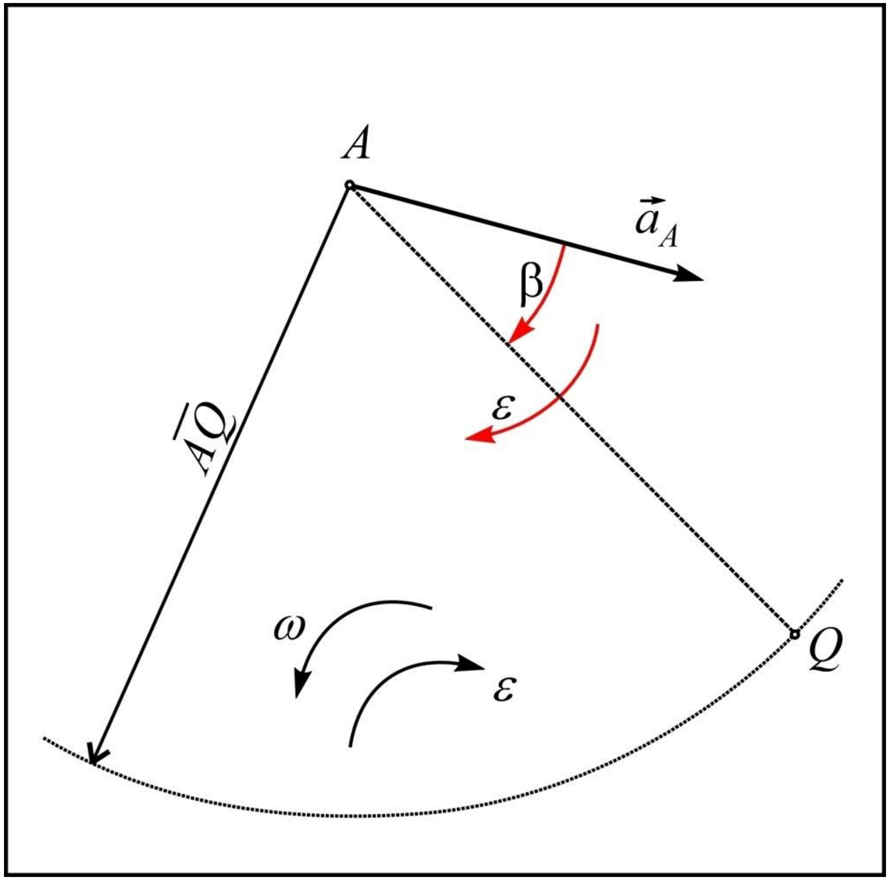
Trenutni pol ubrzanja.

Poznato je ubrzanje jedne tačke tela u potpunosti (na primer, tačke A, $\vec{a}_A$, zna mu se pravac, smer i inenzitet) a takođe i ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje ε tela u datom trenutku. Treba odrediti mesto tačke tela Q čije ubrzanje iznosi nula. Ta tačka Q je ***trenutni pol ubrzanja.***



Položaj tačke Q u odnosu na tačku A i vektor $\vec{a}_A$ određuju ugao β i rastojanje $\overline{AQ}$. Tačnije, ako bi se vektor $\vec{a}_A$ obrnuo oko tačke A u smeru ugaonog ubrzanja ε bio bi usmeren tačno prema tački Q, koja je od tačke A na rastojanju $\overline{AQ}$.

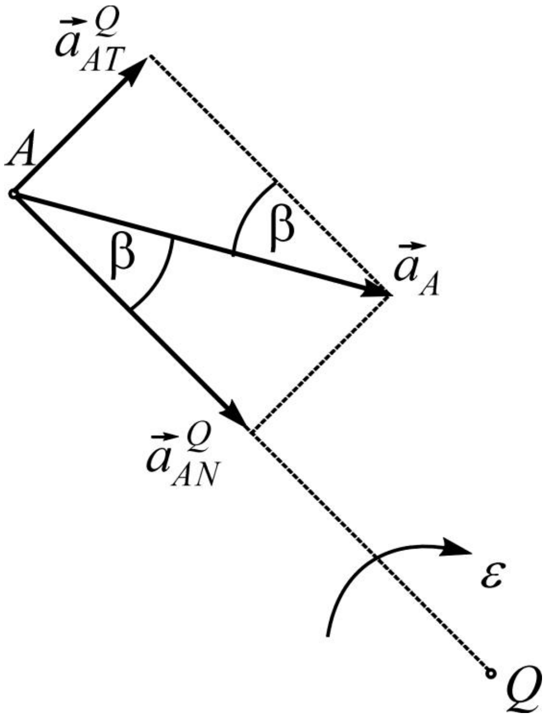
Određivanje rastojanja $\overline{AQ}$**:**

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AN}^Q + \vec{a}_{AT}^Q, \quad \vec{a}_Q = \vec{0}, \quad a_{AN}^Q = \overline{AQ} \cdot \omega^2, \quad a_{AT}^Q = \overline{AQ} \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_{AT}^Q\right)^2 + \left(a_{AN}^Q\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{AQ} \cdot \varepsilon\right)^2 + \left(\overline{AQ} \cdot \omega^2\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{AQ}\right)^2 \cdot \left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)} \quad \Rightarrow$$

$$a_A = \overline{AQ} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad \Rightarrow \qquad \overline{AQ} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Određivanje ugla β:

