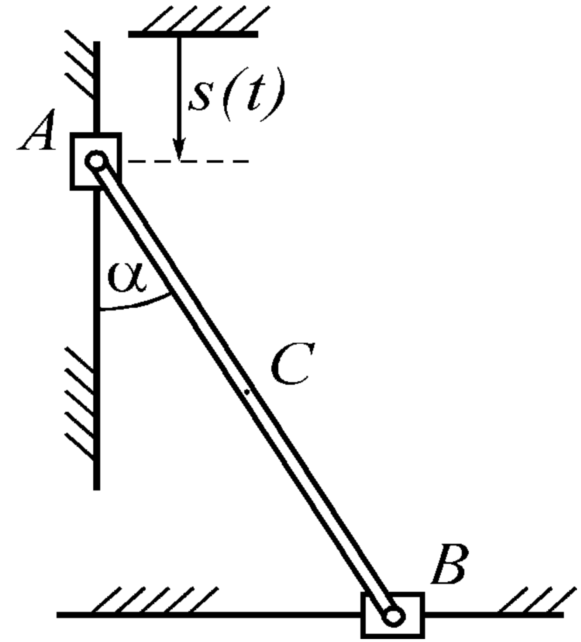
Primer 2.11 Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B*, posredstvom klizača, kreće se pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:



$$s(t) = 2t^2 - 3t \quad s[m], t[s]; \overline{AB} = 2\ m; \alpha = 45^0; \bar{t} = 1\ s.$$

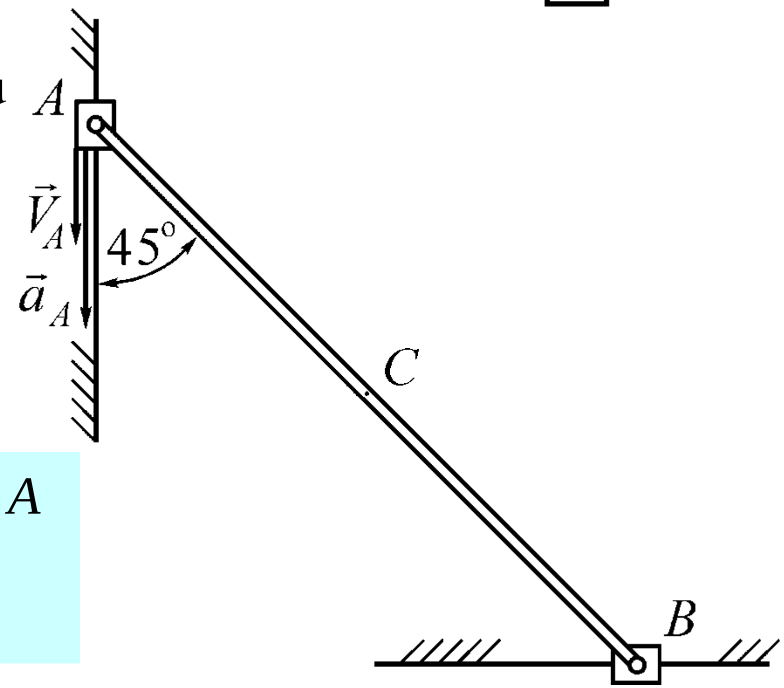
Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke *A* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju.

Brzina i ubrzanje tačke A

$$\dot{s}(t) = 4t - 3 \Rightarrow \dot{s}(1) = 1 \Rightarrow V_A = 1\ \frac{m}{s}$$

$$\ddot{s}(t) = 4 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 4 \Rightarrow a_A = 4\ \frac{m}{s^2}$$

Smerovi vektora brzine i ubrzanja tačke *A* su naniže, u smeru porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1) > 0$ i $\ddot{s}(1) > 0$.

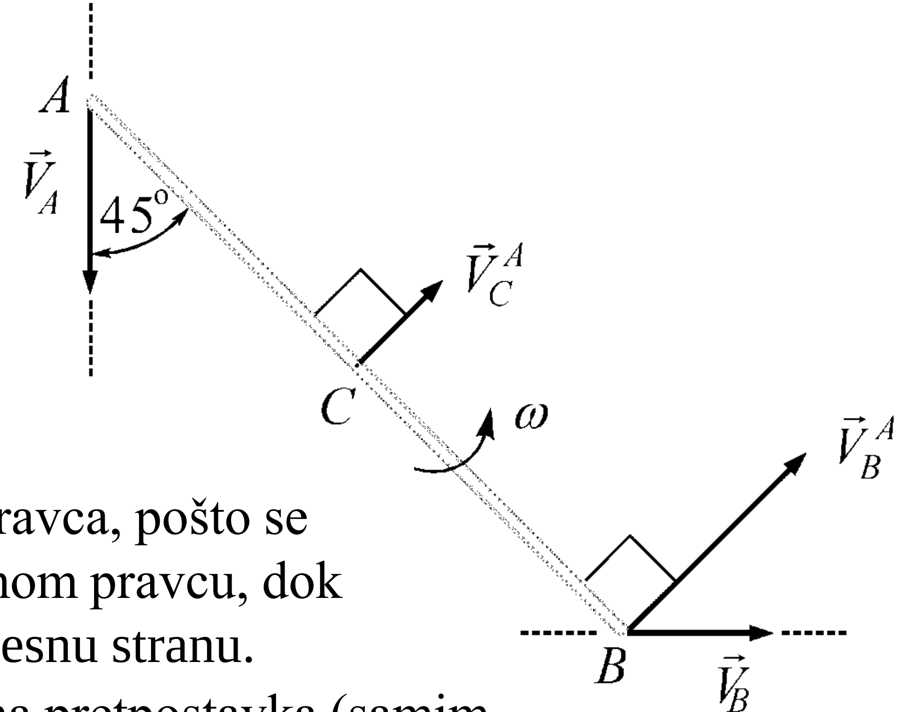


Analiza brzina

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2\omega$$

$$y: \quad 0 = -1 + 2\omega \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} s^{-1}$$

$$x: \quad V_B = 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = 1 \frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke B je horizintalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu.
Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_C^A$$

Određivanje brzine tačke C

$$V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{s}$$

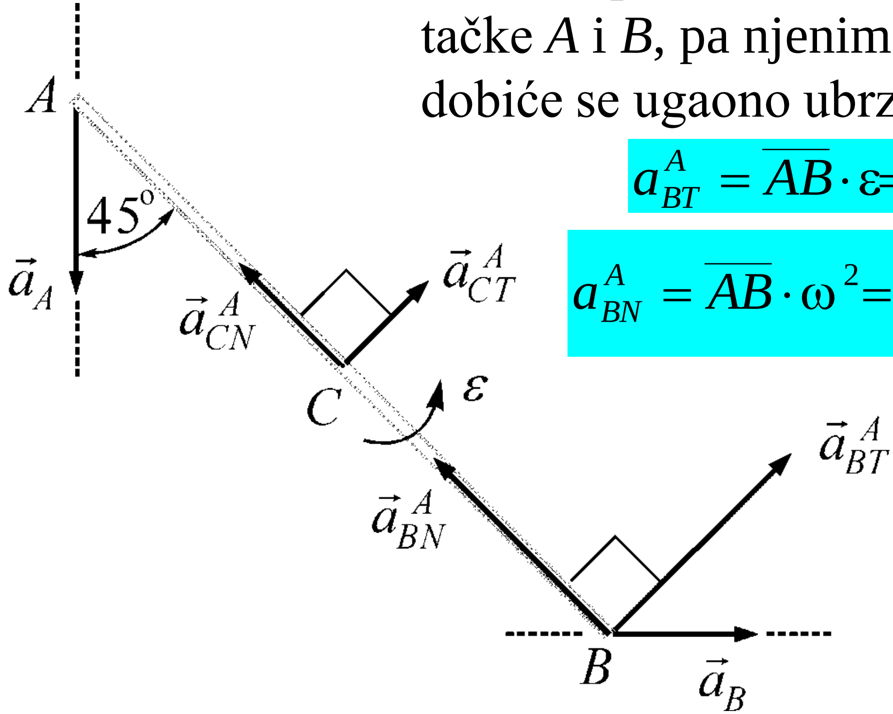
$$x: \quad V_{Cx} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}{}^2 + V_{Cy}{}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorke formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje štapa i intenzitet ubrzanja tačke B :



$$a_{BT}^{A} = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 2\varepsilon$$

$$a_{BN}^{A} = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{A}}$$

$$y: \quad 0 = -4 + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\,s^{-1}$$

$$x: \quad a_B = 0 - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(4\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a_B = 4 - \sqrt{2}\,\frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke B je horizintalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_B i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 45^0$ i $\cos 45^0$ pisana je vrednost $\sqrt{2}/2$.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^A}},\quad a_{CN}^A = \overline{AC}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{s^2},\quad a_{CT}^A = \overline{AC}\cdot\varepsilon = \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\frac{m}{s^2}$$

