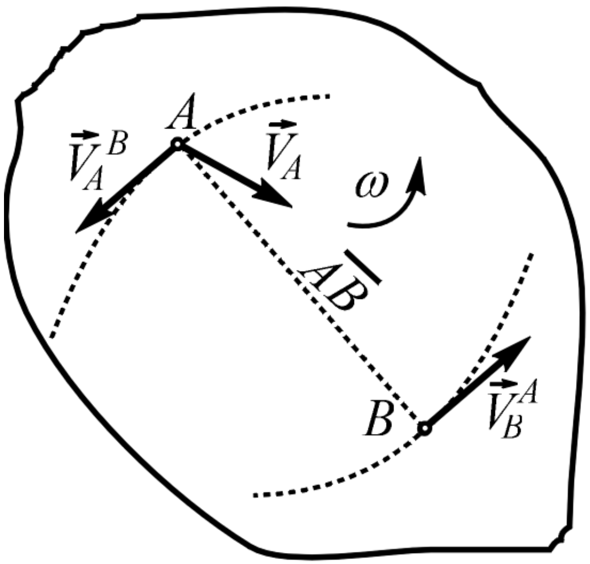
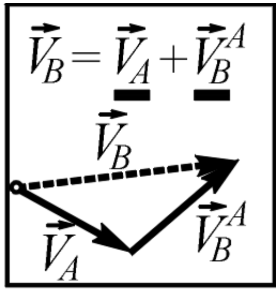
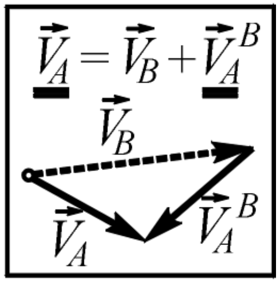
15. Određivanje brzina tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.
18.Određivanje ubrzanja tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.



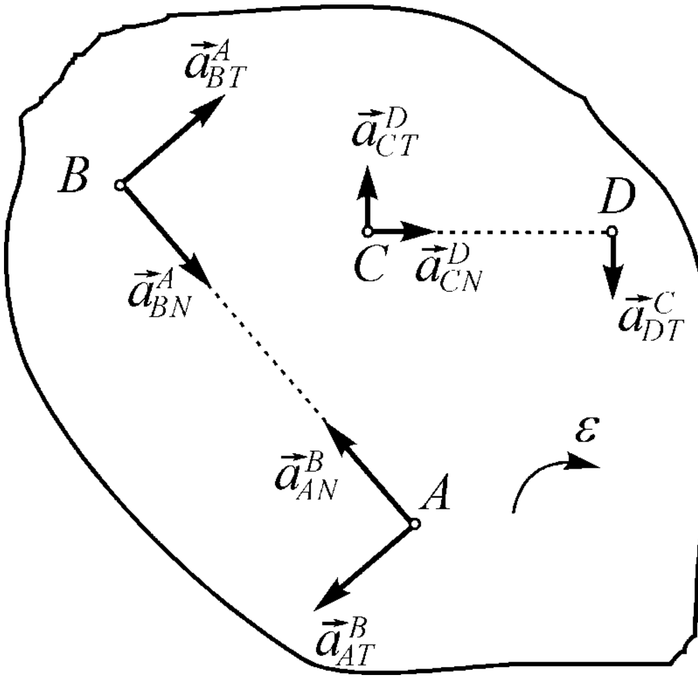
1)



2)



3)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A,$$

Prilog 1: Izvodjenje vektorskih formula $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A$ i $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A$

Medjusobno upravni jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $\eta A \xi$, vezanog za telo, su $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$.

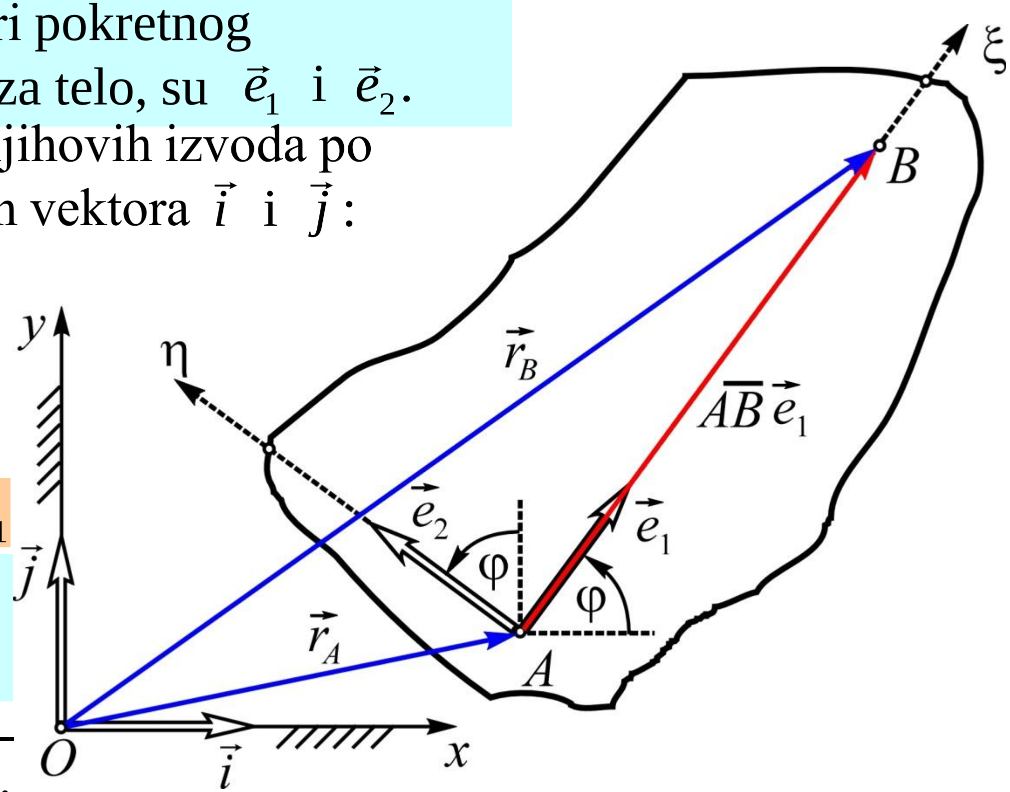
$\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ su promenljivi i za nalaženjenjihovih izvoda po vremenu izrazimo ih preko jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

$$\vec{e}_1 = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$

$$\vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

$$\dot{\vec{e}}_1 = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{e}}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_2,$$

$$\dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j} \Rightarrow \dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi}\vec{e}_1$$



Jednakost koja tokom vremena povezuje vektore položaja: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}\,\vec{e}_1$

Prvi izvod ove jednakosti daje (prvi izvod vektora položaja je vektor brzine):

$$\frac{d}{dt}\Big|\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}\,\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\vec{e}}_1, \vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2, \underline{\underline{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A}} \qquad \vec{V}_B^A = \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2$$

Prvi izvod dobijene jednakosti daje (prvi izvod vektora brzine je vektor ubrzanja):

$$\frac{d}{dt}\Big|\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2 + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2 + \left(-\overline{AB}\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1, \quad \underline{\underline{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{BN}^A}}$$

$$\vec{a}_{BT}^A = \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2$$

$$\vec{a}_{BN}^A = \left(-\overline{AB}\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1$$

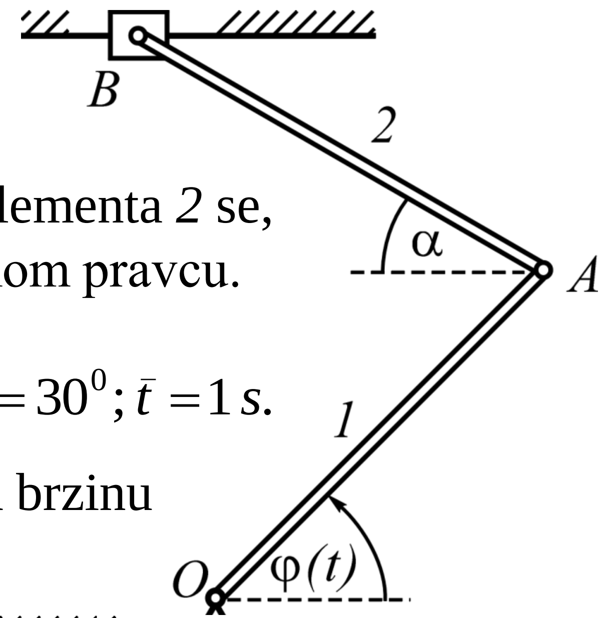
$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AT}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{A}}$$

Podsetimo se da je vektor određen sa tri podatka

Intenzitet
Pravac
Smer

Šta znači kad pri izradi zadatka neki vektor u vektorskoj jednačini podvučemo jednom itd.

