11. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog obrtanja. Ugaona brzina preko n[o/min].

Jednoliko (ravnomerno) obrtno kretanje (obrtanje) $\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = const.$

$d\varphi = \omega dt$ - diferencijalna jednačina

$\varphi(0) = 0$ - početni uslov

$\Rightarrow \varphi(t) = \omega \cdot t$ - Zakon ugla rotacije

Jednako (ravnomerno) promenljivo obrtanje

Ovde je ε (ugaono ubrzanje, usporenje) konstantno

Neka su početni uslovi: $\varphi(0) = 0,$ $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$

$\ddot{\varphi} = \varepsilon > 0$ (jednako ubrzano), ε-ugaono ubrzanje ili

$\ddot{\varphi} = -\varepsilon < 0$ (jednako usporeno), ε-ugaono usporenje

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \varepsilon = const. \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega_0 + \varepsilon t && \text{-Zakon ugaone brzine} \\ &d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} && \text{-Zakon ugla rotacije} \end{aligned}\right\} \text{jednako ubrzano}$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\varepsilon = const. \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega_0 - \varepsilon t && \text{-Zakon ugaone brzine} \\ &d\varphi = (\omega_0 - \varepsilon t)dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} && \text{-Zakon ugla rotacije} \end{aligned}\right\} \text{jednako usporeno}$$

Na osnovu zakona ugla rotacije kod ravnomernog obrtanja, ugaonu brzinu ω [*1/s*] određuje formula $\omega = \varphi/t$, gde je t [*s*] proteklo vreme a φ [*rad*] je prebrođeni ugao rotacije koji odgovara proteklom vremenu.

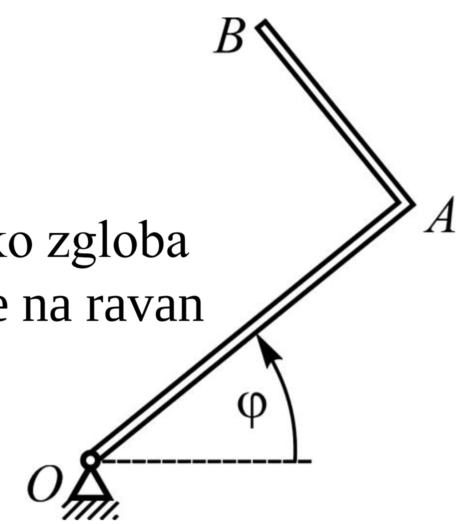
Ako bi telo pri ravnomernom obrtnom kretanju učinilo n obrtaja u jednom minutu (dakle, dimenzija za n je [*o/min*].), onda bi proteklom vremenu $t = 60\ s$ odgovarao prebrođeni ugao rotacije $\varphi = 2\pi \cdot n\ \ rad$.

Uvrštavanjem $t = 60\ s$ i $\varphi = 2\pi \cdot n\ rad$ u formulu $\omega = \varphi/t$, dobija se

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi n}{30} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Dobijene jednakosti predstavljaju traženu vezu između ugaone brzine ω izražene u radijanima u sekundi $\omega\,[rad/s]$ ($[rad/s] = [1/s] = [s^{-1}]$) i n [*o/min*].

Pimer 2.1 Pravougli ugaonik *OAB* obrće se u ravni crteža oko zgloba *O* (tj. obrće se oko ose koja prolazi kroz zglob *O* i upravna je na ravan crteža). Dužine krakova ugaonika su $\overline{OA} = \sqrt{3}\ m$ i $\overline{AB} = 1\ m$. Jednačina obrtnog kretanja ugaonika je $\varphi(t) = \pi/6 + t - t^2$ Odrediti položaj, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje ugaonika u trenutku $t = 1\ s$? Zatim u tom trenutku odrediti i skicirati vektore brzina i komponenata ubrzanja tačaka *A* i *B*?