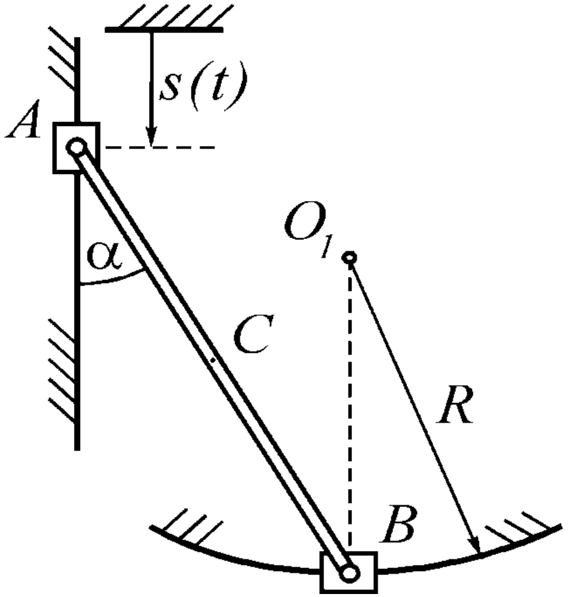
$$x:\quad a_{Cx} = 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

$$y:\quad a_{Cy} = -4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$$

$$\Rightarrow\quad a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2}$$

Primer 2.12 Štap *AB*, prikazan na slici 2.42, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu.Tačka *B* se, posredstvom klizača, kreće po kružnoj putanji poluprenika kao što je to na slici prikazano. Podaci su:

$$s(t) = t^2 - 3t \quad s[m], t[s];\ \overline{AB} = 2\,m;\ \alpha = 30^0;\ \bar{t} = 1\,s.$$



Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke *A* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?

Brzina i ubrzanje tačke A

$$\dot{s}(t)=2t-3 \Rightarrow \dot{s}(1)=-1 \Rightarrow V_A = 1\,\frac{m}{s}$$

$$\ddot{s}(t)=2 \Rightarrow \ddot{s}(1)=2 \Rightarrow a_A = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Smer vektora brzine tačke A je naviše, suprotno od smera porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1)<0$.

Smer vektora ubrzanja tačke A je naniže, u smeru porasta koordinate s, jer je $\ddot{s}(1)>0$.

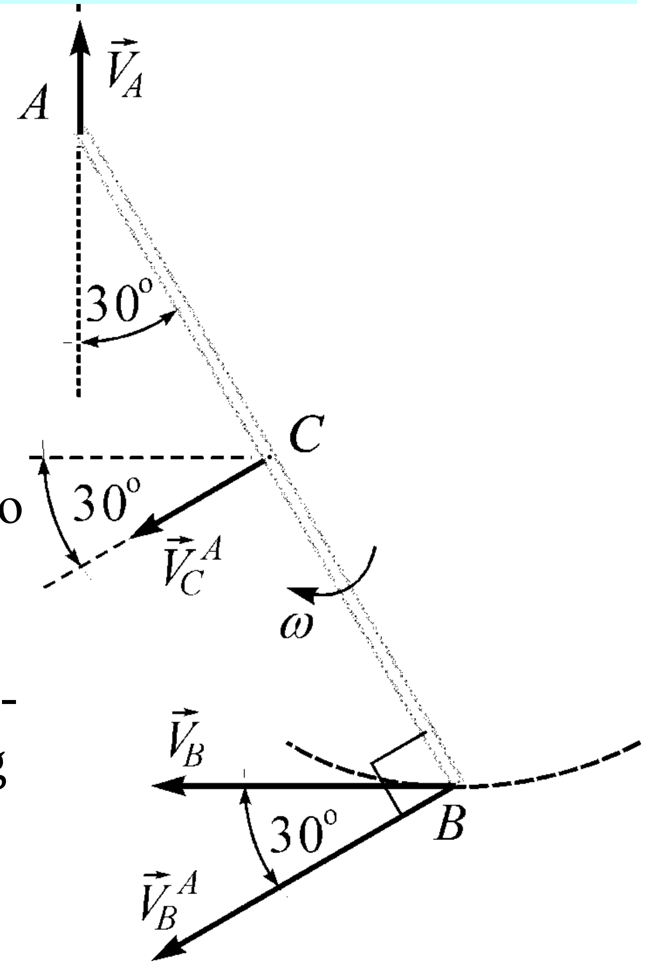
Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad\qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2\,\omega$$

$$y: \quad 0 = 1 - 2\omega\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 1\,s^{-1}$$

$$x: \quad -V_B = 0 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke B je horizintalnog pravca, pošto on mora biti u pravcu tangente na putanju, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za ω i V_B pozitivnog predznaka, tačne su pretpostavke o smerovima.



Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}}$$

$$V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\;2} + V_{Cy}^{\;2}} = 1\,\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorke formule za tačke *A* i *B*, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se intenziteti ubrzanja tačaka *A* i *B*:

$$a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BT}^A = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 2\varepsilon$$

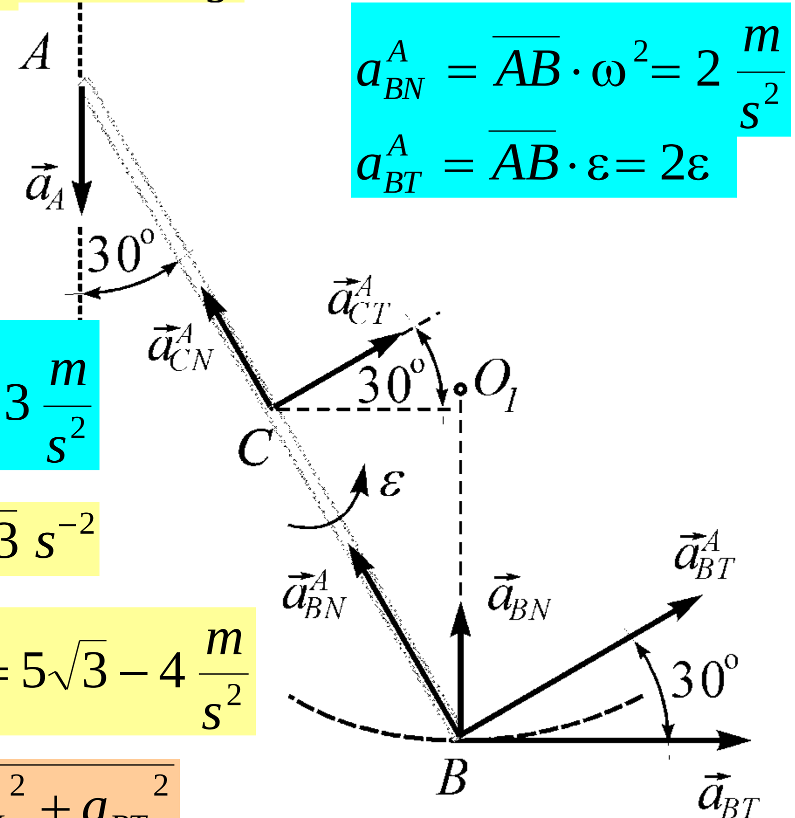
$$a_{BN} = \frac{V_B^{\;2}}{R} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\vec{a}_{BT}^A}$$

$$y: \quad 3 + 0 = -2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varepsilon = 5 - \sqrt{3}\; s^{-2}$$

$$x: \quad 0 + a_{BT} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\left(5 - \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow a_{BT} = 5\sqrt{3} - 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_B = \sqrt{a_{BN}^{\;2} + a_{BT}^{\;2}}$$