Primer 2.5 Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *1* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *2* (štapa *AB*), zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *1*. Tačka *B* elementa *2* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu.

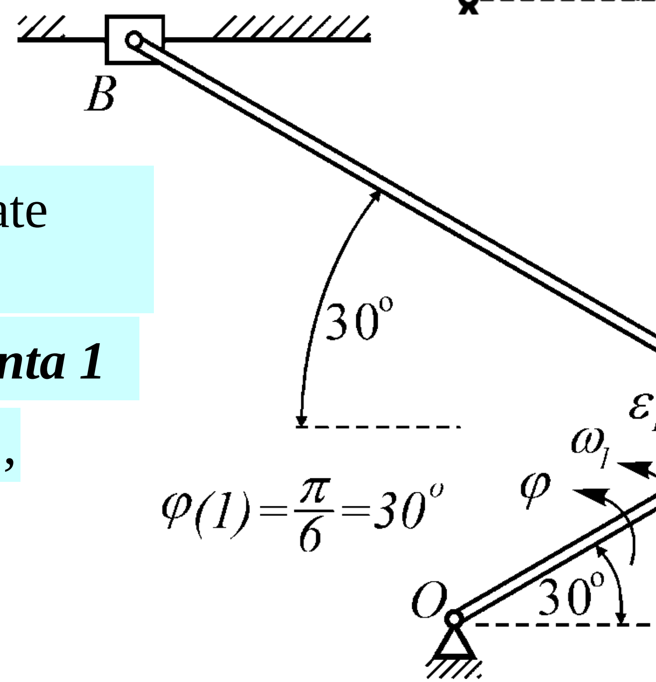


Podaci su:

$\varphi(t) = t^2 - t + \pi/6 \quad \varphi[rad], t[s]; \overline{OA} = 1\,m; \overline{AB} = 2\,m; \alpha = 30^0; \bar{t} = 1\,s.$

Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *1* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzinu i ubrzanje tačke *B* kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *2*?

Položaj sistema u trenutku $\bar{t} = 1\,s$ za zadate podatke prikazan je na slici



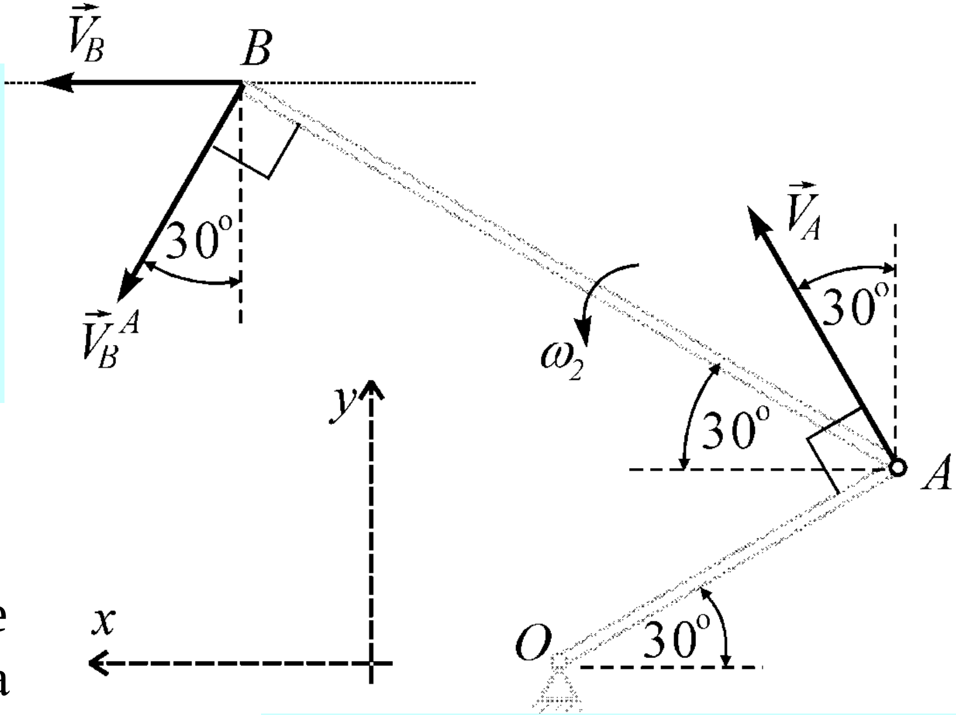
Ugaona brzina i ugaono ubrzanje elementa 1

$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1\,s^{-1},$

$\ddot{\varphi}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 2\,s^{-2}.$

Analiza brzina

Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, vektor brzine te tačke, prikazan na slici, u potpunosti je poznat. Njegov intenzitet je $V_A = \overline{OA} \cdot \omega_1 = 1 \frac{m}{s}$.



Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 2 i intenzitet brzine tačke *B*:

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A}, \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 2\omega_2$$

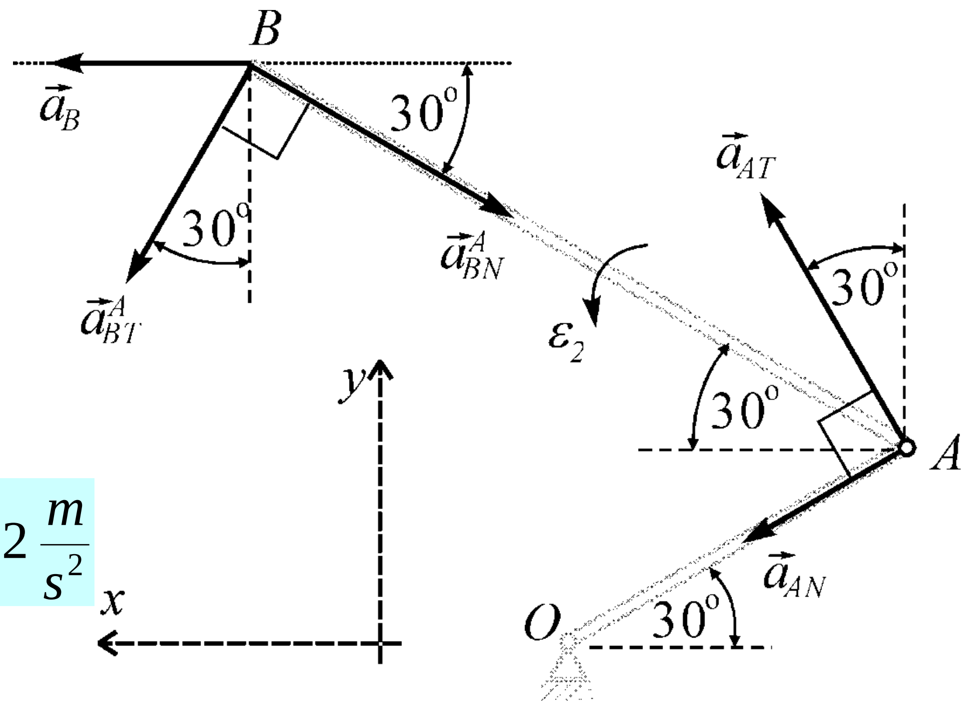
$$y: \quad 0 = 1 \cdot \cos 30^0 - 2\omega_2 \cdot \cos 30^0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{1}{2} s^{-1}$$

$$x: \quad V_B = 1 \cdot \sin 30^0 + 2\omega_2 \cdot \sin 30^0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 1 \frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke *B* je horizintalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu.

Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_2). Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω_2 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja



Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke, prikazane na slici, u potpunosti su poznate. Njihovi intenziteti su:

$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_1^2 = 1\,\frac{m}{s^2}, \quad a_{AT} = \overline{OA}\cdot\varepsilon_1 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje elementa 2 i intenzitet ubrzanja tačke *B*:

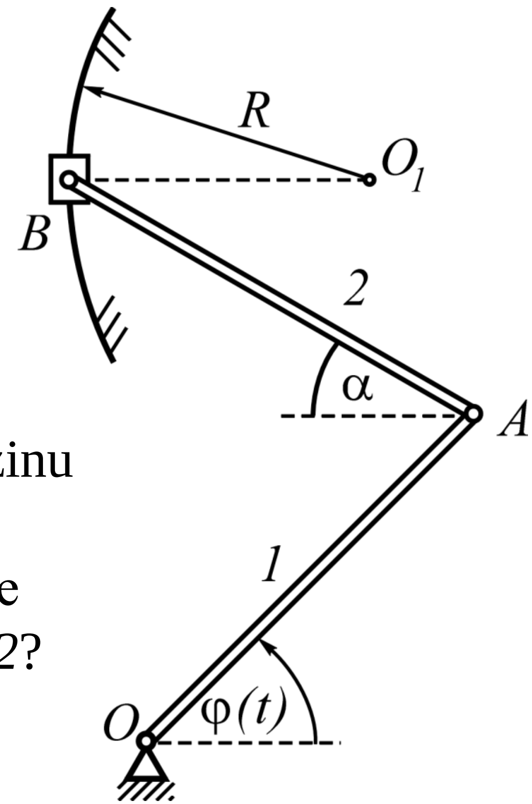
$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AT}}} + \underline{\underline{\vec{a}^A_{BN}}} + \underline{\vec{a}^A_{BT}} \qquad a^A_{BT} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_2 = 2\varepsilon_2, \quad a^A_{BN} = \overline{AB}\cdot\omega_2^2 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$y:\ 0 = -1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 2\varepsilon_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,s^{-1}$$

$$x:\ a_B = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a_B = 2-\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke *B* je horizintalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε_2). Zbog činjenice da su rešenja za a_B i ε_2 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 30^o$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\cos 30^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.

