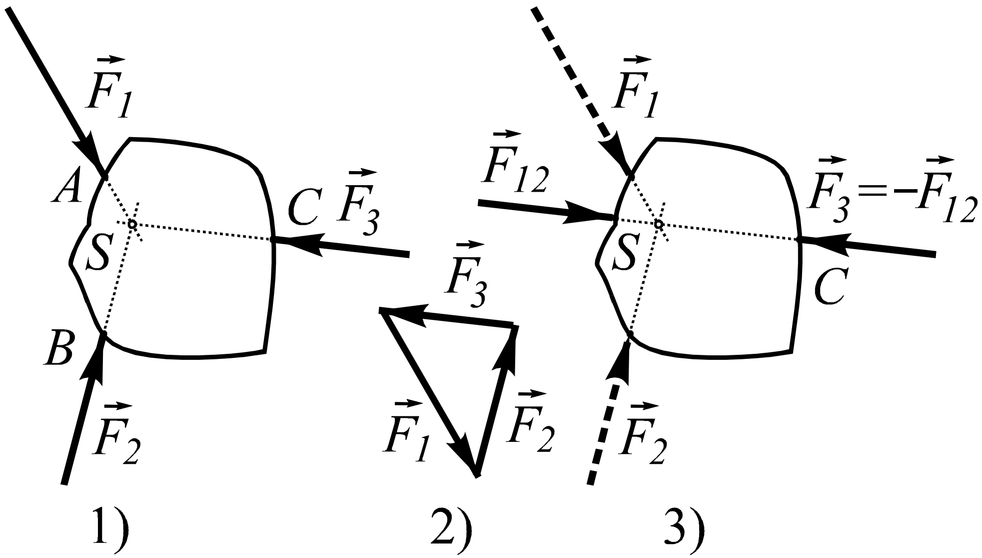
$$\sum X_i = S_2 \cos 45^0 + \boldsymbol{S_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_1} = P$$

***Uslovi ravnoteže tačke B*, Sl. 3)**

$$\sum Y_i = \boldsymbol{S_4} \sin 30^0 - S_2 \sin 45^0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{S_4} = -2P$$

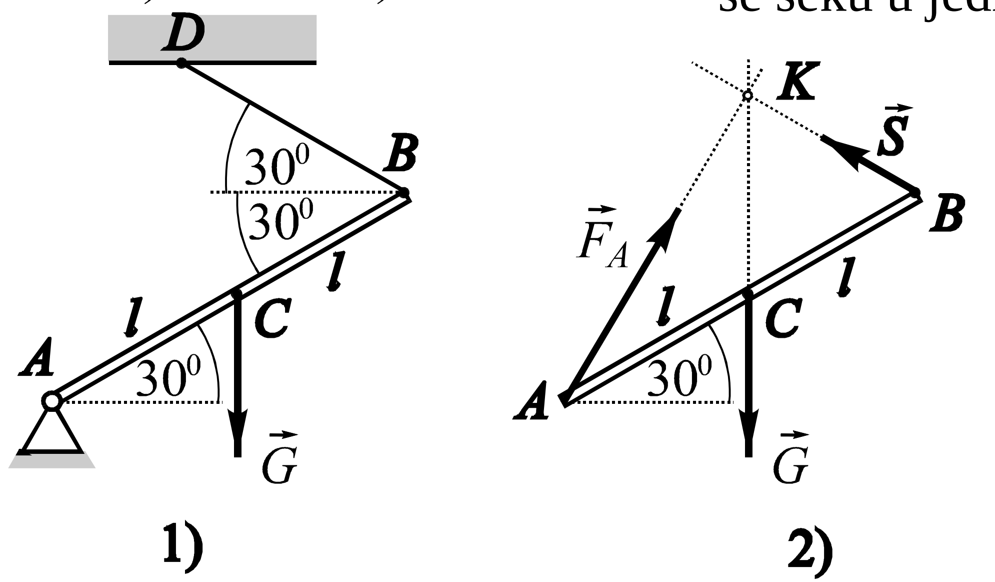
$$\sum X_i = S_2 \cos 45^0 + \boldsymbol{S_3} + S_4 \cos 30^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_3} = \left(1 + \sqrt{3}\right)P$$