Pošto je putanja tačke *B* kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Smer tangencijalne komponente ubrzanja tačke *B* je, po pretpostavci, u desnu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_{BT} i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

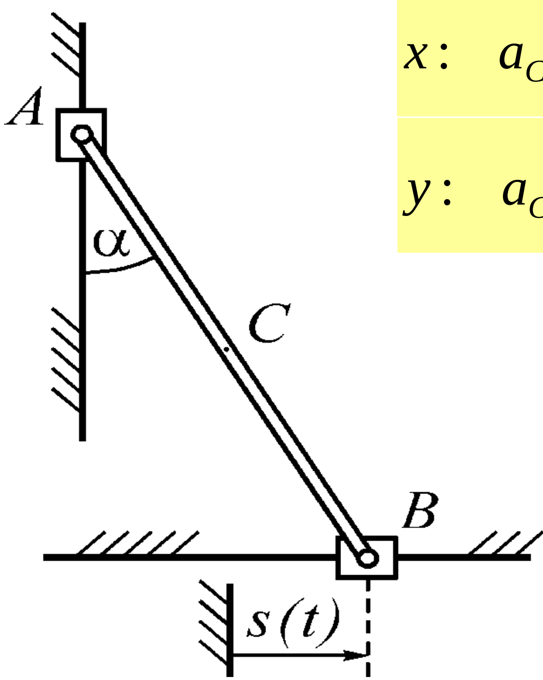
Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^{A}}},\quad a_{CN}^{A} = \overline{AC}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2},\quad a_{CT}^{A} = \overline{AC}\cdot\varepsilon = 5-\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

$$x:\quad a_{Cx} = 0 - 1\cdot\frac{1}{2} + \left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} - 2$$

$$y:\quad a_{Cy} = -2 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2}$$



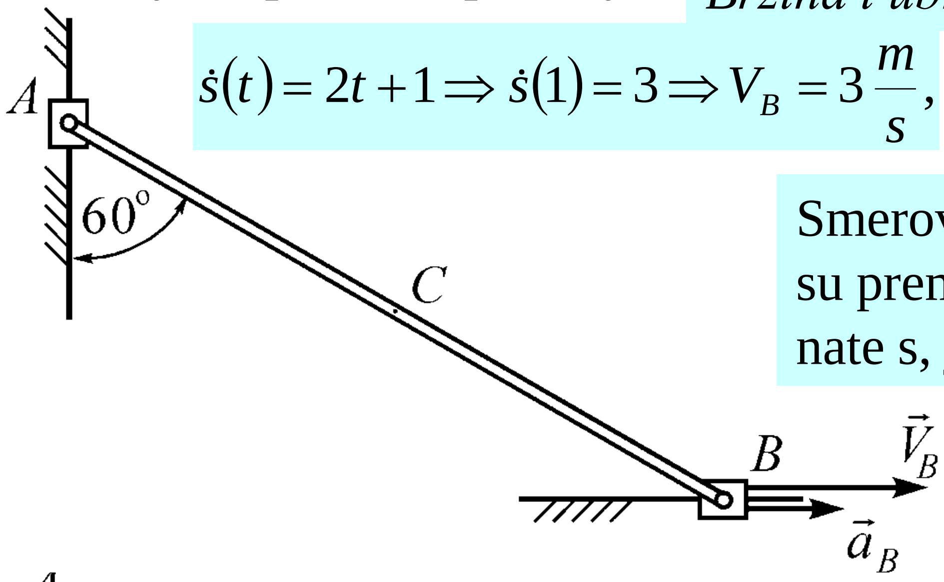
Primer 2.13 Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se kreće se pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

$$s(t) = t^2 + t \quad s[m], t[s];\ \overline{AB} = 2\ m;\ \alpha = 60^0;\ \bar{t} = 1\ s.$$

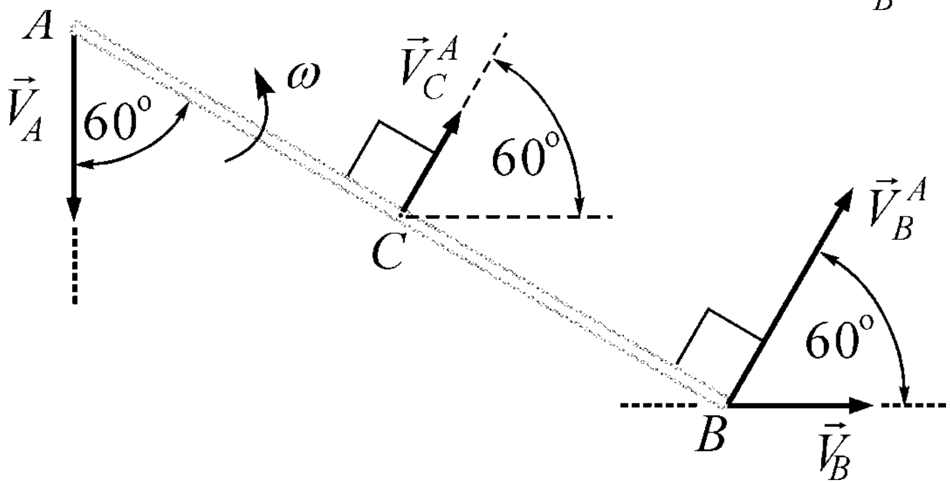
Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke B u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka A i C (gde je tačka C na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?

Brzina i ubrzanje tačke B

$$\dot{s}(t) = 2t + 1 \Rightarrow \dot{s}(1) = 3 \Rightarrow V_B = 3\,\frac{m}{s},\quad \ddot{s}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 2 \Rightarrow a_B = 2\,\frac{m}{s^2}$$



Smerovi vektora brzine i ubrzanja tačke B su prema desno, u smeru porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1) > 0$ i $\ddot{s}(1) > 0$.



Analiza brzina

$$\underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2\omega$$

$$x: 3 = 0 + 2\omega\cdot\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad \omega = 3\ s^{-1}$$

$$y: 0 = -V_A + 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow V_A = 3\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne..