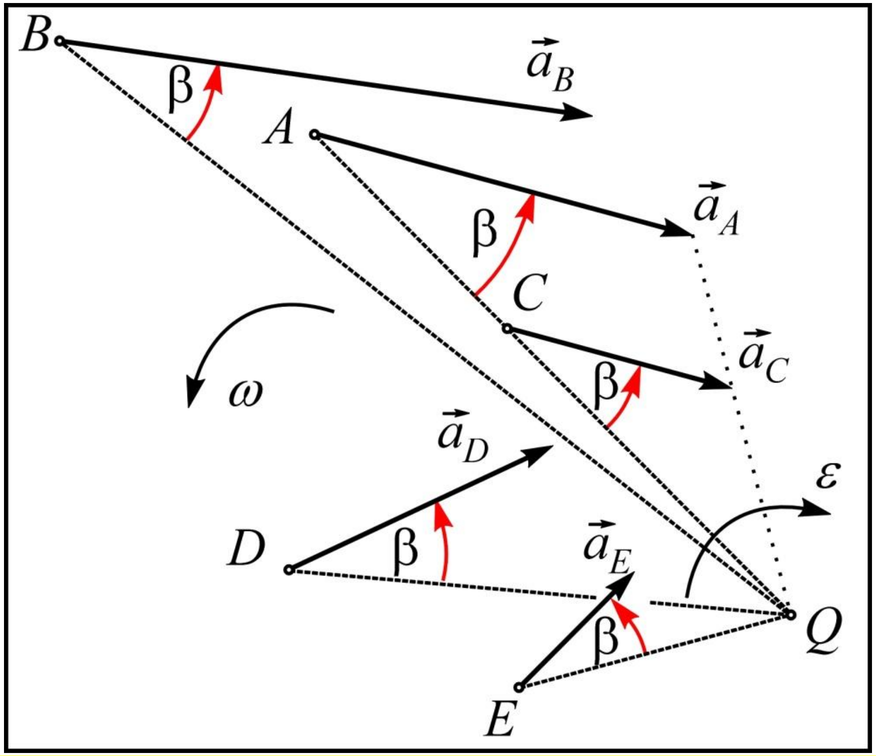


Na osnovu trouglova sa slike imamo da je:

$$\tan\beta = \frac{a_{AT}^{Q}}{a_{AN}^{Q}} = \frac{\overline{AQ}\cdot\varepsilon}{\overline{AQ}\cdot\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arctan\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Određivanje ubrzanja ma koje tačke tela kada mu se zna položaj tačke Q, ω i ε (samim tim i β):

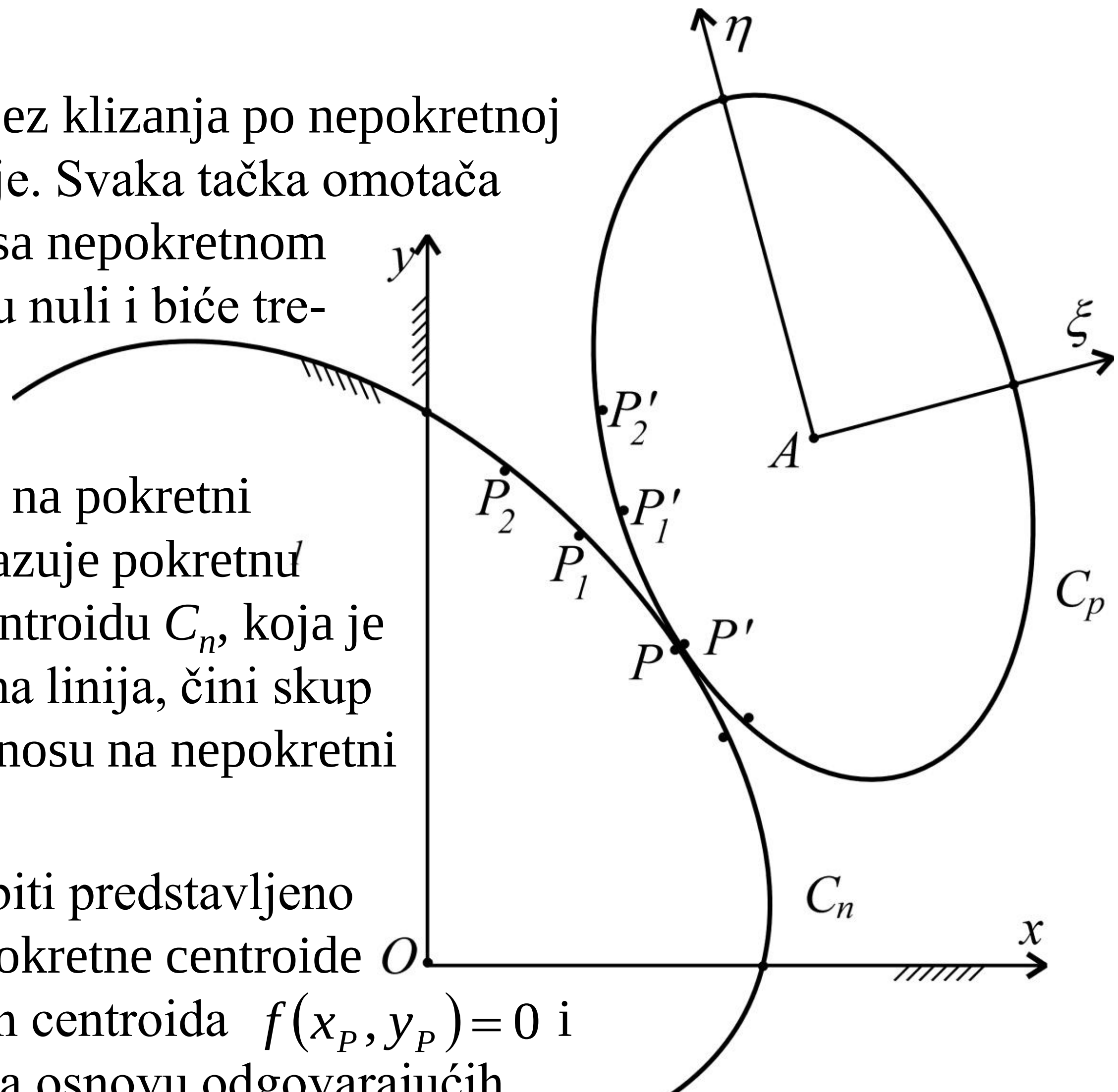


Pravac i smer vektora ubrzanja neke tačke tela dobijaju se okretanjem za ugao β vektora koji spaja tu tačku sa tačkom *Q* oko te tačke. Intenzitete vektora ubrzanja tačaka određuju izrazi:

$$a_B = \overline{BQ}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\ a_C = \overline{CQ}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},...$$