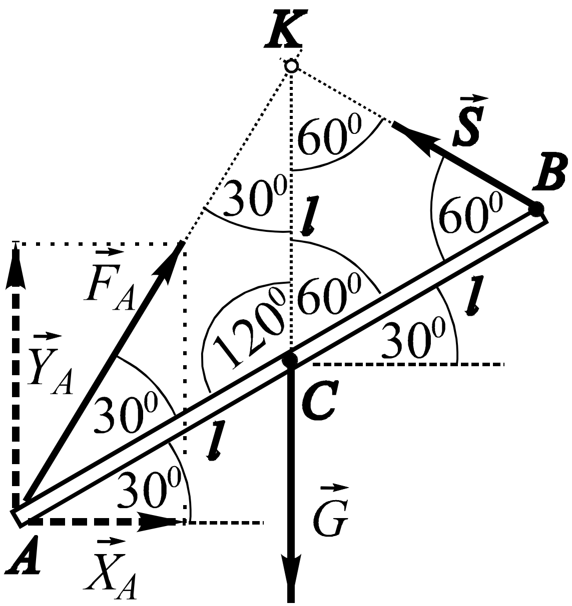
10. Teorema o tri neparalelne sile



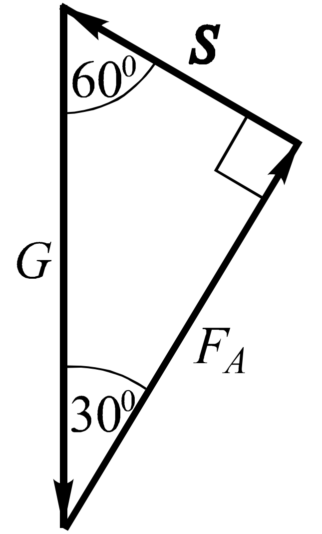
Da bi telo na koje dejstvuju tri neparalelne ravanske sile bilo u ravnoteži moraju sile biti sučeljne i moraju biti zadovoljeni uslovi ravnoteže koji važe za ravanski sučeljni sistem sila. Prvi deo teoreme, prema kojem te sile moraju biti sučeljne, znači da napadne linije svih triju sila moraju da se seku u jednoj tački.

Primer 4.11





1)



2)

Redosled geometrijske analize:

-uoči se trougao *BKC* kome su svi unutrašnji uglovi jednaki (po 60^0), zbog čega je taj trougao jednakostraničan, pa je $\overline{KC} = \overline{CB} = l$

-uoči se trougao *AKC* kome je $\overline{KC} = \overline{CA} = l$

-unutrašnji ugao kod temena *C*, trougla *AKC*, je 120^0, zbog čega su unutrašnji uglovi kod temena *A* i *K*, istog trougla, po 30^0.

Trougao sila, Sl. 2, daje

$$F_A = G\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}G,\ \ S = G\cos 60^0 = \frac{1}{2}G$$