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}}$$

Određivanje brzine tačke C

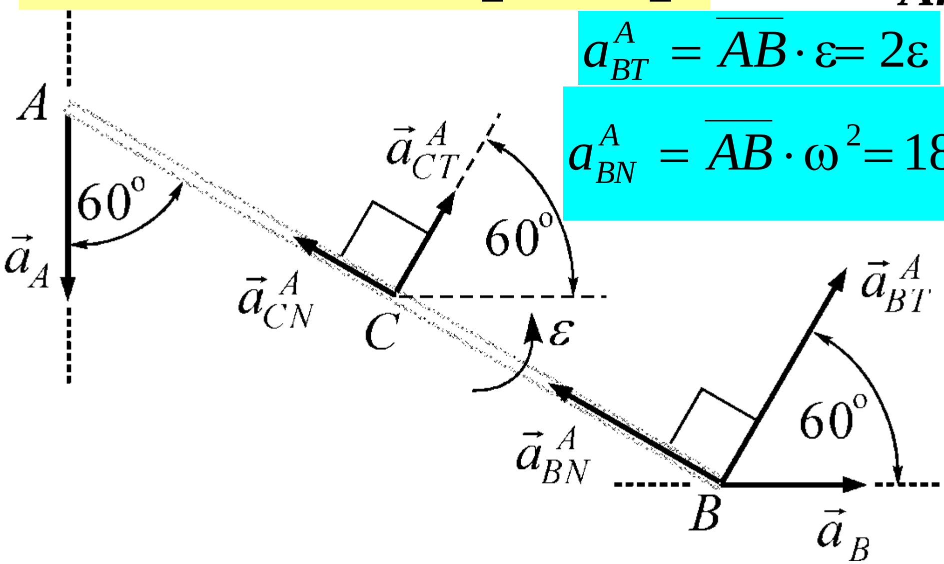
$$V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = 3\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = -3\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\ 2} + V_{Cy}^{\ 2}} = 3\,\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja



$$a_{BT}^A = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 18\,\frac{m}{s^2}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}_B}} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\vec{a}_{BT}^A}$$

$$x: 2 = 0 - 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2 + 9\sqrt{3}\ s^{-1}$$

$$y: 0 = -a_A + 18 \cdot \frac{1}{2} + 2\left(2 + 9\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a_A = 36 + 2\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_A i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\cos 60^0$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\sin 60^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^{A}}},$$

$$a_{CN}^{A} = \overline{AC}\cdot\omega^2 = 9\,\frac{m}{s^2},$$

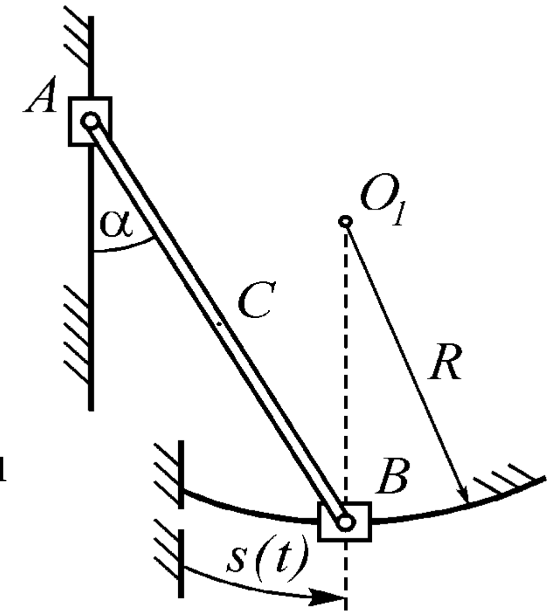
$$a_{CT}^{A} = \overline{AC}\cdot\varepsilon = 2 + 9\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: \quad a_{Cx} = 0 - 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2 + 9\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y: \quad a_{Cy} = -\left(36 + 2\sqrt{3}\right) + 9\cdot\frac{1}{2} + \left(2 + 9\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(18 + \sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2}$$

Primer 2.14 Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se kreće po kružnoj putanji poluprečnika $R = 1\,m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su:



$$s(t) = t^2 - 3t \quad s[m], t[s]; \overline{AB} = 2\,m; \alpha = 30^0; \bar{t} = 1\,s.$$

Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i tangencijalno ubrzanje tačke *B* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?

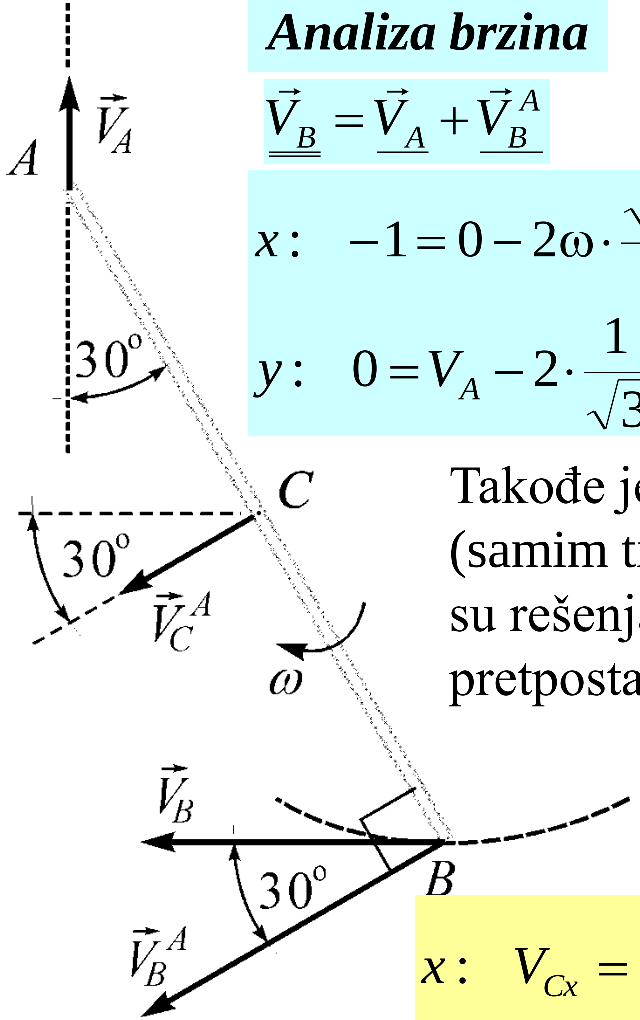
Brzina i tangencijalno ubrzanje tačke B

$$\dot{s}(t) = 2t - 3 \Rightarrow \dot{s}(1) = -1 \Rightarrow V_B = 1\,\frac{m}{s},$$

$$\ddot{s}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 2 \Rightarrow a_{BT} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Smer vektora brzine tačke *B* je u levu stranu, suprotno od smera porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1) < 0$.

Smer vektora tangencijalnog ubrzanja tačke *B* je u desnu stranu, u smeru porasta koordinate s, jer je $\ddot{s}(1) > 0$.



Analiza brzina

$$\underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\vec{V}_B^A}$$

$$V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2\,\omega,$$

$$x: \quad -1 = 0 - 2\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\, s^{-1}$$

$$y: \quad 0 = V_A - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše.

Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne..

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}}$$

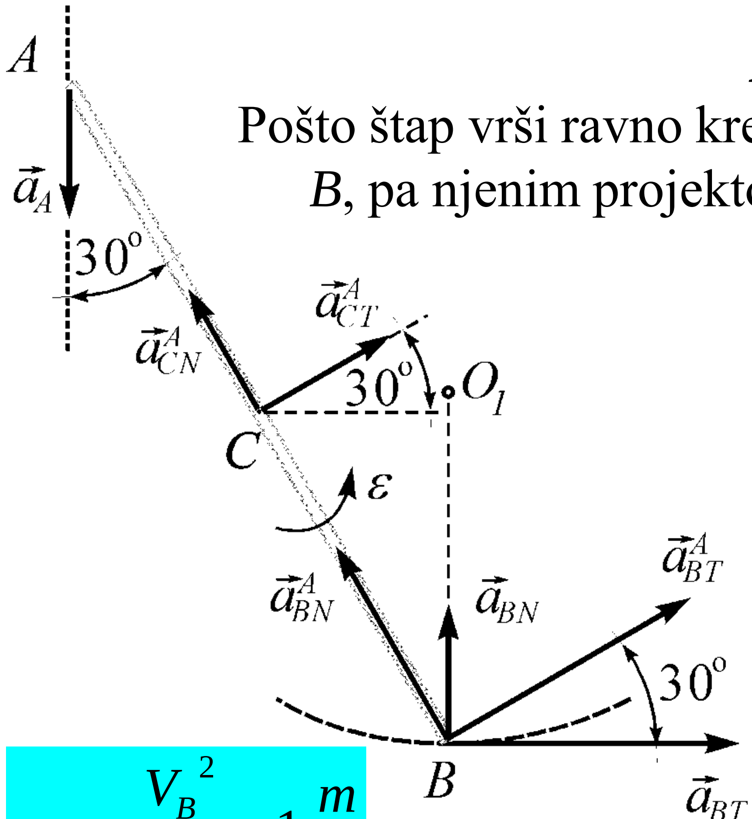
$$V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\ 2} + V_{Cy}^{\ 2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, \frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja



Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorke formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se intenzitet ubrzanja tačke A i ugaono ubrzanje štapa:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}}} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\vec{a}_{BT}^A}$$

$$x: \quad 0+2=0-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+2\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \varepsilon=\frac{7\sqrt{3}}{9}\,s^{-2}$$

$$y: \quad 1+0=-a_A+\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_A=\frac{10\sqrt{3}}{9}-1\,s^{-2}$$

$$a_{BN}=\frac{V_B^2}{R}=1\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BN}^A=\overline{AB}\cdot\omega^2=\frac{2}{3}\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BT}^A=\overline{AB}\cdot\varepsilon=2\varepsilon$$

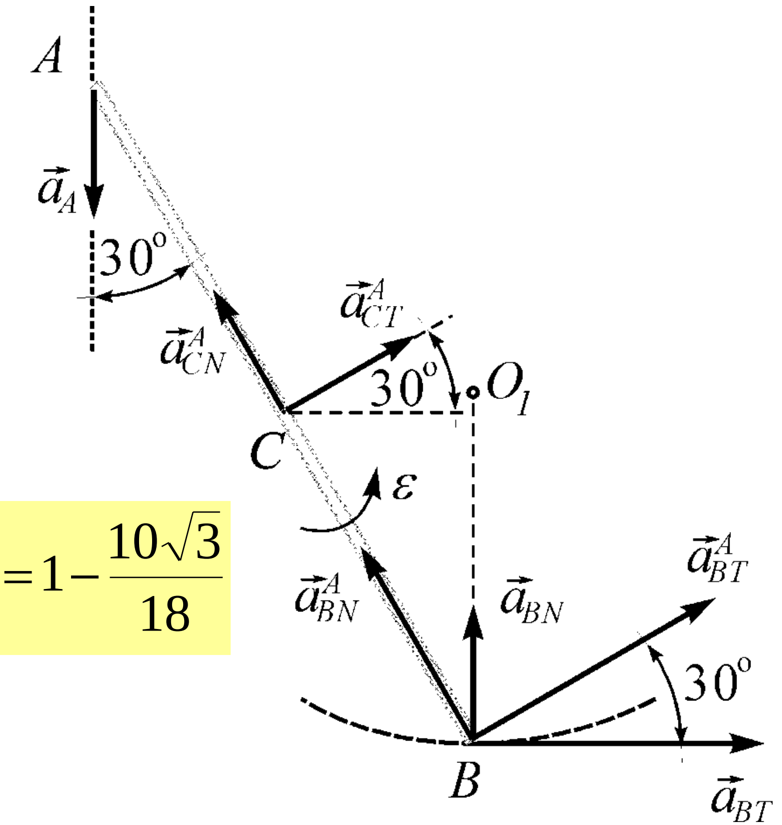
Pošto je putanja tačke B kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Vektor ubrzanja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže.

Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_A i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^A}},$$

$$a_{CN}^A = \overline{AC} \cdot \omega^2 = \frac{1}{3}\frac{m}{s^2}, \qquad a_{CT}^A = \overline{AC} \cdot \varepsilon = \frac{7\sqrt{3}}{9}\frac{m}{s^2}$$



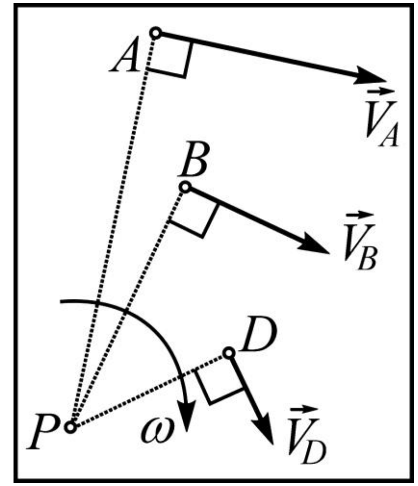
$$x: \quad a_{Cx} = 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$y: \quad a_{Cy} = -\left(\frac{10\sqrt{3}}{9} - 1\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{10\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{a_{Cx}^{\ 2} + a_{Cy}^{\ 2}}$$

16. Trenutni pol brzine. Načini njegovog određivanja.

Svako kruto telo koje vrši ravno kretanje, u opštem slučaju, u svakom trenutku, na svom materijalnom ili nematerijalnom delu, ima samo jednu tačku P, čija je brzina jednaka nuli $V_P = 0$. Ta tačka nosi naziv *trenutni pol brzine*. Kada se zna pravac brzine neke tačke tela, prava provučena kroz tu tačku a upravna na vektor brzine mora prolaziti kroz trenutni pol brzine P. Takve prave nazivaćemo *potezima do trenutnog pola*.



Ako se na primeru sa slike znaju pravci brzina tačaka A i B, presekom odgovarajućih potega dolazi se do mesta trenutnog pola P. Pošto ovi potezi moraju biti upravni na vektore brzina

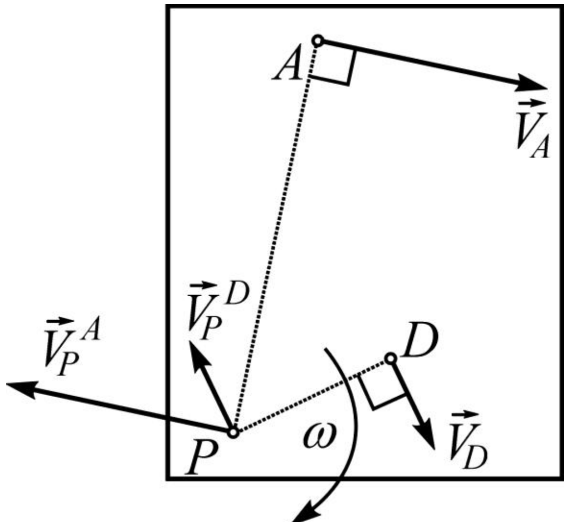
$\overline{AP} \perp \vec{V}_A, \overline{BP} \perp \vec{V}_B, \overline{DP} \perp \vec{V}_D, ...,$

za bilo koju drugu tačku tela, na pimer D (sa slike), pravac je definisan.
Što se tiče smerova vektora brzina, oni su u skladu sa vektorom ugaone brzine.
Ugaona brzina se može dobiti kao količnik intenziteta brzine ma koje tačke tela i njenog rastojanja do trenutnog pola

$$\omega = \frac{V_A}{\overline{AP}} = \frac{V_B}{\overline{BP}} = \frac{V_D}{\overline{DP}} = ...,$$

a samim tim za intenzitete brzina tačaka važe formule

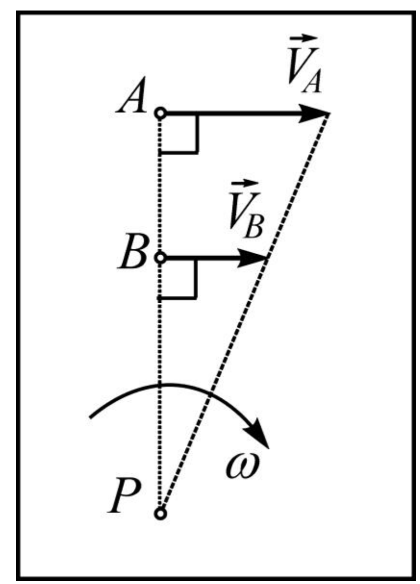
$$V_A = \overline{AP} \cdot \omega,\ V_B = \overline{BP} \cdot \omega,\ V_D = \overline{DP} \cdot \omega,\ ...$$