20. Centroide. Primer.

Telo koje se u ravni kotrlja bez klizanja po nepokretnoj liniji vrši opšte ravno kretanje. Svaka tačka omotača tog tela u trenutku kontakta sa nepokretnom linijom imaće brzinu jednaku nuli i biće trenutni pol brzine. Omotač tog tela čini skup trenutnih polova brzine koji, u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\eta A \xi$, obrazuje pokretnu centroidu C_p. Nepokretnu centroidu C_n, koja je zapravo pomenuta nepokretna linija, čini skup trenutnih polova brzine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem yOx.

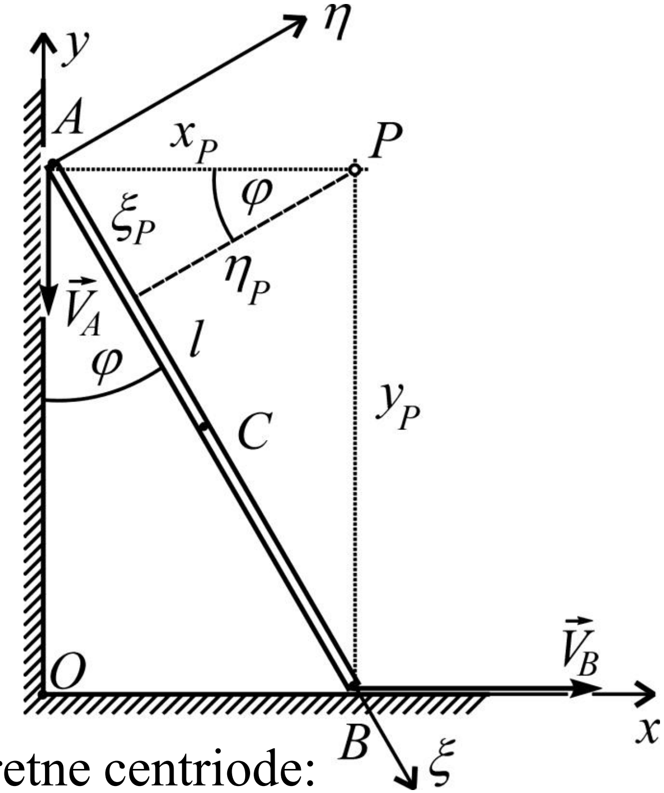


Svako ravno kretanje može biti predstavljeno kao kotrljanje bez klizanja pokretne centroide po nepokretnoj. Jednačine tih centroida $f(x_P, y_P) = 0$ i $g(\xi_P, \eta_P) = 0$ dobijaju se na osnovu odgovarajućih parametarskih jednačina tačke P u nepokretnom i pokretnom koordinatnom sistemu eliminacijom parametra iz tih jednačina.

U parametarskim jednačinama oblika $x_P = x_P(\varphi)$, $y_P = y_P(\varphi)$, $\xi_P = \xi_P(\varphi)$, $\eta_P = \eta_P(\varphi)$, parametar je φ.

Ukoliko bismo kruto telo koje vrši ravno kretanje kruto spojili sa pokretnom centroidom, kotrljanjem bez klizanja pokretne centroide po nepokretnoj telo bi prolazilo kroz potpuno iste položaje kao i kod njegovog originalnog kretanja.

Primer 2.17 Za primer ravnog kretanja, gde tačka *A* štapa *AB*, dužine *l*, klizi po vertikalnom zidu a njegova tačka *B*, klizi po horizontalnom podu, odrediti nepokretnu i pokretnu centroidu?



Nepokretna centroida:

Parametarske jednačine nepokretne centriode:

$x_P(\varphi) = l \cdot \sin\varphi$, $y_P(\varphi) = l \cdot \cos\varphi$.

Eliminacija parametra φ:

$x_P{}^2 + y_P{}^2 = l^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \Rightarrow x_P{}^2 + y_P{}^2 = l^2.$

Korišćena jednakost: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$

Pokretna centroida: Parametarske jednačine pokretne centriode:

$\xi_P(\varphi) = x_P(\varphi) \cdot \sin\varphi = l \cdot \sin^2\varphi$, $\eta_P(\varphi) = x_P(\varphi) \cdot \cos\varphi = l \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$