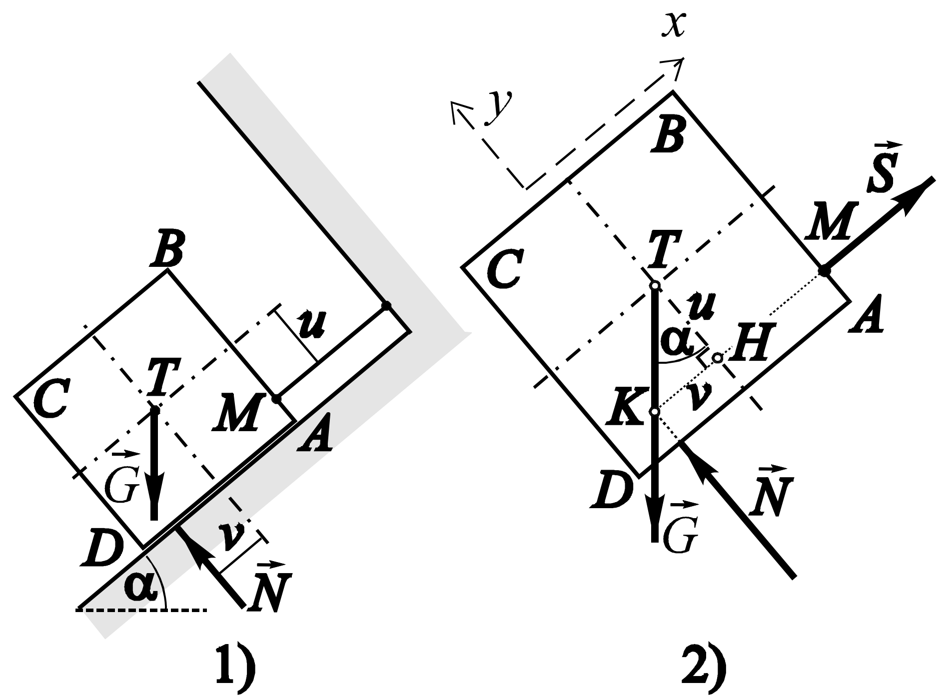
Komponenata reakcije $\vec{F}_A$

$$X_A = F_A \cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}G \qquad Y_A = F_A \cos 30^0 = \frac{3}{4}G$$

Primer 4.12

Poznate veličine: G, α, u

Odrediti reakcije veza kao i mesto reakcije strme ravni (rastojanje v)?



Iz trougla TKH dobija se v:

$$\tan\alpha = \frac{\boldsymbol{v}}{u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = u\tan\alpha$$

Uslovi ravnoteže:

$$\sum X_i = \boldsymbol{S} - G\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S} = G\sin\alpha$$

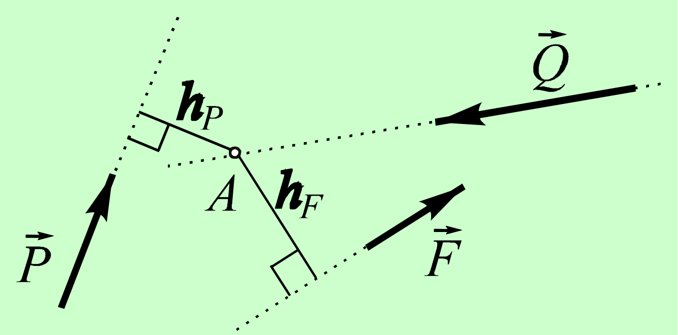
$$\sum Y_i = \boldsymbol{N} - G\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N} = G\cos\alpha$$

11. O terminu moment sile za tačku kod ravanskih problema

Termin “moment sile za tačku” koji se koristi kod ravanskih problema ekvivalentan je terminu “moment sile za osu” koja prolazi kroz momentnu tačku a upravna je na ravan i usmerena ka posmatraču.

Dakle, moment sile za neku tačku kod ravanskih problema jednak je proizvodu intenziteta sile i kraka sile za posmatranu tačku, s tim što je predznak “+” ako sila teži da obrne telo oko momentne tačke u suprotnom smeru od kazaljke na satu dok je predznak “-” ako sila teži da obrne telo oko momentne tačke u smeru kazaljke na satu.

To znači da se moment sile za tačku kod ravanskih problema tretira kao skalarna veličina koja predstavlja meru obrtnog dejstva sile oko momentne tačke. Krak sile predstavlja najkraće rastojanje između napadne linije sile i momentne tačke.