Kao dokaz da se trenutni pol nalazi na preseku potega izrazimo prvo $\vec{V}_P$ preko $\vec{V}_A$: $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_P^A$, odakle se zaključuje da je $\vec{V}_P$, zbog $\vec{V}_P^A \perp \overline{AP}$, ili paralelno sa $\vec{V}_A$ ili je $\vec{V}_P = \vec{0}$. Zatim se izražavanjem $\vec{V}_P$ preko $\vec{V}_D$: $\vec{V}_P = \vec{V}_D + \vec{V}_P^D$, dolazi do zaključka da je $\vec{V}_P$, zbog $\vec{V}_P^D \perp \overline{DP}$, ili paralelno sa $\vec{V}_D$ ili je $\vec{V}_P = \vec{0}$. Pošto je nemoguće da istovremeno bude $\vec{V}_P$ paralelno sa $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_D$ mora biti $\vec{V}_P = \vec{0}$. Dokaz formula vezanih za ugaonu brzinu tela i intenziteta brzina njegovih tačaka, kao i smerova istih, oslanja se na činjenicu da, zbog $\vec{V}_P = \vec{0}$, važe vektorske jednakosti: $\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_A^P = \vec{V}_A^P,\ \vec{V}_B = \vec{V}_B^P,\ \vec{V}_D = \vec{V}_D^P,\ ...$

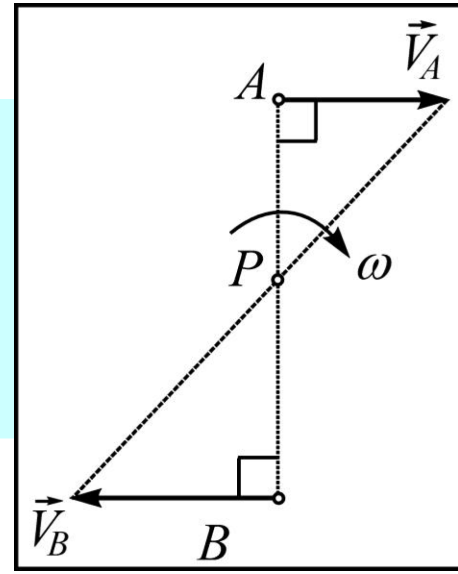
Neki specijalni slučajevi:

U prikazanom specijalnom slučaju kada se znaju intenziteti paralelnih, jednako usmerenih brzina, zajedničkog potega do pola, mesto pola se određuje, kao na slici, povlačenjem prave koja spaja vrhove vektora brzina do preseka sa potegom, gde, na osnovu sličnosti trouglova, važi:



$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\overline{PB} + \overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PB} \cdot (V_A - V_B) = \overline{AB} \cdot V_B \Rightarrow \overline{PB} = \frac{\overline{AB} \cdot V_B}{V_A - V_B}$$

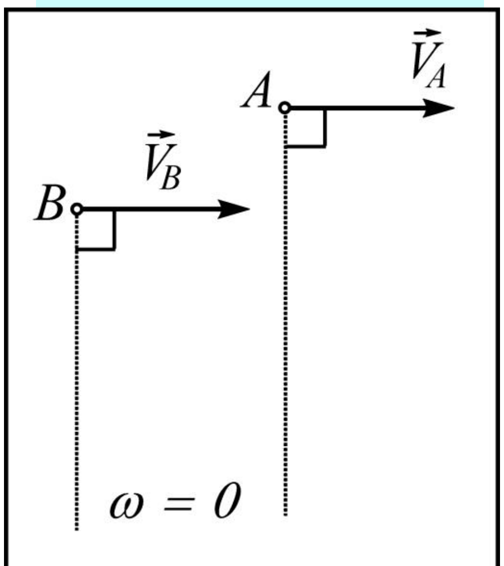
$$\Rightarrow \omega = \frac{V_B}{\overline{PB}} = \frac{V_A - V_B}{\overline{AB}}$$



U prikazanom specijalnom slučaju kada se znaju intenziteti paralelnih, suprotno usmerenih brzina, zajedničkog potega do pola, mesto pola se određuje, kao na slici, povlačenjem prave koja spaja vrhove vektora brzina do preseka sa potegom, gde, na osnovu sličnosti trouglova, važi:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\overline{AB} - \overline{PB}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PB} \cdot (V_A + V_B) = \overline{AB} \cdot V_B \Rightarrow \overline{PB} = \frac{\overline{AB} \cdot V_B}{V_A + V_B}$$

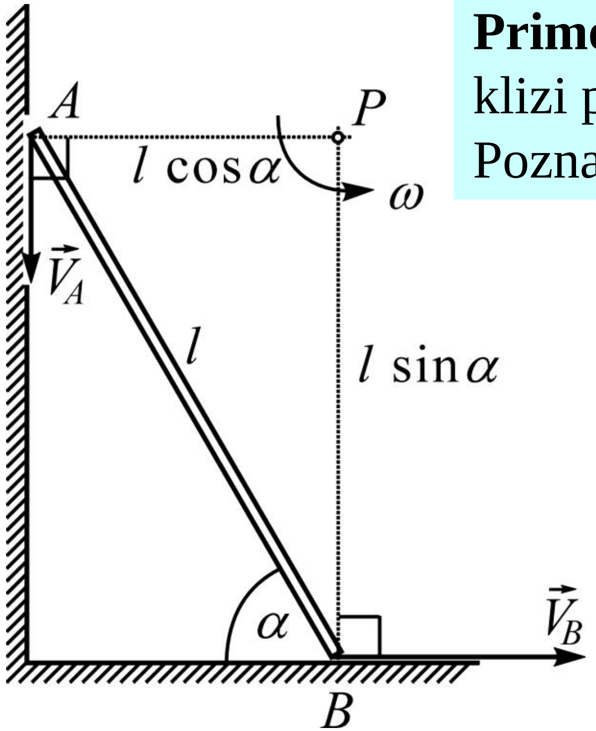
$$\Rightarrow \omega = \frac{V_B}{\overline{PB}} = \frac{V_A + V_B}{\overline{AB}}$$



U dole prikazanom specijalnom slučaju kada su brzine paralelne i samim tim potezi takođe paralelni (bez poklapanja) trenutni pol je u beskonačnosti i važi da je ugaona brzina tela, u datom trenutku, jednaka nuli

$$\omega = \lim_{\overline{AP} \to \infty} \frac{V_A}{\overline{AP}} = 0.$$

To ima za posledicu da svaka tačka tela, na primer D, ima kao vektor istu brzinu kao i tačka A: $\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_D^A = \vec{V}_A$, jer je $V_D^A = \overline{AD} \cdot \omega = 0.$ Dakle, u takvom specijalnom slučaju važi: $\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_C = \vec{V}_D = \ldots$