Primer 2.6 Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *1* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *2* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *1*. Tačka *B* elementa *2* se kreće po kružnoj putanji poluprenika $R=1\,m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su: $\varphi(t)=t^2-t+\pi/4 \quad \varphi[rad]$, $t[s]$; $\overline{OA}=2\,m$; $\overline{AB}=2\,m$; $\alpha=45^0$; $\bar{t}=1\,s$.



Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *1* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzinu i ubrzanje tačke *B* kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *2*?

Položaj sistema u trenutku $\bar{t} = 1\,s$ za zadate podatke prikazan je na slici

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje elementa 1

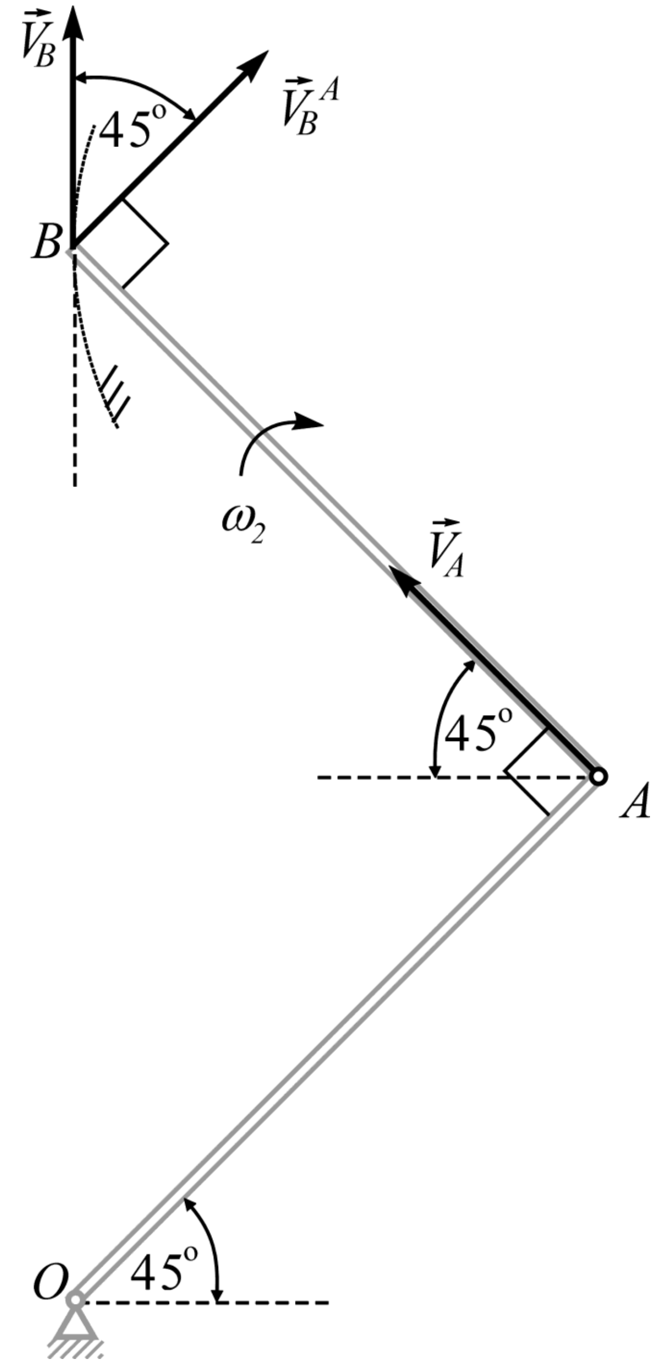
$$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1\,s^{-1},$$

$$\ddot{\varphi}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 2\,s^{-2}.$$

Analiza brzina

Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, vektor brzine te tačke u potpunosti je poznat. Njegov intenzitet je

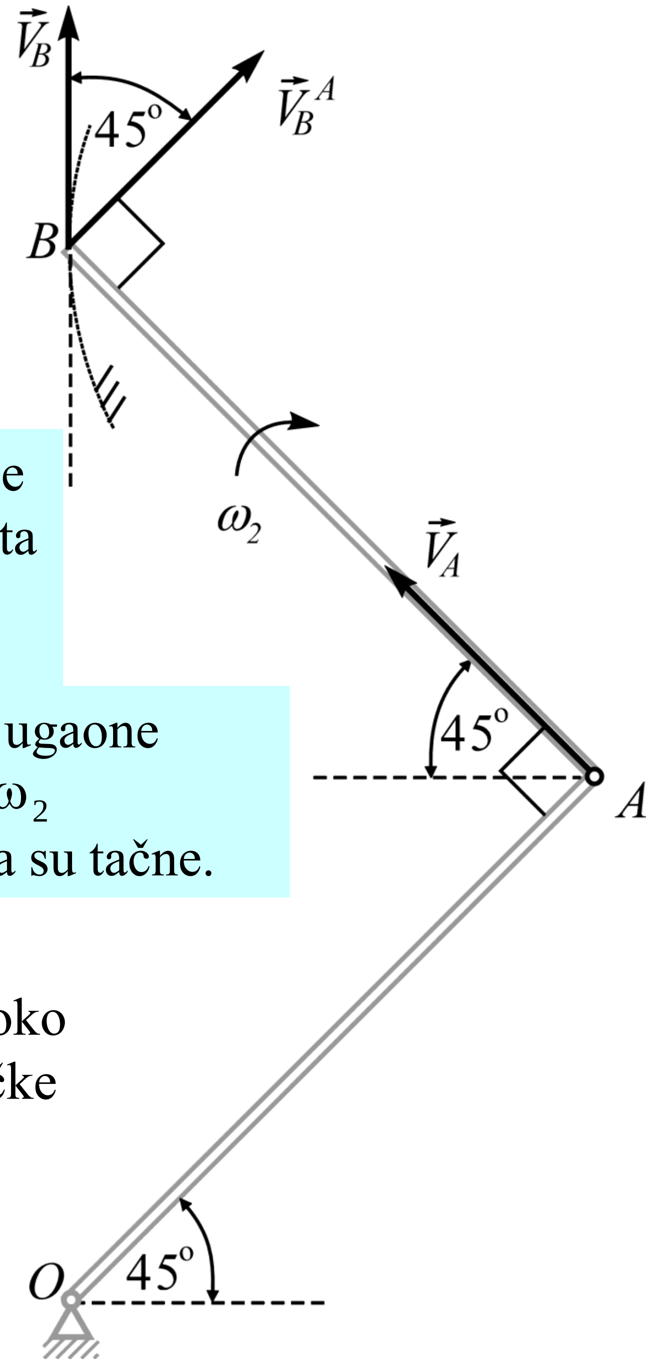
$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_1 = 2\frac{m}{s}$$



$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A}, \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 2\omega_2$$

$$x: \quad 0 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\omega_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 1\, s^{-1}$$

$$y: \quad V_B = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = 2\sqrt{2}\, \frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke B je vertikalnog pravca, pošto se tačka B kreće po kružnoj putanji kod koje je tangenta u tom trenutku vertikalna, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše. Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_2). Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω_2 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja

Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke u potpunosti su poznate. Njihovi intenziteti su:

$$a_{AN} = \overline{OA} \cdot \omega_1^2 = 2\, \frac{m}{s^2}, \quad a_{AT} = \overline{OA} \cdot \varepsilon_1 = 4\, \frac{m}{s^2}.$$

Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje elementa 2 i intenzitet tangencijane komponente ubrzanja tačke *V*:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AT}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{A}}$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^{\,2}}{R} = 8\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{BN}^{A} = \overline{AB}\cdot\omega_2^{\,2} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