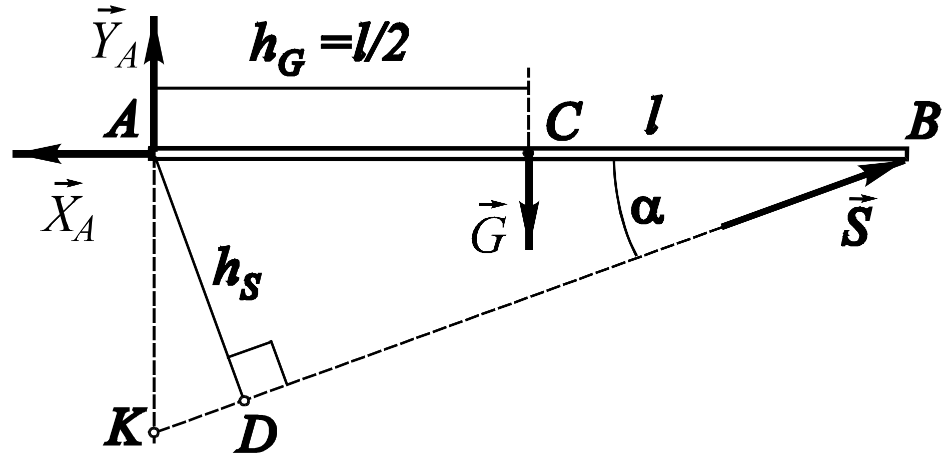


$$M_A^{\vec{F}} = +F \cdot h_F, \; M_A^{\vec{P}} = -P \cdot h_P, \; M_A^{\vec{Q}} = 0$$

Na slici, kraci sila $\vec{F}$ i $\vec{P}$ za tačku A su označeni sa h_F i h_P, dok je, očigledno, krak sile $\vec{Q}$, čija napadna tačka prolazi kroz tačku A, jednak nuli.

Primer 5.1

Odrediti momente svih sila za prikazane tačke *A*, *B* i *K* ?



$$M_A^{\vec{S}} = S \cdot l \sin\alpha, \quad M_A^{\vec{G}} = -G \cdot \frac{l}{2}$$

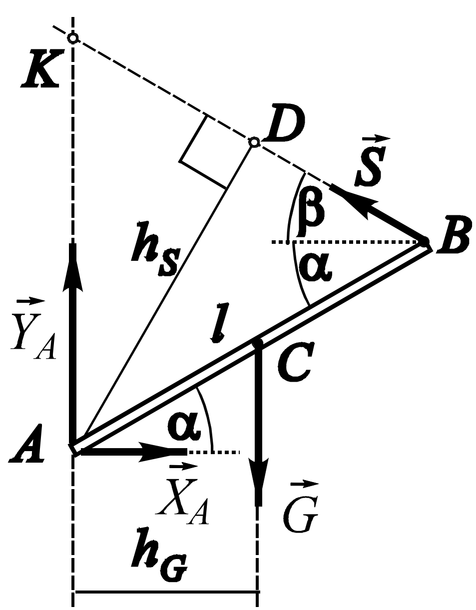
$$M_A^{\vec{X}_A} = M_A^{\vec{Y}_A} = M_B^{\vec{X}_A} = M_B^{\vec{S}} = M_K^{\vec{Y}_A} = M_K^{\vec{S}} = 0$$

$$M_B^{\vec{Y}_A} = -Y_A \cdot l, \quad M_B^{\vec{G}} = G \cdot \frac{l}{2}$$

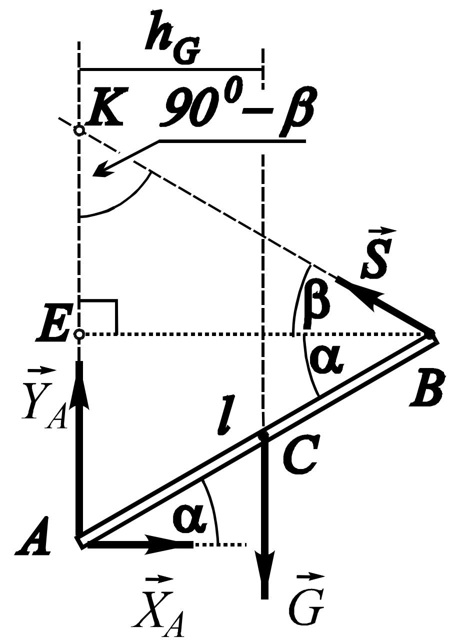
$$M_K^{\vec{X}_A} = X_A \cdot l \tan\alpha, \quad M_K^{\vec{G}} = -G \cdot \frac{l}{2}$$

Primer 5.2

Odrediti momente svih sila za tačke A i K ?