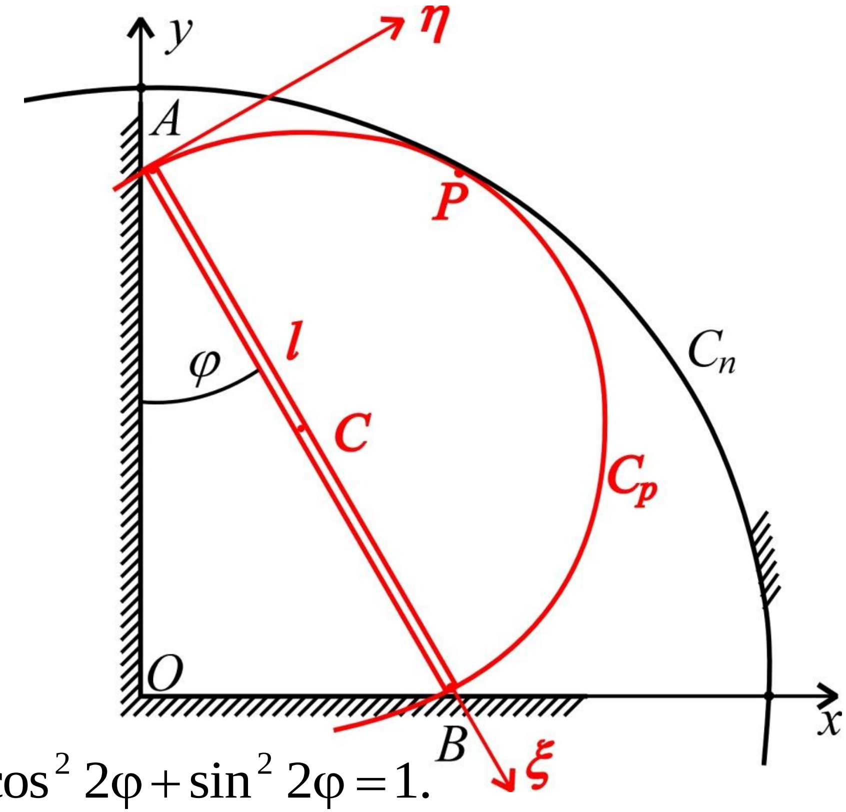
Eliminacija parametra φ:

$$\xi_P(\varphi)=\frac{l}{2}(1-\cos 2\varphi),\quad \eta_P(\varphi)=\frac{l}{2}\sin 2\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\xi_P-\frac{l}{2}=-\frac{l}{2}\cos 2\varphi,\quad \eta_P=\frac{l}{2}\sin 2\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\left(\xi_P-\frac{l}{2}\right)^2+\eta_P{}^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\left(\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\xi_P-\frac{l}{2}\right)^2+\eta_P{}^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$



Korišćene jednakosti:

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi),\quad \sin\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi,\ \cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi=1.$$

Izvođenje izraza za $\sin^2\varphi$ ***i*** $\cos^2\varphi$ ***preko*** $\cos 2\varphi$ ***, koje je poželjno znati:***

1) $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1,$ 2) $\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi.$

Sabiranjem jednačina 1) i 2), dobija se: $2\cos^2\varphi=1+\cos 2\varphi \quad \Rightarrow$

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi).$$

Oduzimanjem jednačina 1) i 2), dobija se: $2\sin^2\varphi=1-\cos 2\varphi \quad \Rightarrow$

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi).$$

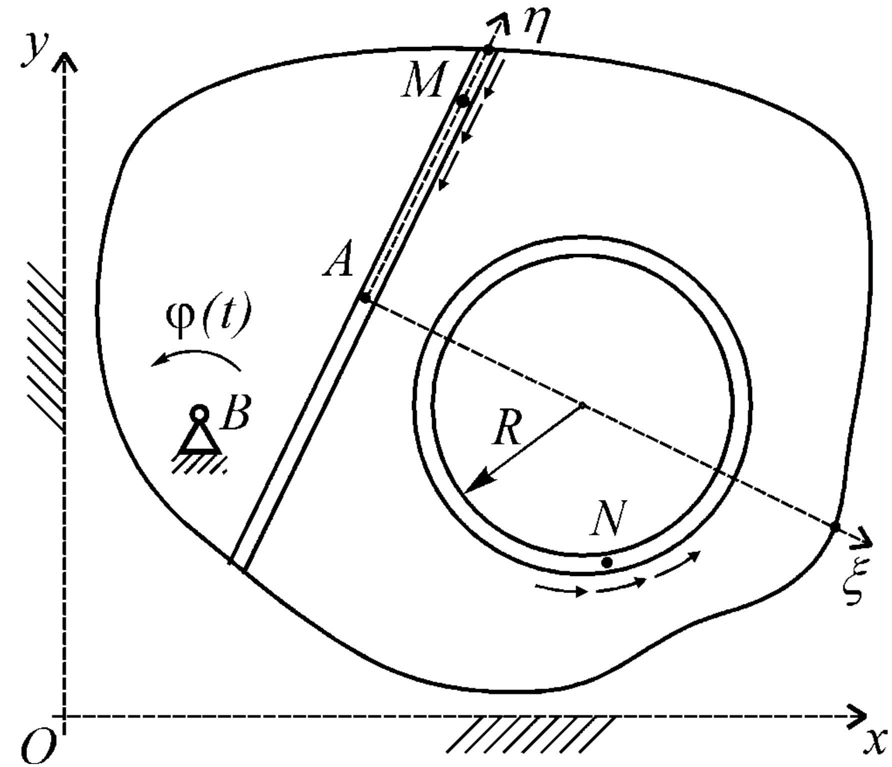
Složeno kretanje tačke. Prenosno kretanje. Relativno i apsolutno kretanje tačke koja vrši složeno kretanje.

Ima smisla govriti o složenom kretanju tačke onda, kada postoji kretanje tela, a takođe postoji, kretanje tačke u odnosu na to telo. To pokretno telo u odnosu na koje se kreće tačka zvaćemo prenosni element, a njegovo kretanje zvaćemo prenosno kretanje. U problemima kakve proučavamo u ovom kursu, prenosno kretanje je najčešće ili obrtanje oko nepomične ose ili translatorno ili opšte ravno, zbog čega se dobro mora znati kinematika ovakvih vrsta kretanja tela.