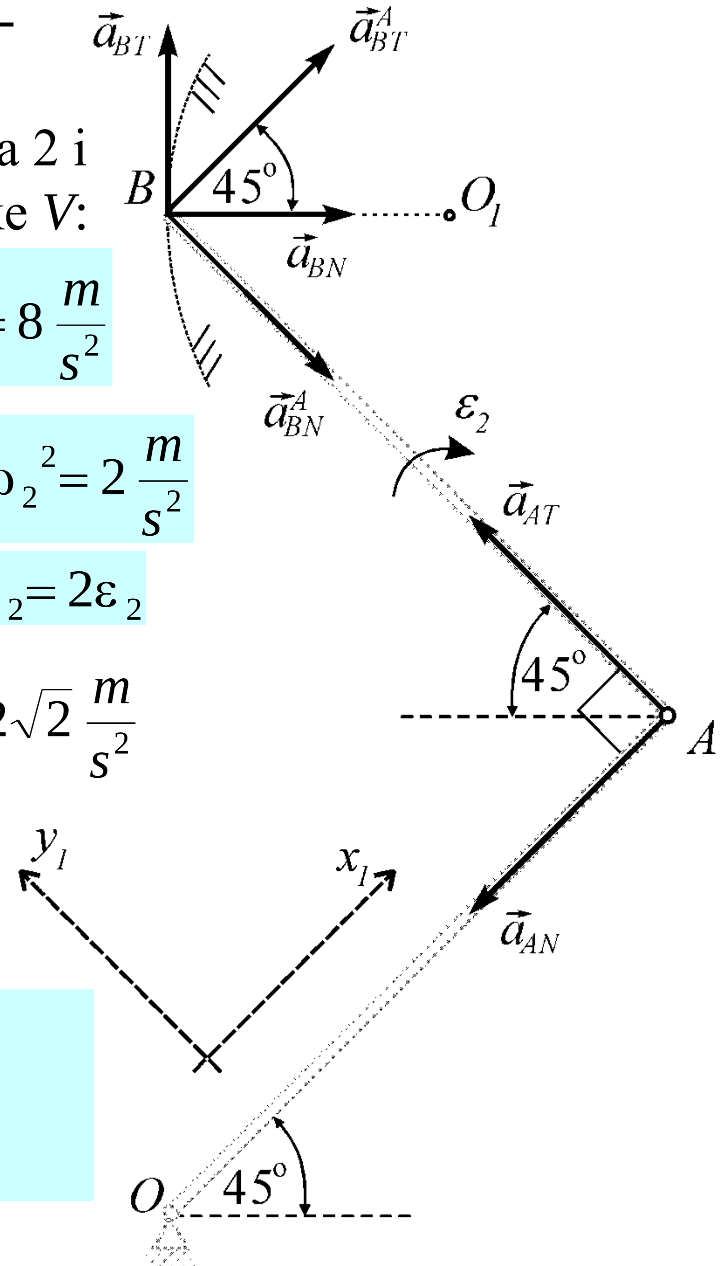
$$a_{BT}^{A} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_2 = 2\varepsilon_2$$

$$y_1 : -8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + a_{BT}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0+4-2+0 \;\Rightarrow a_{BT} = 8+2\sqrt{2}\ \frac{m}{s^2}$$

$$x_1 : 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(8+2\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -2+0+0+2\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 2+4\sqrt{2}\ s^{-1}$$

Vektor ubrzanja tačke *B* se morao razložiti na normanlu i tangencijalnu komponentu, pošto se tačka *B* kreće po kružnoj putanji.



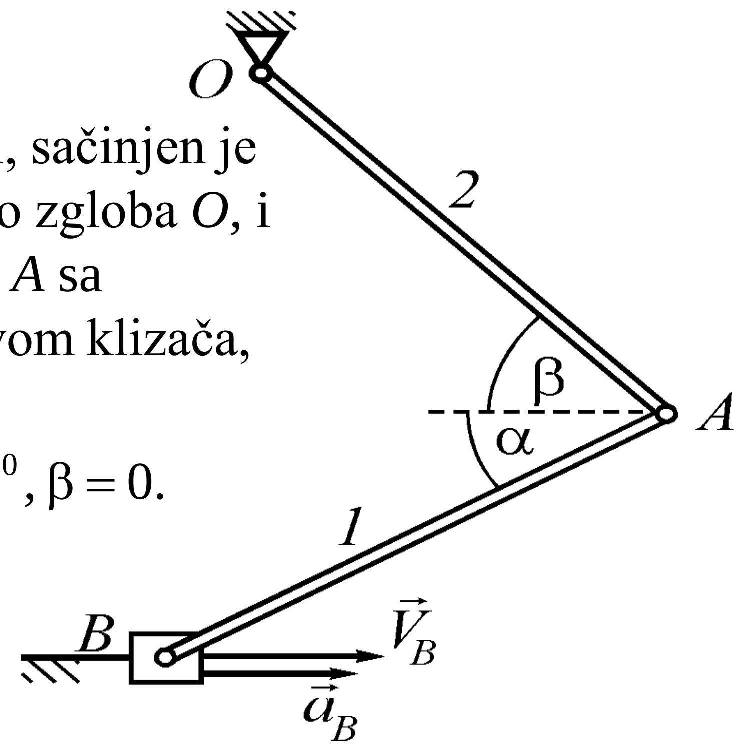
Normalna komponrnta $\vec{a}_{BN}$ mora biti usmerena ka centru kruga O_1 kružne putanje tačke B, dok tangencijalna komponrnta $\vec{a}_{BT}$ mora imati pravac tangente kod koje je, po pretpostavci, usvojen smer naviše. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε_2). Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_{BT}$ i ε_2 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 45^0$ i takodje $\cos 45^0$ pisana je vrednost $\sqrt{2}/2$. Na kraju, pošto se znaju intenziteti međusobno upravnih komponenata ubrzanja $\vec{a}_B$, njegov intenzitet je:

$$a_B = \sqrt{a_{BN}{}^2 + a_{BT}{}^2} = \sqrt{8^2 + \left(8 + 2\sqrt{2}\right)^2}\ \frac{m}{s^2}$$

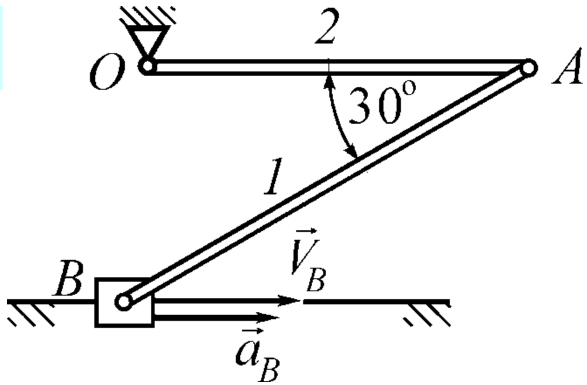
Primer 2.7 Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *2* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *1* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *2*. Tačka *B* elementa *1* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski. Podaci su:

$$V_B = 2\frac{m}{s},\ a_B = 1\frac{m}{s^2},\ \overline{OA} = 1\,m,\ \overline{AB} = 1\,m,\ \alpha = 30^0,\ \beta = 0.$$

Nacrtati sistem u razmeri, poštujući zadate dužine i uglove i odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja elemenata *1* i *2*?

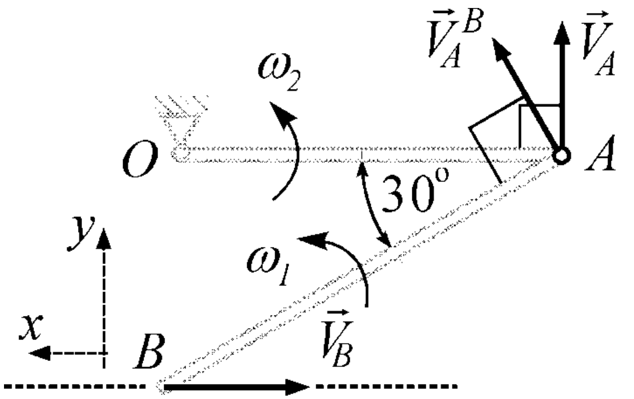


Položaj sistema za zadate podatke prikazan je na slici



Analiza brzina

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 1 i intenzitet brzine tačke *A*:



$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_A^B \qquad V_A^B = \overline{AB}\cdot\omega_1 = 1\cdot\omega_1$$