1)



2)

$$M_A^{\vec{S}} = S \cdot l \sin(\alpha+\beta), \quad M_A^{\vec{G}} = -G \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$M_K^{\vec{X}_A} = X_A \cdot \overline{AK}, \quad M_K^{\vec{G}} = -G \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$\overline{AK} = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90^0-\beta)} = \frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

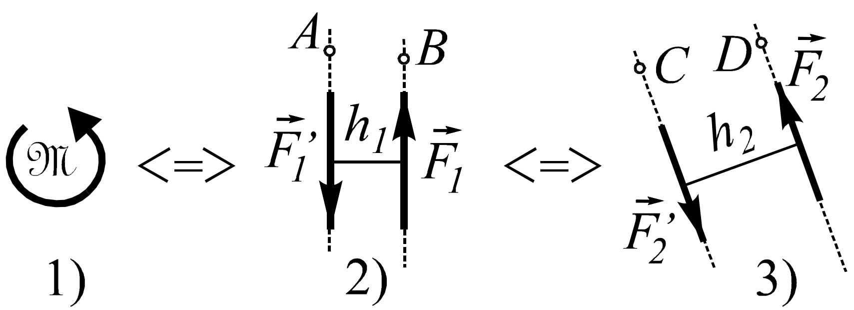
$$\overline{AK} = \overline{AE} + \overline{EK} = l\sin\alpha + \overline{EB}\tan\beta$$

$$\Rightarrow \overline{AK} = l\sin\alpha + l\cos\alpha\tan\beta$$

Preostali traženi momenti jednaki su nuli, zbog prolaska napadnih linija sila kroz momentne tačke, dakle:

$$M_A^{\vec{X}_A} = M_A^{\vec{Y}_A} = M_K^{\vec{Y}_A} = M_K^{\vec{S}} = 0$$

12. Izražavanje sprega preko momenta sile za tačku (ravanski problemi).



Spreg se kod ravanskih problema može izraziti preko momenta sile za tačku

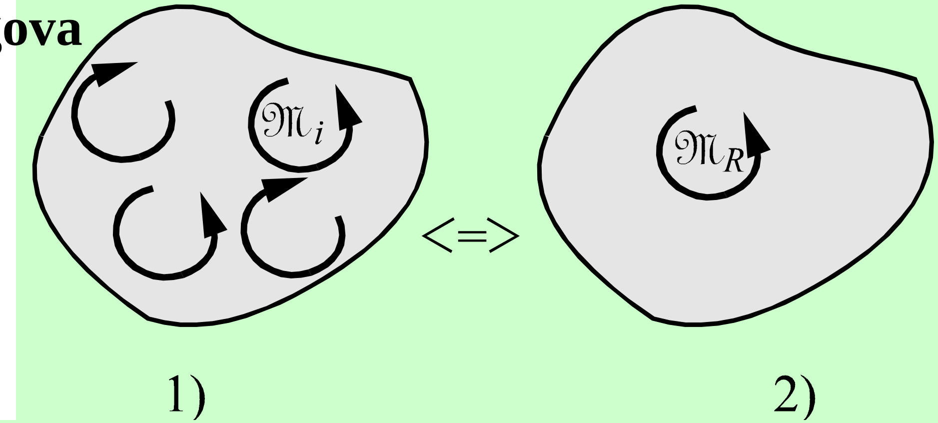
$$\mathfrak{M} = F_1 \cdot h_1 = M_A^{\vec{F}_1} = M_B^{\vec{F}_1'}$$

$$\mathfrak{M} = F_2 \cdot h_2 = M_C^{\vec{F}_2} = M_D^{\vec{F}_2'}$$

I ovde, jedini uslov koji moraju da zadovolje tačke *A*, *B*, *C* i *D* je da se nalaze na proizvoljnim mestima napadnih linija sila: $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_2$.