Kretanje tačke, koja vrši složeno kretanje, u odnosu na prenosni element naziva se relativnim kretanjem. Shodno tome, koristićemo se pojmovima: relativna putanja, relativna brzina i relativno ubrznje, koji suštinski predstavljaju: putanju, brzinu i ubrzanje, te tačke koja vrši složeno kretanje, u odnosu na prenosni element (to jest, odnosu na pokretni koordinatni sistem, koji je vezan za prenosni element).

Kretanje tačke, koja vrši složeno kretanje, u odnosu na okolinu koja, uslovno rečeno, miruje naziva se apsolutnim kretanjem. Shodno tome, koristićemo se pojmovima: apsolutna putanja, apsolutna brzina i apsolutno ubrznje, koji sušti-nski znače: putanju, brzinu i ubrzanje te tačke, koja vrši složeno kretanje, u odnosu na okolinu (to jest, odnosu na nepokretni koordinatni sistem, vezan za okolinu).

Na slici je prikazan prenosni element (ploča) koji vrši obrtanje oko nepomične ose, koja je upravna na ravan crteža i prolazi kroz tačku *B*. Sa prenosnim elementom se zajedno kreće i pokretni koordinatni sistem $\eta A \xi$, vezan za njega. Takođe je prikazan i nepokretni koordinatni sistem *yOx*, fiksiran za nepokretnu okolinu, kao i dve tačke koje vrše složeno kretanje, to su tačke *M* i *N*.

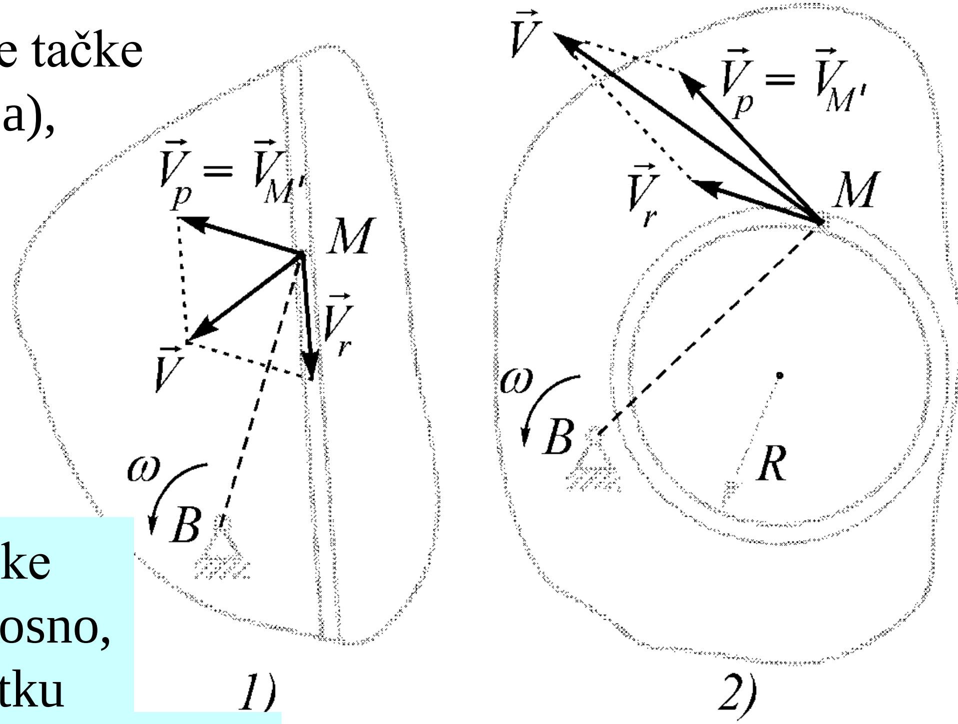


Relativno kretanje tačke *M* je pravolinijsko, s obzirom da se ona kreće po pravolinijskom žljebu urezanom u prenosni element. Relativno kretanje tačke *N* je kružno, s obzirom da se ta tačka kreće po kružnom žljebu urezanom u prenosni element. U problemima će biti jako važno primetiti da li je relativna putanja pravolinijska ili krivolinijska, jer od toga zavise važni podaci koji se tiču vektora relativne brzine i relativnog ubrzanja.

Vektori relativne, prenosne i apsolutne brzine i jednakost koja ih povezuje.

Prema teoriji, vektor apsolutne brzine tačke (označavaćemo ga sa $\vec{V}$, bez indeksa), koja vrši složeno kretanje, jednak je zbiru vektora njene prenosne brzine (označavaćemo je sa $\vec{V}_p$) i relativne brzine ($\vec{V}_r$), dakle