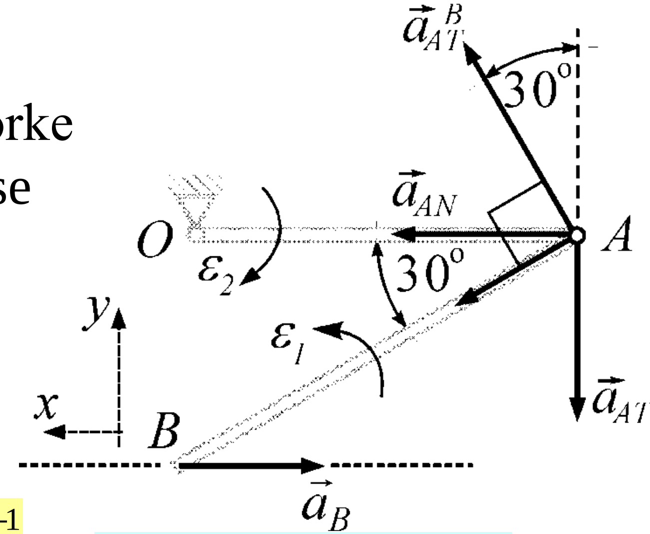
$$x: \quad 0 = -2 + 1\cdot\omega_1\cdot 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 4\ s^{-1}$$

$$y: \quad V_A = 0 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_A}{\overline{OA}} = 2\sqrt{3}\ s^{-1}$$

Zbog pripadnosti tačke *A* elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, vektoru brzine te tačke, prikazanom na slici, poznat je pravac, smer je pretpostavljen, dok mu je intenzitet nepoznat, pošto ga određuje formula $V_A = \overline{OA}\cdot\omega_2$, u kojoj je ugaona brzina ω_2 nepoznata. Za smer vektora $\vec{V}_A^B$ učinjena je pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_1). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω_1 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaona ubrzanja elemenata 1 i 2:



$$\underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\vec{a}_{AT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{B}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AN}^{B}}} + \underline{\vec{a}_{AT}^{B}}$$

$$x: 12 + 0 = -1 + 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot\varepsilon_1\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varepsilon_1 = 26 - 16\sqrt{3}\ s^{-1}$$

$$y: 0 - \overline{OA}\cdot\varepsilon_2 = 0 - 16\cdot\frac{1}{2} + \left(26 - 16\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 32 - 13\sqrt{3}\ s^{-2}$$

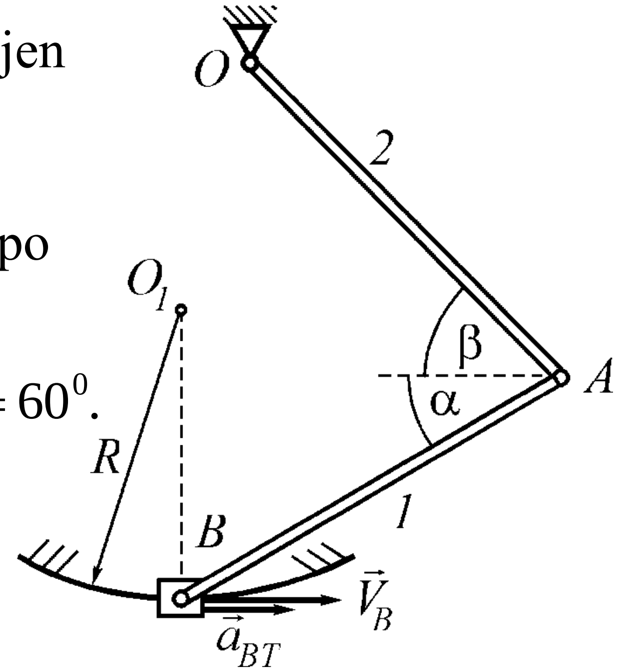
$$a_{AT}^{B} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_1 = 1\cdot\varepsilon_1$$

$$a_{AN}^{B} = \overline{AB}\cdot\omega_1^{\,2} = 16\ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_2^{\,2} = 12\ \frac{m}{s^2}$$

Zbog pripadnosti tačke A elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke, prikazane na slici, su $\vec{a}_{AN}$ i $\vec{a}_{AT}$. Intenzitet komponente $\vec{a}_{AT}$ je nepoznat, s obzirom da ga određuje formula $a_{AT} = \overline{OA}\cdot\varepsilon_2$ koja sadrži nepoznatu ε_2. Za smerove vektora $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_{AT}^{B}$ učinjene su pretpostavke. Zbog činjenice da su rešenja za ε_2 i ε_1 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 30^0$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\cos 30^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$

Primer 2.8 Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *2* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *1* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *2*. Tačka *B* elementa *1* se kreće po kružnoj putanji poluprečnika *R=1m*. Podaci su:



$$V_B = 1\frac{m}{s},\ a_{BT} = 2\frac{m}{s^2},\ \overline{OA} = 2\ m,\ \overline{AB} = 2\ m,\ \alpha = 30^0,\ \beta = 60^0.$$

Nacrtati sistem u razmeri, poštujući zadate dužine i uglove i odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja elemenata *1* i *2*?

Analiza brzina

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 1 i intenzitet brzine tačke *A*:

$$\underline{\vec{V}_A} = \underline{\underline{\vec{V}_B}} + \underline{\vec{V}_A^B}$$

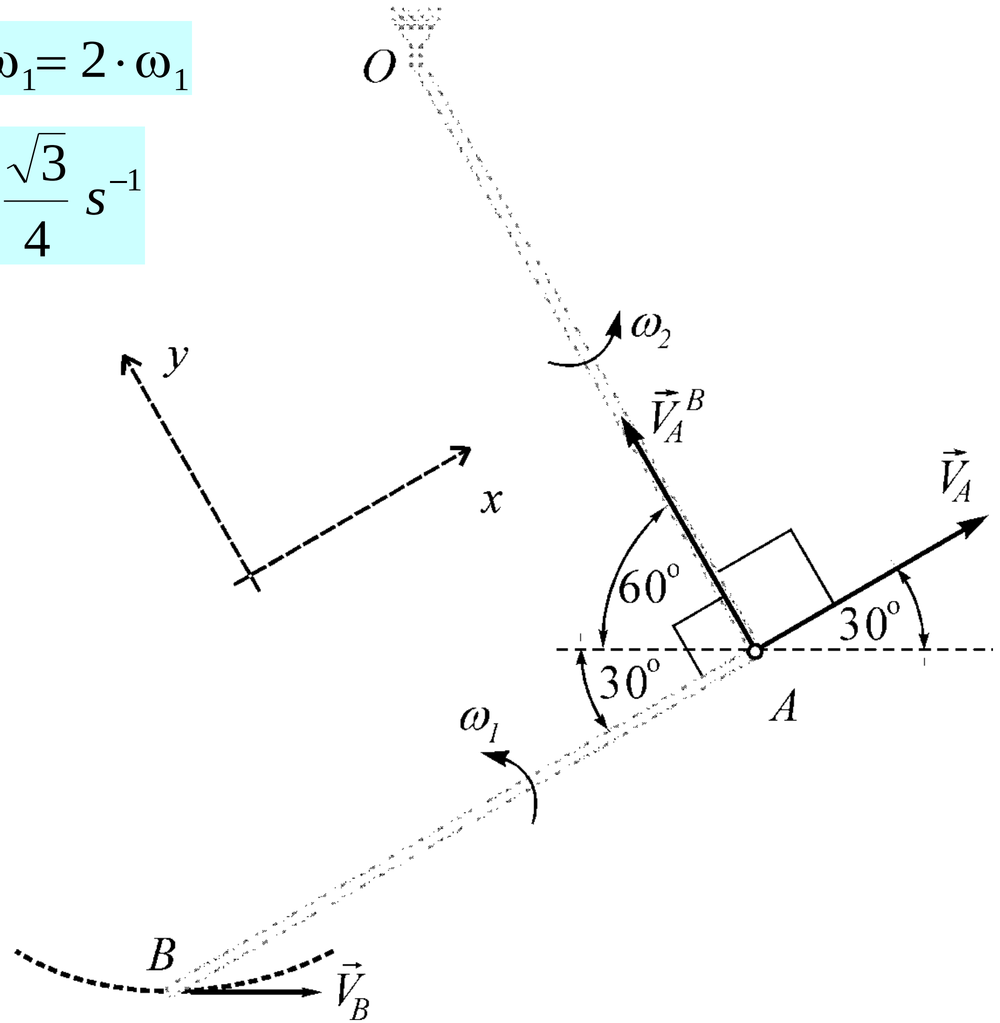
$$V_A^B = \overline{AB} \cdot \omega_1 = 2 \cdot \omega_1$$

$$x: \quad V_A = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{V_A}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, s^{-1}$$

$$y: \quad 0 = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \omega_1$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{4}\, s^{-1}$$



Zbog pripadnosti tačke A elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, vektoru brzine te tačke, prikazanom na slici, poznat je pravac, smer je pretpostavljen, dok mu je intenzitet nepoznat, pošto ga određuje formula, $V_A = \overline{OA} \cdot \omega_2$ u kojoj je ugaona brzina ω_2 nepoznata.