13. Ravanski sistem spregova, njegova rezultanta i uslov ravnoteže.

U ravanskim problemima, vektori svih spregova su međusobno paraleni, a upravni na ravan, i obično se ne prikazuju. Pogodno je i praktično da se sa spregovima, u takvim slučajevima, operiše kao sa skalarnim veličinama.



Proizvoljan ravanski sistem spregova i njihov rezultujući spreg

Za spreg čiji je smer suprotan od smera kazaljke na satu, pri algebarskom sabiranju spregova, najčešće će se koristiti predznak "+" dok će se za spreg sa smerom kazaljke na satu, koristiti predznak "-".

Ravanskim sistemima spregova takođe se smatraju i takvi sistemi spregova kod kojih spregovi leže u međusobno paralelnim ravnima.

Ravanski sistem spregova ima jednostavnije ekvivalentno dejstvo koje čini jedan, rezultujući, spreg: $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M}_R = \sum \mathfrak{M}_i$

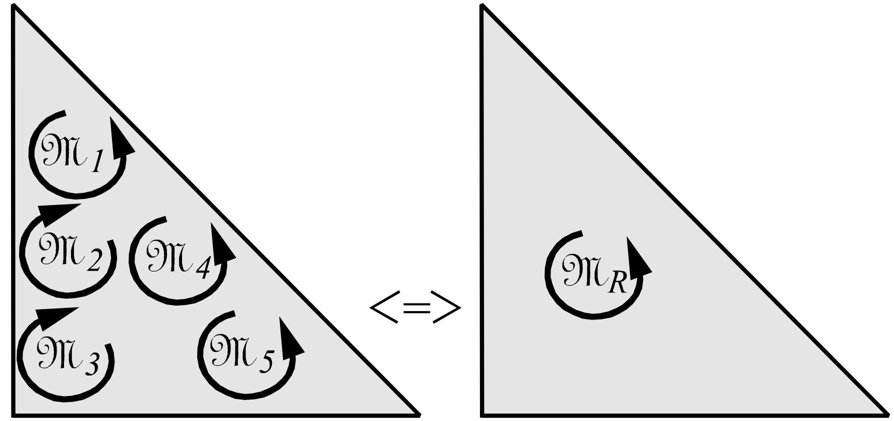
Telo na koje dejstvuje proizvoljan sistem ravanskih spregova biće u ravnoteži ako je rezultujući spreg jednak nuli. To znači da analitički uslov ravnoteže takvog sistema glasi: $\sum \mathfrak{M}_i = 0$

Primer 5.6

Zadato: $\mathfrak{M}_1 = 1\,kNm,\ \mathfrak{M}_2 = 2\,kNm,$

$\mathfrak{M}_3 = 1\,kNm,\ \mathfrak{M}_4 = 3\,kNm,\ \mathfrak{M}_5 = 2\,kNm.$

Odrediti rezultujući spreg?