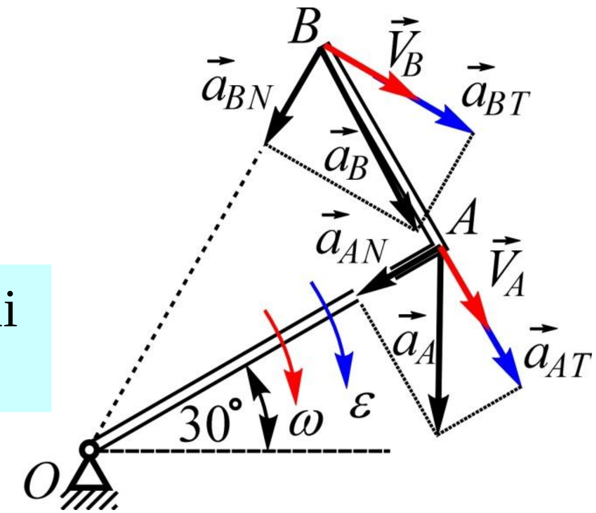


Ugaona brzina i ugaono ubrzanje:

$$\dot{\varphi}(t) = 1 - 2t \Rightarrow \dot{\varphi}(1) = -1 \Rightarrow \omega = 1\, s^{-1}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -2 \Rightarrow \ddot{\varphi}(1) = -2 \Rightarrow \varepsilon = 2\, s^{-1}$$

Smerovi za ω i ε su, zbog predznaka „minus“, suprotni od porasta ugla φ. Dakle, u smeru kazaljke na satu.



Zbog $\varphi(1) = \pi/6\ rad$ položaj ugaonika je takav da njegov krak *OA* gradi sa horizontalom ugao od 30°.

Iz pravouglog trougla *OAB* dobija se dužina njegove hipotenuze *OB*:

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2\ m$$

Intenziteti traženih brzina su: $V_A = \overline{OA} \cdot \omega = \sqrt{3}\ m/s$, $V_B = \overline{OB} \cdot \omega = 2\ m/s$

Intenziteti traženih komponenata ubrzanja su:

$$a_{AN} = \overline{OA} \cdot \omega^2 = \sqrt{3}\ m/s^2,\quad a_{AT} = \overline{OA} \cdot \varepsilon = 2\sqrt{3}\ m/s^2,$$

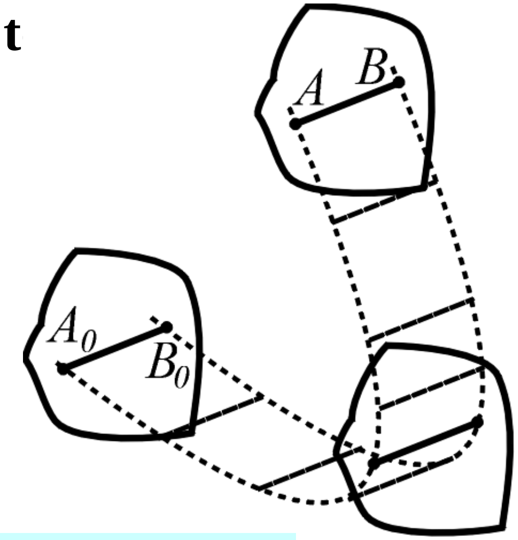
$$a_{BN} = \overline{OB} \cdot \omega^2 = 2\ m/s^2,\quad a_{BT} = \overline{OB} \cdot \varepsilon = 4\ m/s^2.$$

Na osnovu ovih vrednosti intenziteti ubrzanja tačaka *A* i *B* su:

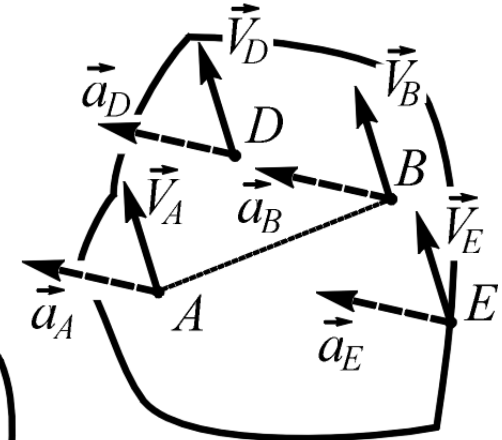
$$a_A = \sqrt{a_{AN}{}^2 + a_{AT}{}^2} = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}\ m/s^2,\ a_B = \sqrt{a_{BN}{}^2 + a_{BT}{}^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$