Za smer vektora $\vec{V}_A^B$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_1). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω_1 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona ubrzanja elemenata 1 i 2:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\vec{a}_{AT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{B}_{AN}}} + \underline{\vec{a}^{B}_{AT}}$$

$$a^{B}_{AT} = \overline{AB} \cdot \varepsilon_1 = 2 \cdot \varepsilon_1$$

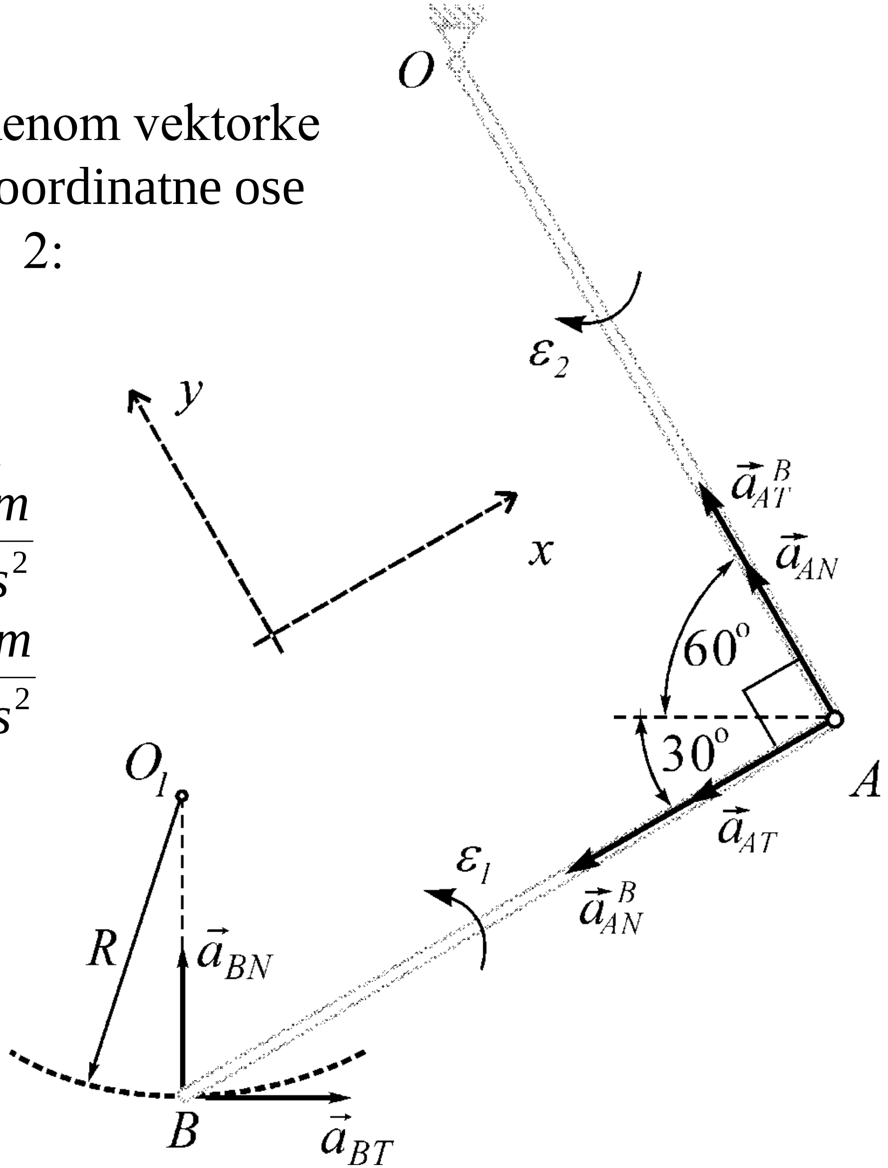
$$a^{B}_{AN} = \overline{AB} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{8}\frac{m}{s^2}$$

$$a_{AN} = \overline{OA} \cdot \omega_2^2 = \frac{3}{8}\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^2}{R} = 1\frac{m}{s^2}$$

$$x: \quad 0 - a_{AT} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} + 0$$

$$y: \quad \frac{3}{8} + 0 = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 2\varepsilon_1$$



Analiza ubrzanja

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona ubrzanja elemenata 1 i 2:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\vec{a}_{AT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AN}^{B}}} + \underline{\vec{a}_{AT}^{B}}$$

$$a_{AT}^{B} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_1 = 2\cdot\varepsilon_1$$

$$a_{AN}^{B} = \overline{AB}\cdot\omega_1^{2} = \frac{1}{8}\,\frac{m}{s^2}$$

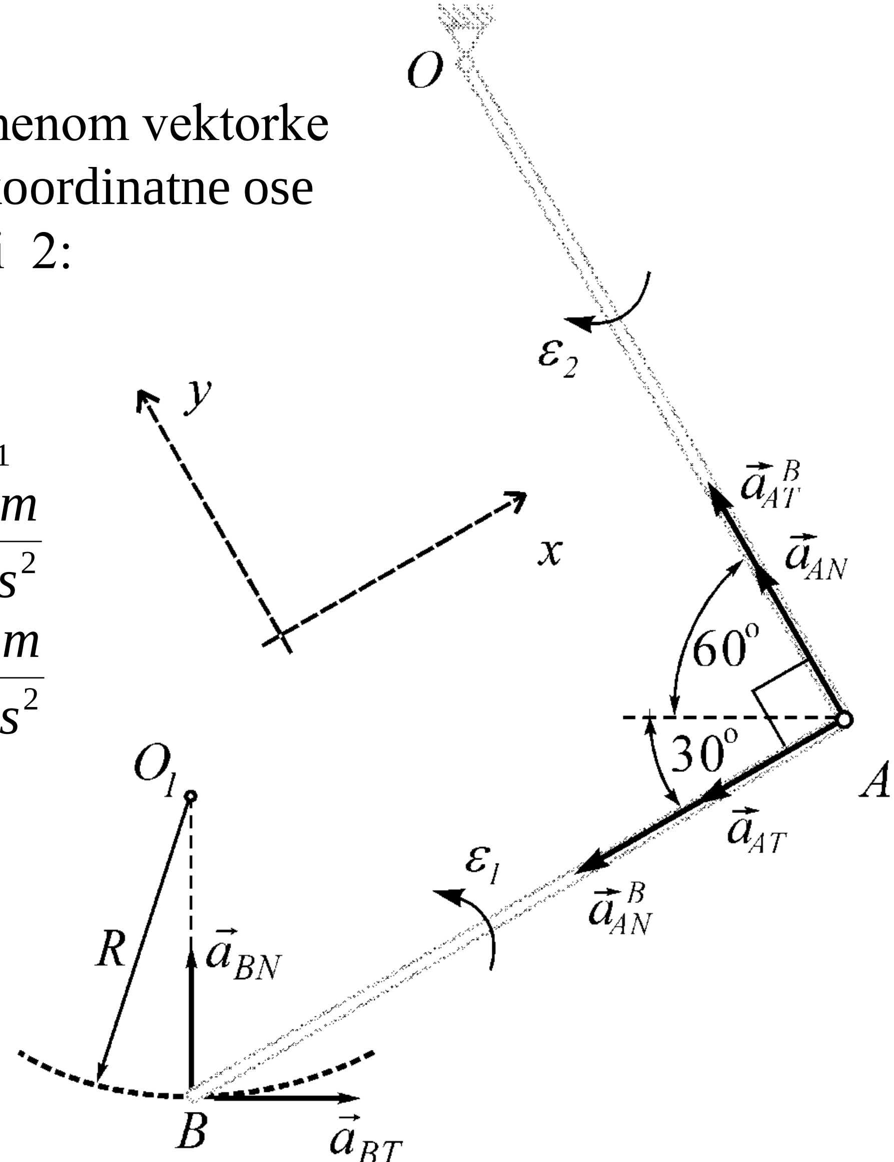
$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_2^{2} = \frac{3}{8}\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^{2}}{R} = 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$x:\quad 0 - a_{AT} = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} + 0$$

$$y:\quad \frac{3}{8} + 0 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 0 + 2\varepsilon_1$$

$$\Rightarrow a_{AT} = -\left(\frac{3}{8} + \sqrt{3}\right)\frac{m}{s^2},\qquad \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_{AT}}{\overline{OA}} = -\left(\frac{3}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s^{-2}$$



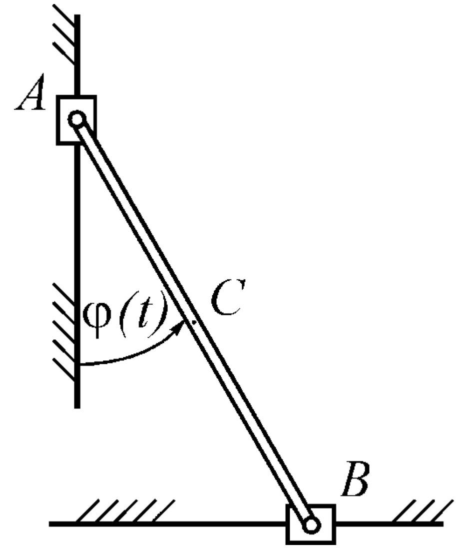
$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{11}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^{-2}$$

Zbog pripadnosti tačke A elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke su $\vec{a}_{AN}$ i $\vec{a}_{AT}$. Intenzitet komponente $\vec{a}_{AT}$ je nepoznat, s obzirom da ga određuje formula $a_{AT} = \overline{OA} \cdot \varepsilon_2$ koja sadrži nepoznatu ε_2. Za smerove vektora $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}^{B}_{AT}$ učinjene su pretpostavke. Zbog činjenice da su rešenja za ε_2 i ε_1 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 30^0$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\cos 30^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.