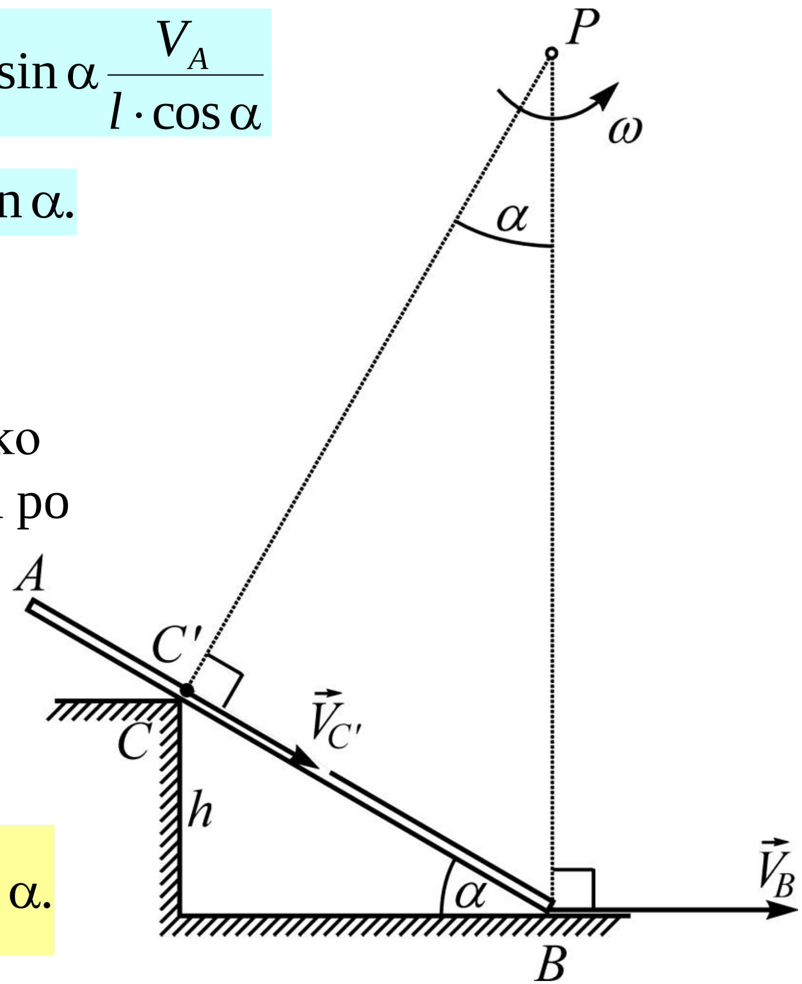
Primer 2.15 Štap *AB* vrši ravno kretanje tako što tačka *A* klizi po vertikalnom zidu a tačka *B* po horizontalnom podu. Poznate veličine su V_A, l i α. Odrediti ω i V_B?

$$\omega = \frac{V_A}{\overline{\overline{AP}}} = \frac{V_A}{l \cdot \cos\alpha}$$

$$V_B = \overline{BP} \cdot \omega = l \cdot \sin\alpha \frac{V_A}{l \cdot \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad V_B = V_A \cdot \tan\alpha.$$

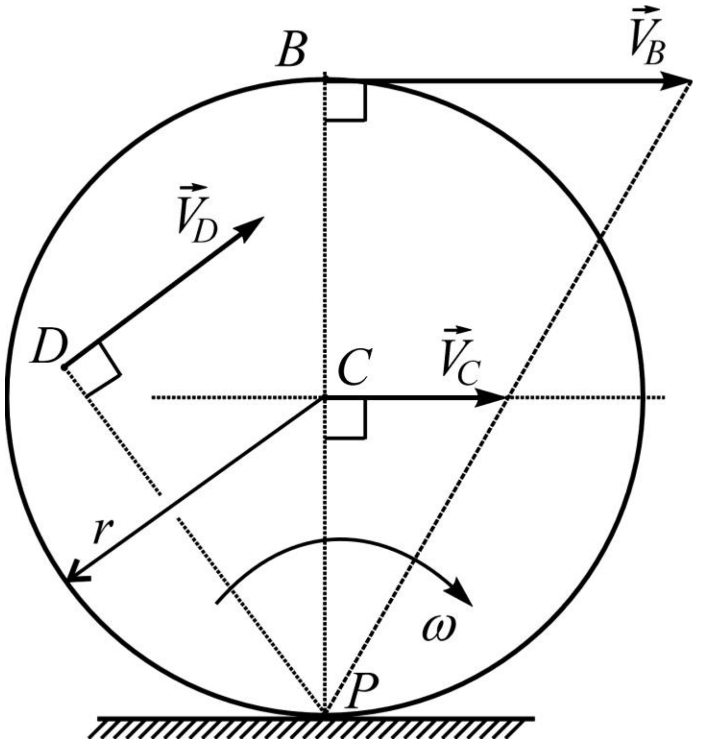
Primer 2.16 Štap *AB* vrši ravno kretanje tako što klizi po ivici C dok njegova tačka *B* klizi po horizontalnom podu. Poznate veličine su V_B, l i α. Odrediti ω?

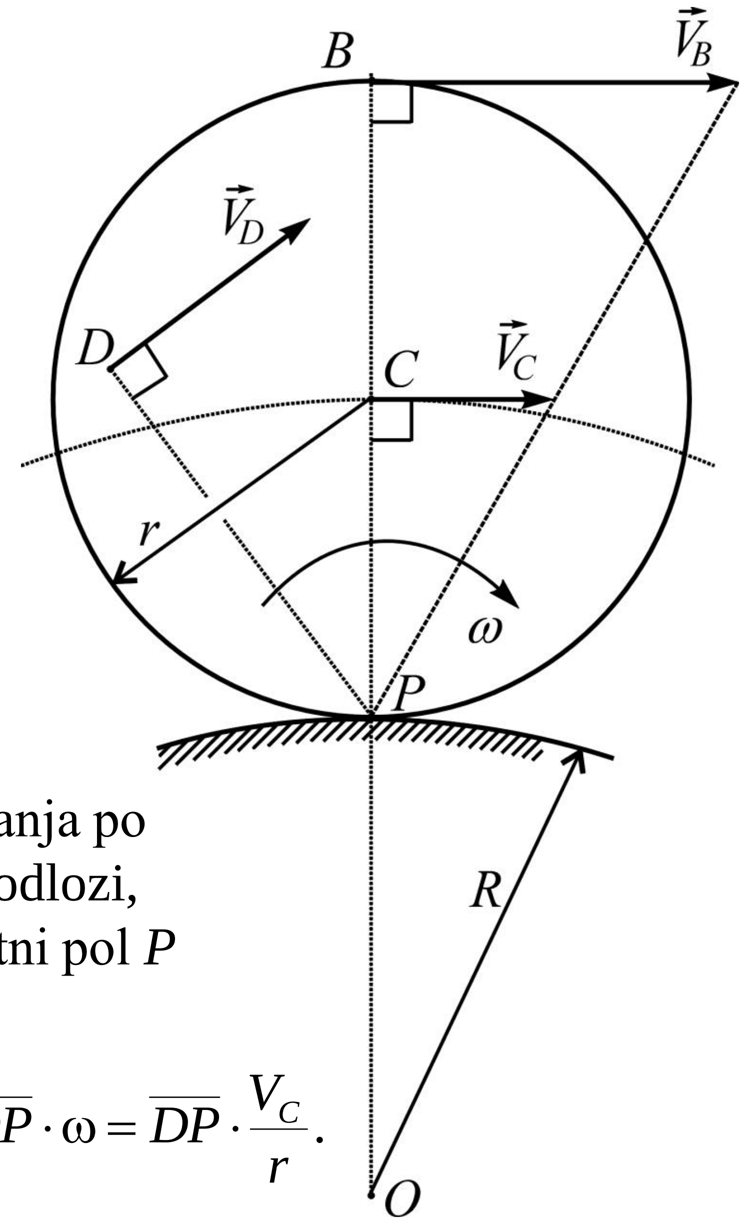


$$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{\overline{BC}}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{BP}}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BP} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin^2\alpha}, \quad \omega = \frac{V_B}{\overline{\overline{BP}}} = \frac{V_B}{h}\sin^2\alpha.$$

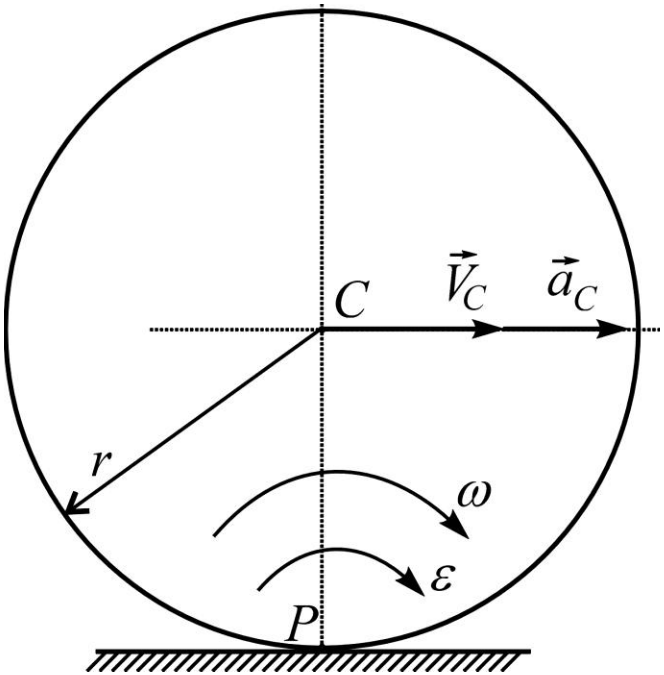
Trenutni pol brzine pri kotrljanju bez klizanja.