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r$$

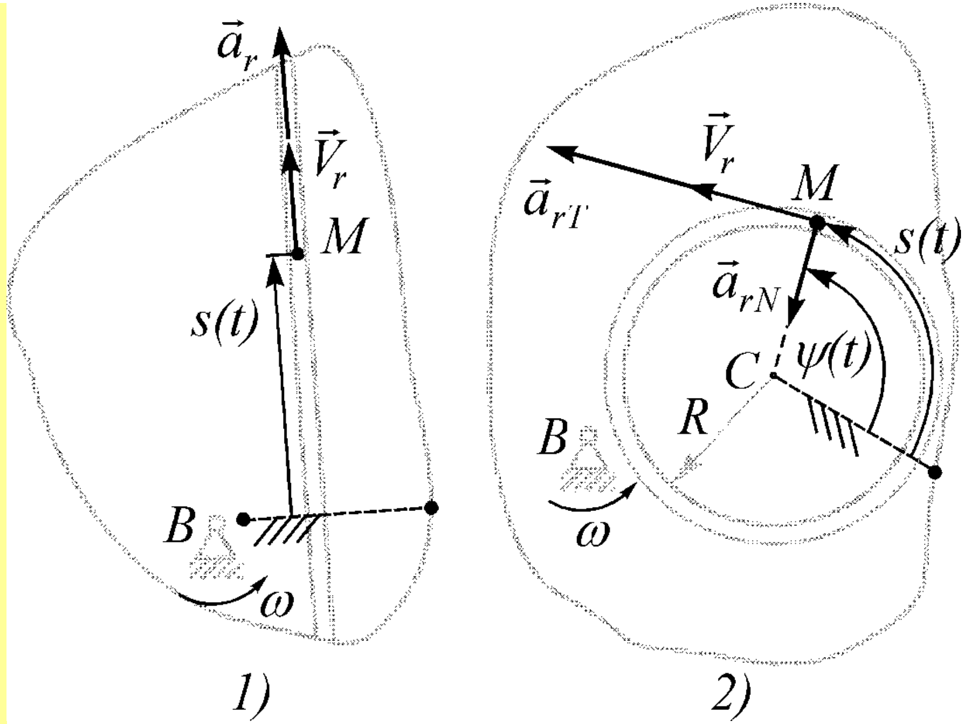


Prenosna brzina $\vec{V}_p$ je brzina one tačke prenosnog elementa na kojoj se (odnosno, nad kojom se), u posmatranom trenutku vremena, nalazi tačka koja vrši složeno kretanje.

Ako sa *M'* označimo tu tačku prenosnog elementa nad kojom se u posmatranom trenutku vremena nalazi tačka *M*, koja vrši složeno kretanje, onda je jasno da je vektor prenosne brzine jednak vektoru brzine tačke *M'*, dakle $\vec{V}_p = \vec{V}_{M'}$.

Pošto prenosni elementi na ovim slikama vrše obrtanja oko nepomičnih osa, pravci prenosnih brzina $\vec{V}_p = \vec{V}_{M'}$ su upravni na duži $\overline{BM}$, dok su im smerovi u skladu sa smerovima ugaonih brzina ω prenosnih elemenata.

Za relativnu brzinu je veoma važno primetiti da li je relativna putanja pravolinijska ili krivolinijska. Ako je pravolinijska, pravac vektora relativne brzine $\vec{V}_r$ mora biti isti kao i pravac pravolinijske relativne putanje (Sl.1). Ako je relativna putanja krivolinijska, pravac vektora relativne brzine $\vec{V}_r$ mora se poklopiti sa pravcem tangente na relativnu putanju (Sl.2).



Ako je zadata jednačina $s(t)$ pravolinijskog relativnog kretanja (Sl.1) intenzitet relativne brzine dobija se prvim izvodom relativne pravolinijske koordinate po vremenu, dakle $V_r = |\dot{s}|$. Vektor $\vec{V}_r$ je istog smera kao i porast koordinate s, ako je u tom trenutku $\dot{s} > 0$, dok je vektor $\vec{V}_r$ suprotnog smera u odnosu na smer porasta koordinate s, ako je u tom trenutku $\dot{s} < 0$.

Isto tako, ako je zadata jednačina $s(t)$ krivolinijskog relativnog kretanja (Sl.2), imamo da je $V_r = |\dot{s}|$, gde smer vektora $\vec{V}_r$, kao i kod relativne pravolinijske koordinate, zavisi od toga da li je, u tom trenutku, $\dot{s}$ pozitivno ili negativno.

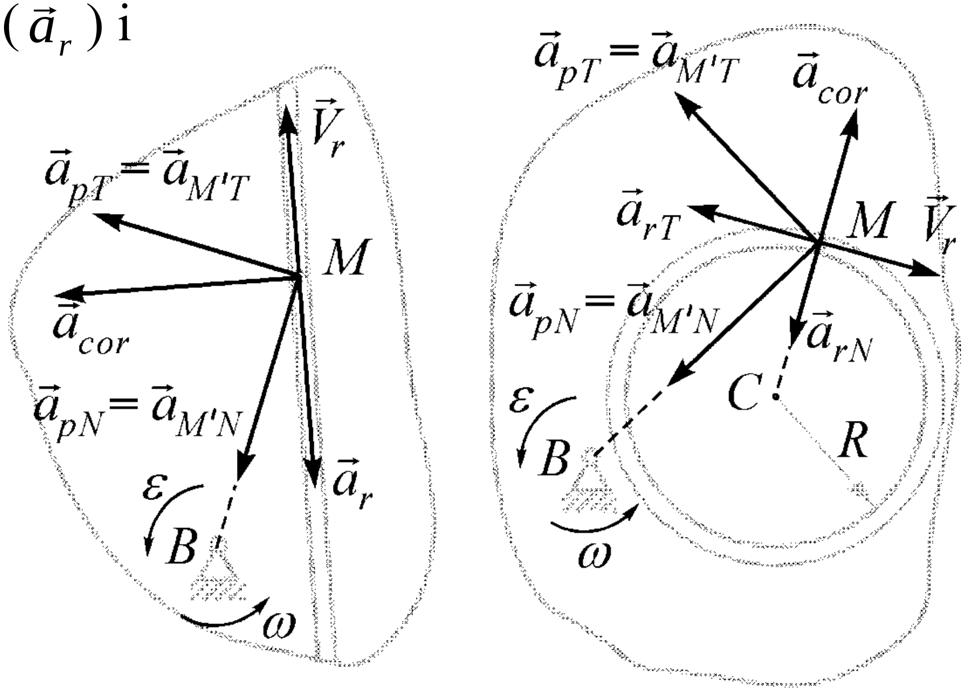
Ako se za kružno relativno kretanje ne zada koordinata $s(t)$ već odgovarajuća relativna ugaona koordinata $\psi(t)$, kao na slici 2 (prethodni slajd), gde s predstavlja dužinu kružnog luka nad uglom ψ, onda je pogodno iskoristiti formulu $s(t) = R \cdot \psi(t)$ kako bi znali $s(t)$.