Primer 2.9 Štap AB, prikazan na slici vrši ravno kretanje. Tačka A se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka B se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

$\varphi(t) = t^2 - 3t + 2 \quad \varphi[rad], t[s]; \overline{AB} = 2\,m; \ \bar{t} = 1\,s.$

Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka A, B i C (gde je tačka C na sredini štapa) u tom položaju?



Ugaona brzina i ugaono ubrzanje:

$\dot{\varphi}(t) = 2t - 3 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega = 1\,s^{-1}, \ddot{\varphi}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 2\,s^{-2}.$

U datom trenutku štap se nalazi u vertikalnom položaju.

Ugaona brzina je, zbog predznaka -, smera suprotnog od porasta ugla rotracije a ugaono ubrzanje je, zbog predznaka +, istog smera kao što je porast ugla rotacije.

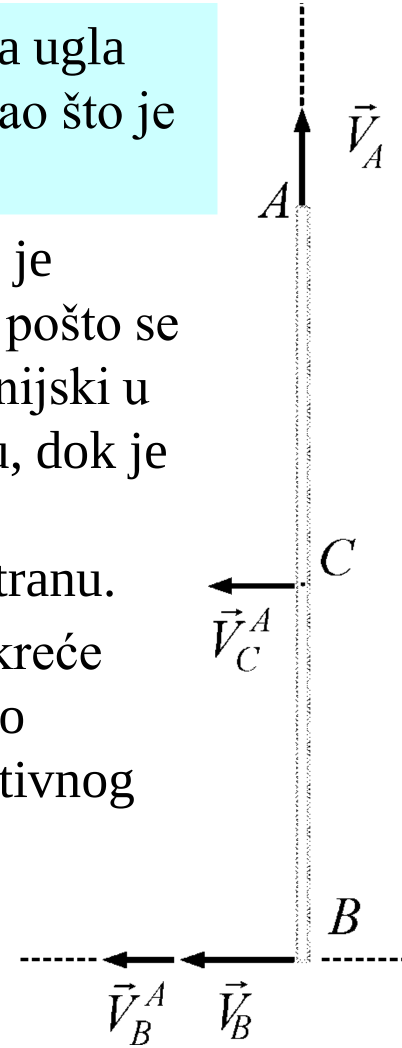
Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\underline{\vec{V}_B^A}} \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2$$

$$y: \quad 0 = V_A + 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 0$$

$$x: \quad -V_B = 0 - 2 \quad \Rightarrow \quad V_B = 2\,\frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke *B* je horizintalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu.



Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše. Zbog činjenice da je rešenja za V_B pozitivnog predznaka, tačna je pretpostavka o smeru tog vektora.

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC}\cdot\omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - 1 = -1$$

$$y: \quad V_{Cv} = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}{}^2 + V_{Cy}{}^2} = 1\frac{m}{s}$$

Ovde je zbog $V_A = 0$, vektor $\vec{V}_C$ isti kao i vektor $\vec{V}_C^A$.

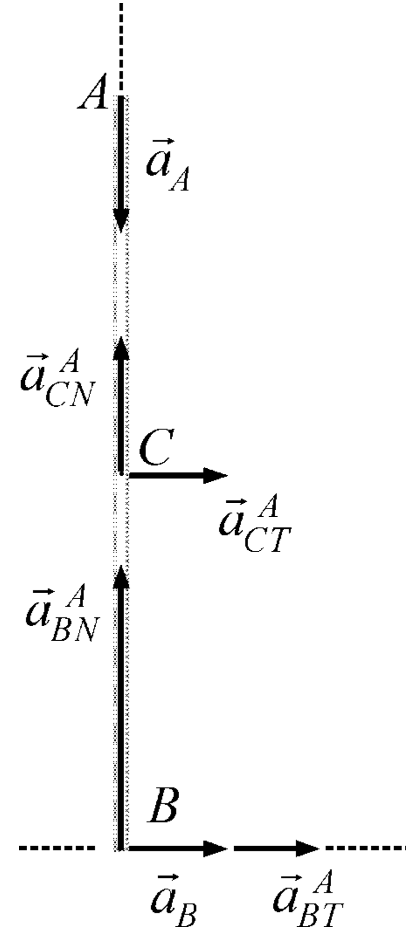
Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorke formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se intenziteti ubrzanja tačaka A i B:

$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}^{A}}}, \quad a_{BT}^{A} = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 4\,\frac{m}{s^2},\ a_{BN}^{A} = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}.$$

$$x: \quad a_B = 0 + 0 + 4 \quad \Rightarrow a_B = 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$y: \quad 0 = -a_A + 2 + 0 \quad \Rightarrow a_A = 2\,\frac{m}{s^2}$$



Vektor ubrzanja tačke B je horizintalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu.

Vektor ubrzinja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_B$ i $\vec{a}_A$ pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

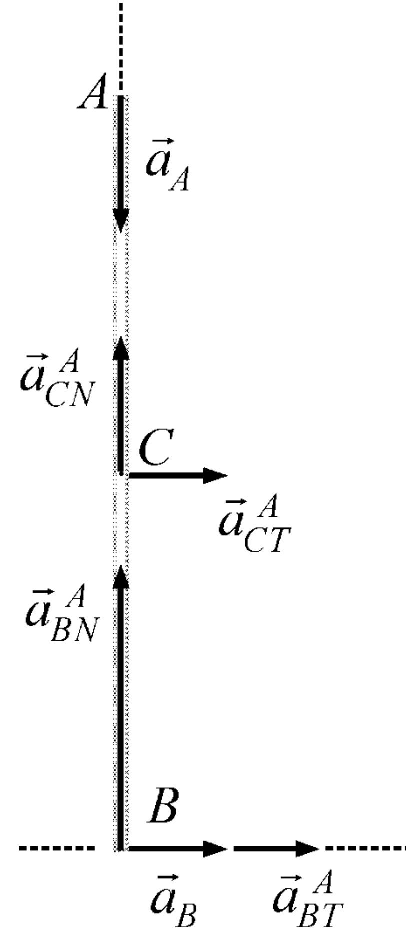
Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorke formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se intenziteti ubrzanja tačaka A i B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^A + \vec{a}_{BT}^A, \quad a_{BT}^A = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 4\,\frac{m}{s^2}, \; a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}.$$

$$x: \quad a_B = 0 + 0 + 4 \quad \Rightarrow a_B = 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$y: \quad 0 = -a_A + 2 + 0 \quad \Rightarrow a_A = 2\,\frac{m}{s^2}$$



Vektor ubrzanja tačke B je horizintalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu.

Vektor ubrzinja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_B$ i $\vec{a}_A$ pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CN}^A + \vec{a}_{CT}^A$$

$$a_{CN}^A = \overline{AC} \cdot \omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{CT}^A = \overline{AC} \cdot \varepsilon = 2\,\frac{m}{s^2}$$

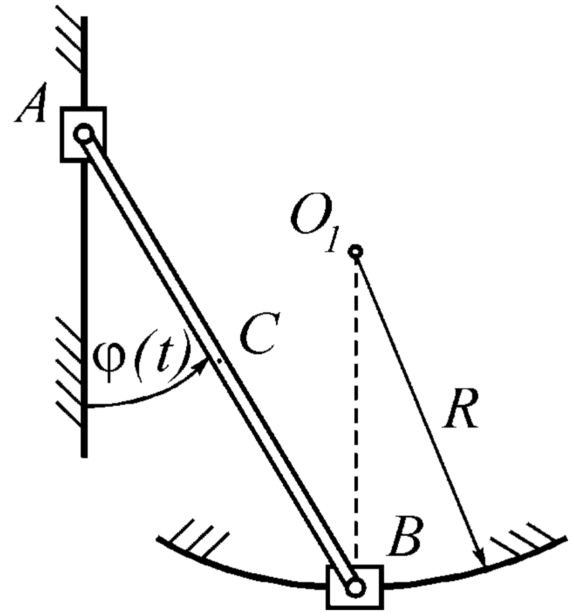
$$x: \quad a_{Cx} = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$y: \quad a_{Cy} = -2 + 1 + 0 = -1$$

$$\Rightarrow a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{5}\,\frac{m}{s^2}$$

Primer 2.10 Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se, posredstvom klizača, kreće po kružnoj putanji poluprenika $R = 1\,m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su: $\varphi(t) = t^2 - t + \pi/6 \quad \varphi[rad], t[s]; \; \overline{AB} = 2\,m; \; \bar{t} = 1\,s.$

Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A*, *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) u tom položaju?