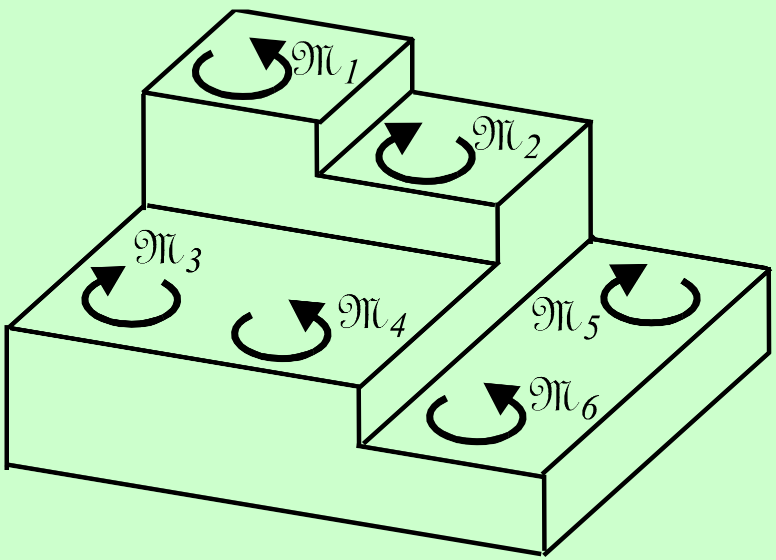


1) 2)

$$\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_5 = 3\ \mathrm{kNm}$$

Primer 5.7

(Primer ravnoteže spregova)



Zadato: $\mathfrak{M}_1 = 1\,kNm,\ \mathfrak{M}_2 = 2\,kNm,$

$\mathfrak{M}_3 = 3\,kNm,\ \mathfrak{M}_4 = 2\,kNm,\ \mathfrak{M}_5 = 1\,kNm.$

Odrediti M_6 ?

Uslov ravnoteže:

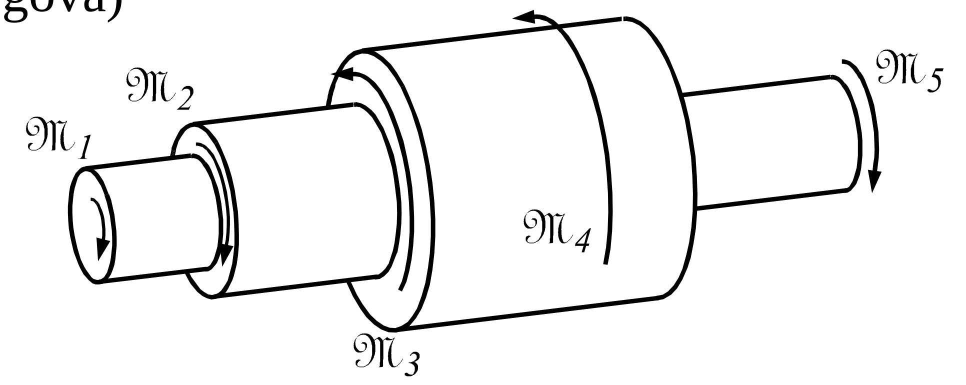
$$\sum \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 - \mathfrak{M}_5 + \mathfrak{M}_6 = 0$$

Rešenje je:

$$\mathfrak{M}_6 = -\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_4 + \mathfrak{M}_5 = 3\mathrm{kNm}$$

Primer 5.8 (Primer ravnoteže spregova)

Na vratilo, koje je čest element mašina, dejstvuje uravnotežen sistem spregova. Iz dinamike je poznato da je pri ustaljenom obrtanju vratila (kada ono niti ubrzava niti usporava) sistem spregova koji na njega dejstvuje takođe uravnotežen, kao što bi bio u slučaju njegovog mirovanja.



Zadato: $\mathfrak{M}_1 = 100\ Nm$, $\mathfrak{M}_2 = 200\ Nm$,

$\mathfrak{M}_3 = 300\ Nm$, $\mathfrak{M}_4 = 200\ kNm$.

Odrediti: $\mathfrak{M}_5$?

Uslov ravnoteže:

$$\sum \mathfrak{M}_i = -\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 - \mathfrak{M}_5 = 0$$

Traženo rešenje:

$$\mathfrak{M}_5 = -\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 = 200\,\mathrm{Nm}$$

14. Moment sprega za tačku (ravanski problemi).

Za obrtno dejstvo sprega u odnosu na tačku koristićemo termin “moment sprega za tačku”.