Vektori relativnog, prenosnog, Koriolisovog i apsolutnog ubrzanja tačke koja vrši složeno kretanje i jednakost koja ih povezuje.

Prema teoriji, vektor apsolutnog ubrzanja tačke (označavaćemo ga sa $\vec{a}$, bez indeksa), koja vrši složeno kretanje, jednak je zbiru vektora njenog prenosnog (označavaćemo ga sa $\vec{a}_p$), relativnog ($\vec{a}_r$) i Koriolisovog ($\vec{a}_{cor}$) ubrzanja, dakle:

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}.$$

Prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ je ubrzanje one tačke prenosnog elementa na kojoj se (odnosno, nad kojom se), u posmatranom trenutku vremena, nalazi tačka koja vrši složeno kretanje.



1) 2)

Ako sa *M'* označimo tu tačku prenosnog elementa nad kojom se u posmatranom trenutku vremena nalazi tačka *M*, koja vrši složeno kretanje, onda je jasno da je vektor prenosnog ubrzanja jednak vektoru ubrzanja tačke *M'*, dakle $\vec{a}_p = \vec{a}_{M'}$.

Ako prenosni element vrši obrtanje oko nepomične ose, vektor ubrzanja tačke *M'*, nad kojom se nalazi tačka *M*, koja vrši složeno kretanje, mora biti razložen na normalnu i tangencijalnu komponentu. S obzirom da bi u takvom slučaju imali da je $\vec{a}_{M'} = \vec{a}_{M'N} + \vec{a}_{M'T}$, samim tim bi pisali:

$\vec{a}_p = \vec{a}_{pN} + \vec{a}_{pT}$ gde je $\vec{a}_{pN} = \vec{a}_{M'N}$, $\vec{a}_{pT} = \vec{a}_{M'T}$.

Za relativno ubrzanje je veoma važno primetiti da li je relativna putanja pravolinijska ili krivolinijska. Ako je pravolinijska, pravac vektora relativnog ubrzanja $\vec{a}_r$ mora biti isti kao i pravac pravolinijske relativne putanje (Sl.1- prethodni slajd). Ako je relativna putanja krivolinijska, pravac tangencijalne komponente $\vec{a}_{rT}$ vektora relativnog ubrzanja mora se poklopiti sa pravcem tangente na relativnu putanju (Sl.2- prethodni slajd). Ali, osim tangencijalne komponente vektor $\vec{a}_r$ ima i svoju normalnu komponentu $\vec{a}_{rN}$, koja je usmerena ka centru krivine relativne putanje i čiji je intenzitet određen formulom

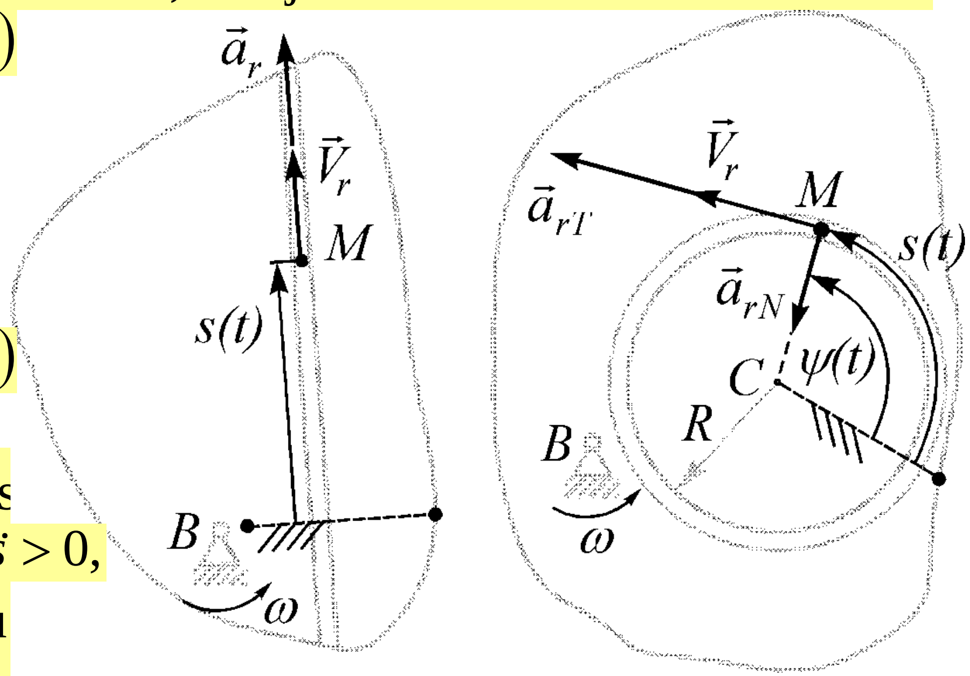
$a_{rN} = \dfrac{V_r^2}{R_k}$, gde je R_k poluprečnik krivine relativne putanje.

U velikom broju primera relativna krivolinijska putanja je kružna pa je u takvom slučaju R_k jednako poluprečniku kruga R relativne kružne putanje. U takvom slučaju vektor $\vec{a}_{rN}$ je usmeren ka centru tog kruga.