Ugaona brzina:

$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1 \Rightarrow \dot{\varphi}(1) = 1$

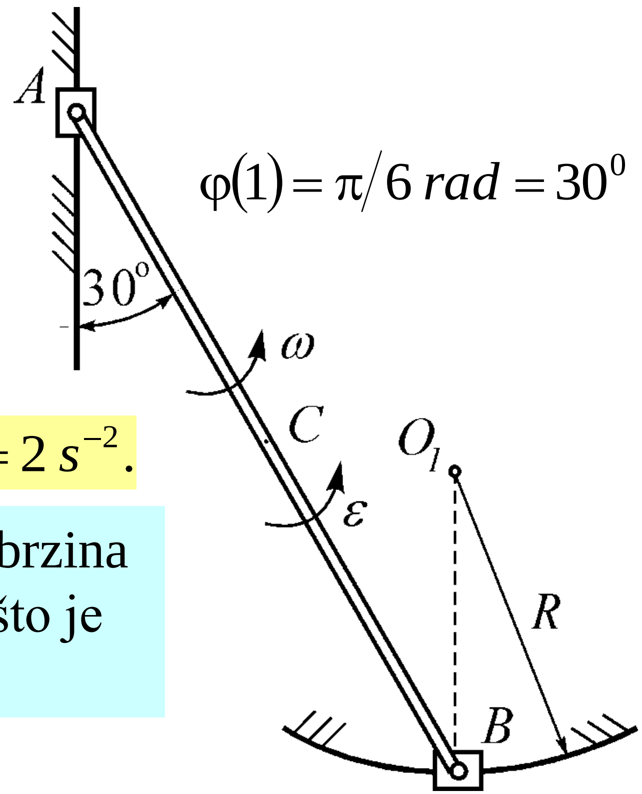
$\Rightarrow \quad \omega = 1\,s^{-1}$

Ugaono ubrzanje:

$\ddot{\varphi}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{\varphi}(1) = 2 \Rightarrow \varepsilon = 2\,s^{-2}.$

Zbog $\dot{\varphi}(1) > 0$, ugaona brzina štapa ima isti smer kao što je porast ugla rotacije

$\varphi(1) = \pi/6\,rad = 30^0$



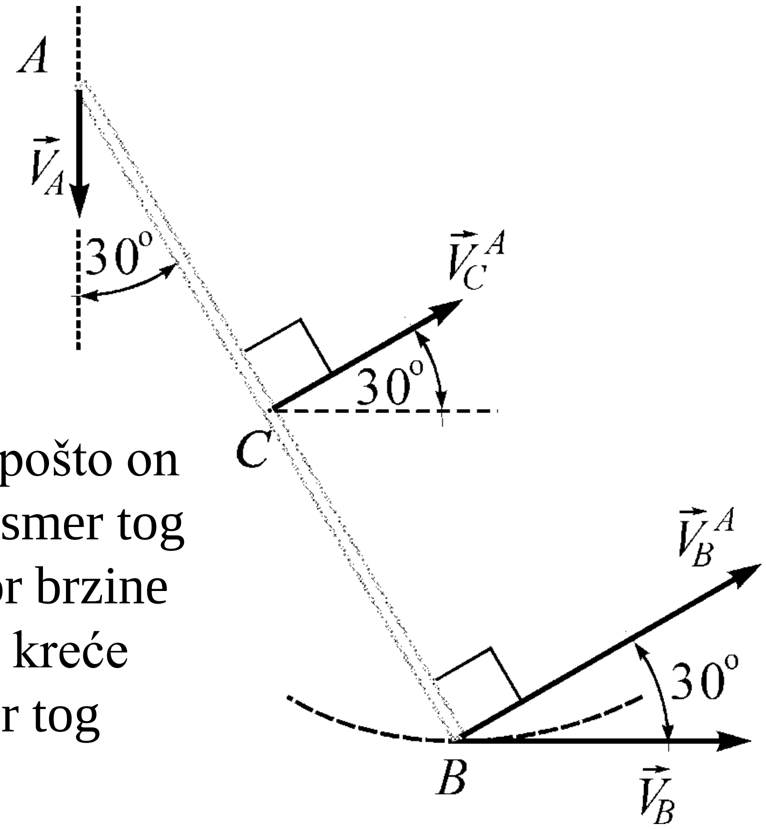
Zbog $\ddot{\varphi}(1) > 0$, ugaono ubrzanje štapa ima isti smer kao što je porast ugla rotacije

Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\underline{\vec{V}_B^A}} \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2$$

$$y: \quad 0 = -V_A + 2\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_B = 0 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke *B* je horizintalnog pravca, pošto on mora biti u pravcu tangente na putanju, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu. Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže.

Zbog činjenice da su rešenja za V_A i V_B pozitivnog predznaka, tačne su pretpostavke o smerovima tih vektora.

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC}\cdot\omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y: \quad V_{Cy} = -1 + 1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} = 1\,\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\vec{a}_{A}} + \underline{\underline{\vec{a}^{A}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{A}_{BT}}}$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^{\,2}}{R} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

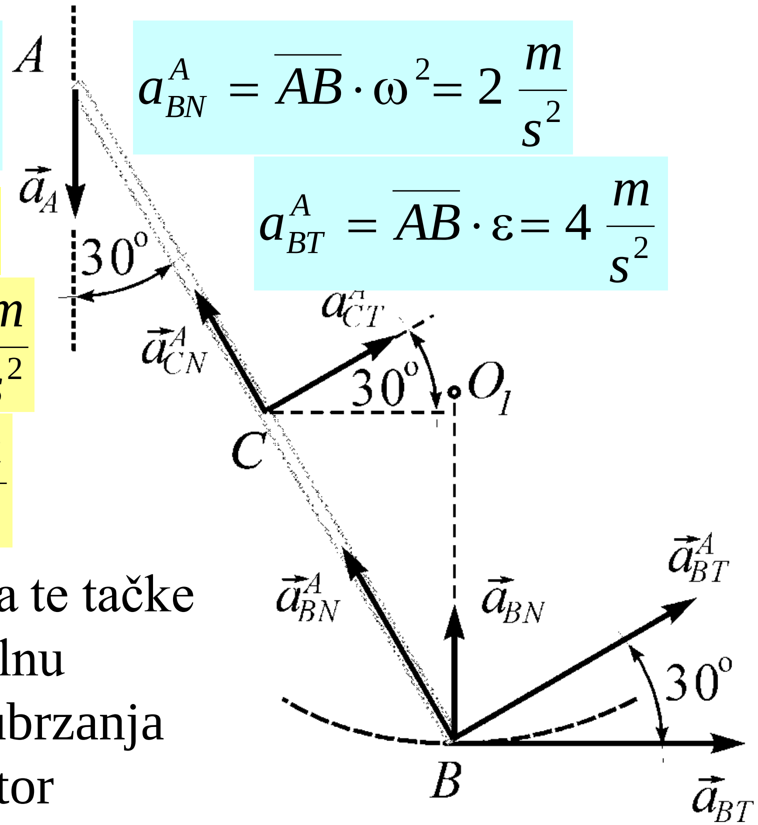
$$a_B = \sqrt{a_{BN}^{\;2} + a_{BT}^{\;2}}$$

$$a^{A}_{BN} = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$a^{A}_{BT} = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: 0 + a_{BT} = 0 - 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; a_{BT} = 2\sqrt{3} - 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$y: 3 + 0 = -a_A + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a_A = \sqrt{3} - 1\,\frac{m}{s^2}$$



Pošto je putanja tačke *B* kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Smer tangencijalne komponente ubrzanja tačke *B* je, po pretpostavci, u desnu stranu. Vektor ubrzinja tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u verti-kalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_{BT}$ i $\vec{a}_{A}$ predznaka +, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{A}_{CN}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{A}_{CT}}}$$

$$a^{A}_{CN} = \overline{AC}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2},\quad a^{A}_{CT} = \overline{AC}\cdot\varepsilon = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: a_{Cx} = 0 - 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$y: a_{Cy} = -\left(\sqrt{3} - 1\right) + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; a_C = \sqrt{a_{Cx}^{\;2} + a_{Cy}^{\;2}}$$