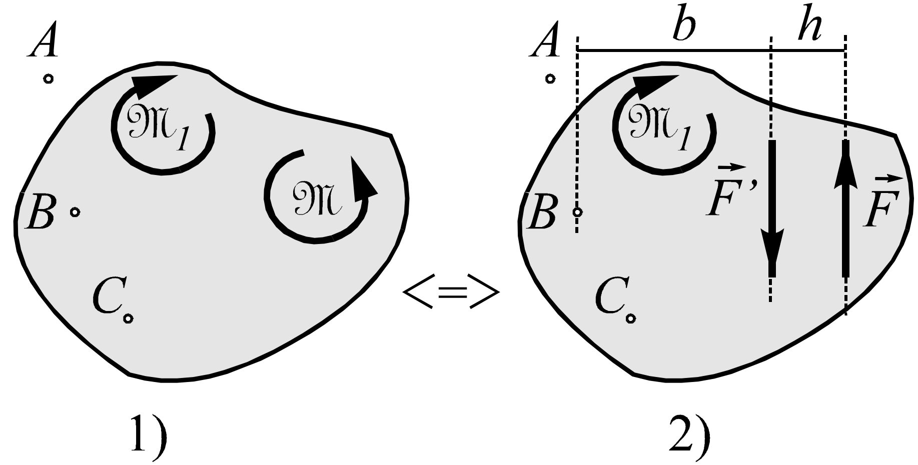
Činjenica je da je, u ravanskim problemima, moment nekog sprega $\mathfrak{M}$ za svaku tačku isti i iznosi $+\mathfrak{M}$ ili $-\mathfrak{M}$. Predznak je “+”, ako spreg teži da obrne telo u suprotnom smeru od kazaljke na satu dok je predznak “-”, ako spreg teži da obrne telo u smeru kazaljke na satu.

$$M_A^{\mathfrak{M}} = M_B^{\mathfrak{M}} = M_C^{\mathfrak{M}} = +\mathfrak{M}$$

$$M_A^{\mathfrak{M}_1} = M_B^{\mathfrak{M}_1} = M_C^{\mathfrak{M}_1} = -\mathfrak{M}_1$$

Dokaz:

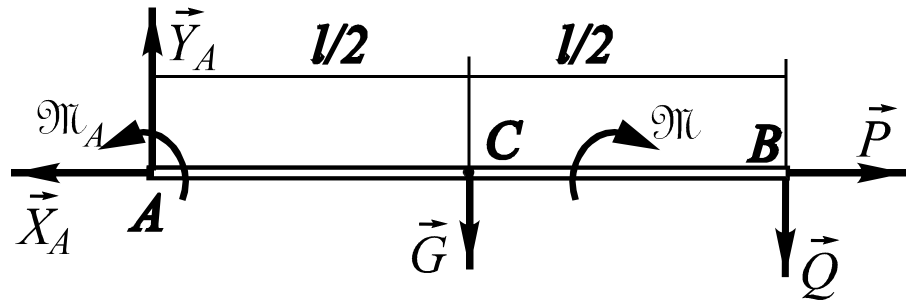
$$M_B^{\mathfrak{M}} = M_B^{\vec{F}} + M_B^{\vec{F}'} = F(b+h) - Fb =$$
$$= Fh = +\mathfrak{M}$$



Moment sprega za ma koju tačku kod ravanskih problema jednak je samom spregu

Primer 5.10

Za sistem sila i spregova prikazan na slici odrediti momenate svih sila i spregova za tačke *A* i *B*?



$$M_A^{\mathfrak{M}_A} = M_B^{\mathfrak{M}_A} = +\mathfrak{M}_A,\ M_A^{\mathfrak{M}} = M_B^{\mathfrak{M}} = -\mathfrak{M}$$

$$M_A^{\vec{G}} = -G \cdot l/2,\ M_A^{\vec{Q}} = -Q \cdot l$$

$$M_B^{\vec{G}} = G \cdot l/2,\ M_B^{\vec{Y}_A} = -Y_A \cdot l$$

Preostali traženi momenti sila jednaki su nuli.