Ako je zadata jednačina $s(t)$ pravolinijskog relativnog kretanja (Sl.1), intenzitet relativnog ubrzanja dobija se drugim izvodom relativne pravolinijske koordinate $s(t)$ po vremenu, dakle $a_r = |\ddot{s}|$. Vektor $\vec{a}_r$ je istog smera kao i porast koordinate s, ako je u tom trenutku $\ddot{s} > 0$, dok je vektor $\vec{a}_r$ suprotnog smera u odnosu na smer porasta koordinate s, ako je u tom trenutku $\ddot{s} < 0$.

Isto tako, ako je zadata jednačina $s(t)$ krivolinijskog relativnog kretanja (Sl.2), intenzitet tangencijalne komponente relativnog ubrzanja takođe se dobija drugim izvodom relativne krivolinijske koordinate $s(t)$ po vremenu, dakle $a_{rT} = |\ddot{s}|$.

Vektor $\vec{a}_{rT}$ je istog smera kao i poras koordinate s, ako je u tom trenutku $\ddot{s} > 0$, dok je vektor $\vec{a}_{rT}$ suprotnog smera u odnosu na smer porasta koordinate s, ako je u tom trenutku $\ddot{s} < 0$.



1)   2)

Prema teoriji ***Koriolisovo ubrzanje*** određuje formula $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$,

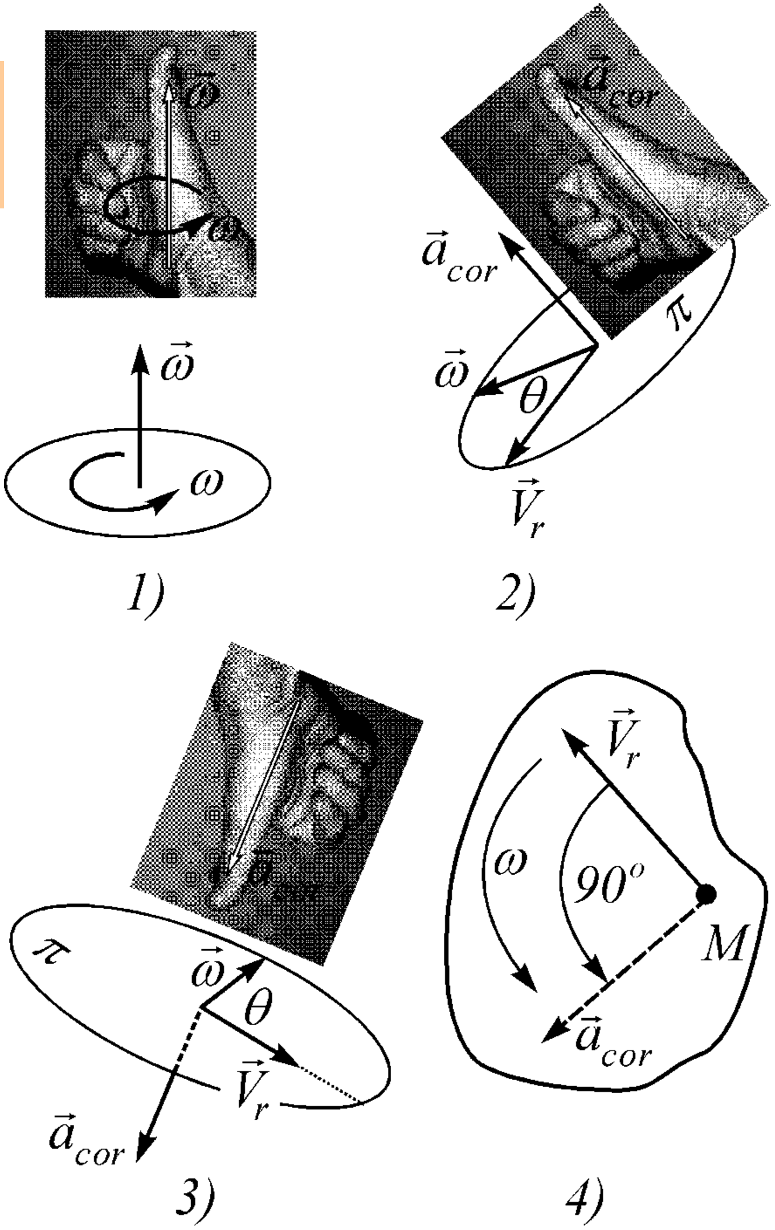
gde je $\vec{\omega}$ vektor ugaone brzine prenosnog elementa $(\vec{\omega} = \vec{\omega}_p)$.

Pravac i smer vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ određuje pravilo desne ruke (Sl.1)

U cilju određivanja pravca i smera Koriolisovog ubrzanja treba uočiti ravan π koju obrazuju prvi i drugi u vektorskom proizvodu (Sl.2 i Sl.3). Zatim se pravilom desne ruke odrede pravac i smer Koriolisovog ubrzanja (Prste desne ruke postaviti u ravni π tako da su prsti usmereni od prvog vektora u vektorskom proizvodu ka drugom najkraćim putem. Palac desne ruke pokazaće pravac i smer Koriolisovog ubrzanja).

Intenzitet Koriolisovog ubrzanja:

$a_{cor} = 2 \cdot \omega \cdot V_r \cdot \sin\theta$



U slučaju kakvi se često sreću u praksi, kada je u pitanju ravanski mehanizam, gde je vektor $\vec{\omega}$ upravan na ravan crteža, a u samoj ravni crteža leži vektor $\vec{V}_r$, ugao θ je 90^0 i samim tim, intenzitet Koriolisovog ubrzanja je $a_{cor} = 2 \cdot \omega \cdot V_r$.

U takvom slučaju (Sl.4-prthodni slajd), pravac i smer Koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_{cor}$ mogu se dobiti, okretanjem vektora $\vec{V}_r$ u smeru ω za 90^0.