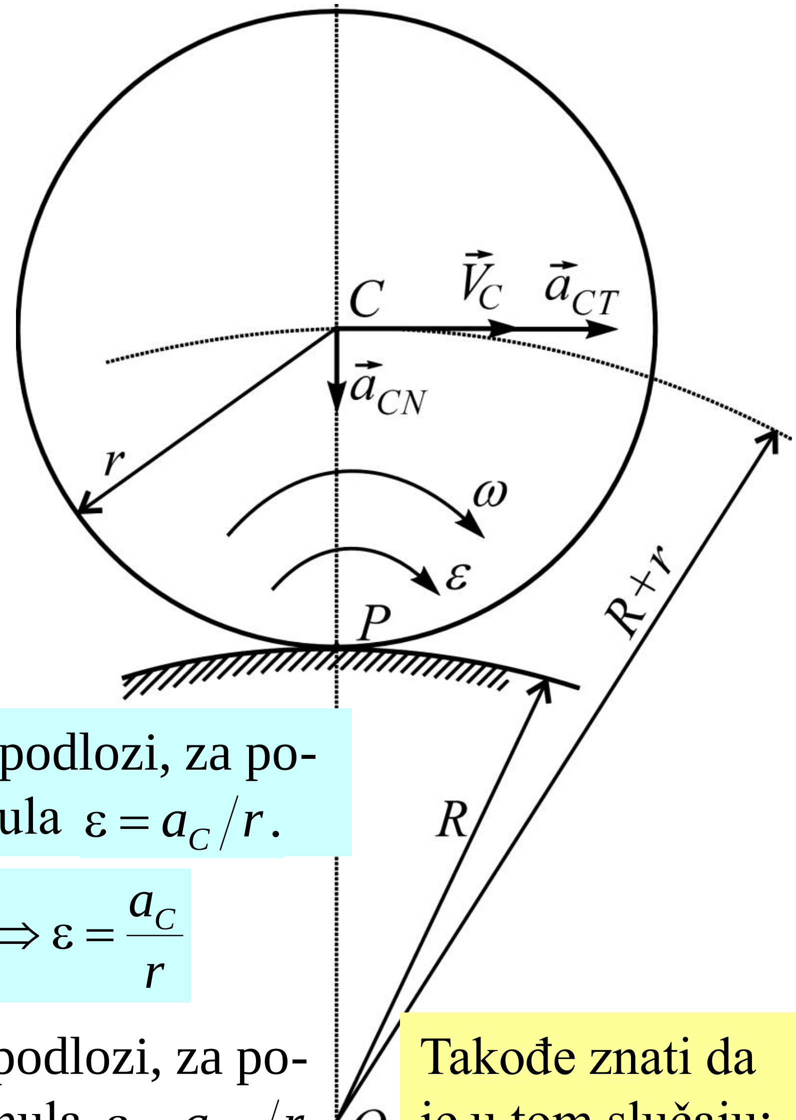




Bilo da se disk (točak, obruč) kotrlja bez klizanja po pravolinijskoj ili krivolinijskoj nepokretnoj podlozi, zbog jednakosti brzina dodirnih tačaka, trenutni pol *P* mora biti u tački kontakta gde važi:

$$\omega = \frac{V_C}{r}, \;\; V_B = \overline{BP} \cdot \omega = 2r \cdot \frac{V_C}{r} = 2V_C, \quad V_D = \overline{DP} \cdot \omega = \overline{DP} \cdot \frac{V_C}{r}.$$





Pri kotrljanju bez klizanja po pravolinijskoj podlozi, za poznato a_C i r, ugaono ubrzanje određuje formula $\varepsilon = a_C / r$.

$$\omega(t) = \frac{V_C(t)}{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bigg|\omega(t) = \frac{V_C(t)}{r} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{a_C(t)}{r} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_C}{r}$$

Pri kotrljanju bez klizanja po krivolinijskoj podlozi, za poznato a_CT i r, ugaono ubrzanje određuje formula $\varepsilon = a_{CT} / r$.

$$\omega(t) = \frac{V_C(t)}{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\bigg|\omega(t) = \frac{V_C(t)}{r} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{a_{CT}(t)}{r} \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_{CT}}{r}$$

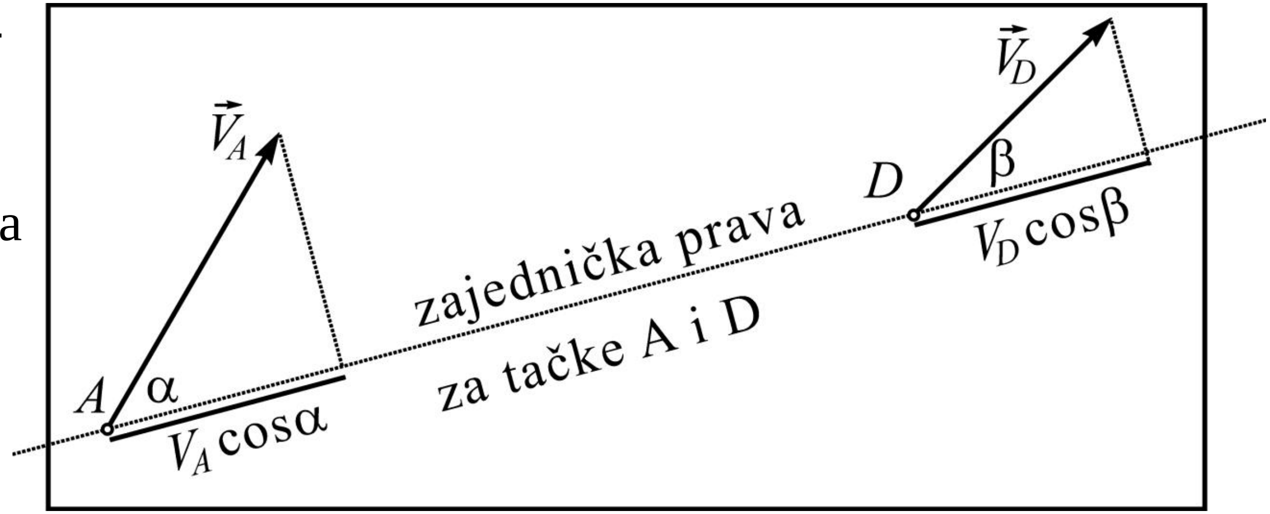
Takođe znati da je u tom slučaju:

$$a_{CN} = \frac{{V_C}^2}{R+r}.$$

Teorema o projekciji vektora brzina na zajedničku pravu.

Za dve tačke koje pripadaju telu što vrši ravno kretanje projekcije vektora brzina na zajedničku pravu moraju biti jednake:

$V_D \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha.$



Dokaz (donja slika):

Projektovanjem vektorske jednačine $\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_D^A$ na izabranu x osu, dobija se:

$$x: \quad V_{Dx} = V_{Ax} + 0 \quad \Rightarrow \qquad V_D \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha.$$