12. Translatorno kretanje krutog t

Kod translatornog kretanja tela svaka njegova uočena duž, npr. AB (Sl.1), tokom kretanja ne menja svoj pravac (tj. u svakom trenutku je paralelna svom početnom pravcu A_0B_0). Zbog toga je: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$.



1)



2)

Vektori brzina svih tačaka tela koje se translatorno kreće u nekom tenutku vremena moraju biti isti (Sl.2). Vektori ubrzanja takođe.

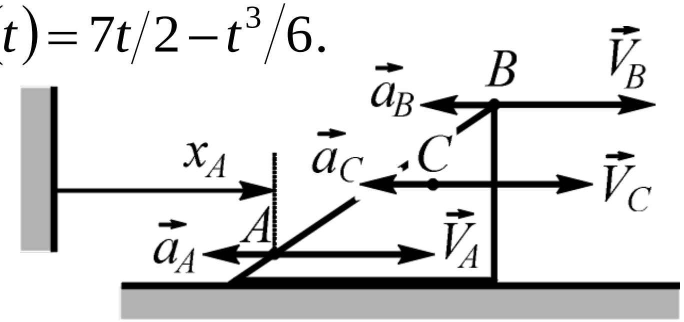
$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_D = \vec{V}_E = \dots$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_D = \vec{a}_E = \dots$$

Dokaz: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB},\ \frac{d}{dt}\Big|\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A,\ \frac{d}{dt}\Big|\vec{V}_B = \vec{V}_A \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A$

Primer 2.2 Trougaona ploča kreće se translatorno pravolinijski. Jednačina kretanja njene tačke A, a samim tim i ploče, je: $x_A(t) = 7t/2 - t^3/6$.

Odrediti i skicirati vektore brzina i ubrzanja tačaka A i B i C u trenutku $t = 1\,s$?



Brzina i ubrzanje tela (odnosno, tačaka tela):

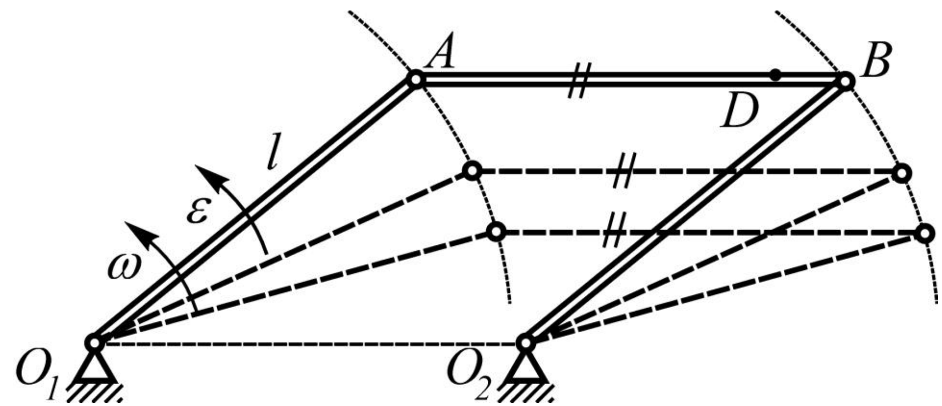
$$\dot{x}_A(t) = 7/2 - t^2/2 \Rightarrow \dot{x}_A(1) = +3 \Rightarrow V_A = V_B = V_C = 3\ m/s$$

Vektori brzina imaju smer koji se, zbog predznaka „plus“, poklapa sa smerom porasta koordinate x_A.

$$\ddot{x}_A(t) = -t \Rightarrow \ddot{x}_A(1) = -1 \Rightarrow a_A = a_B = a_C = 1\ m/s^2$$

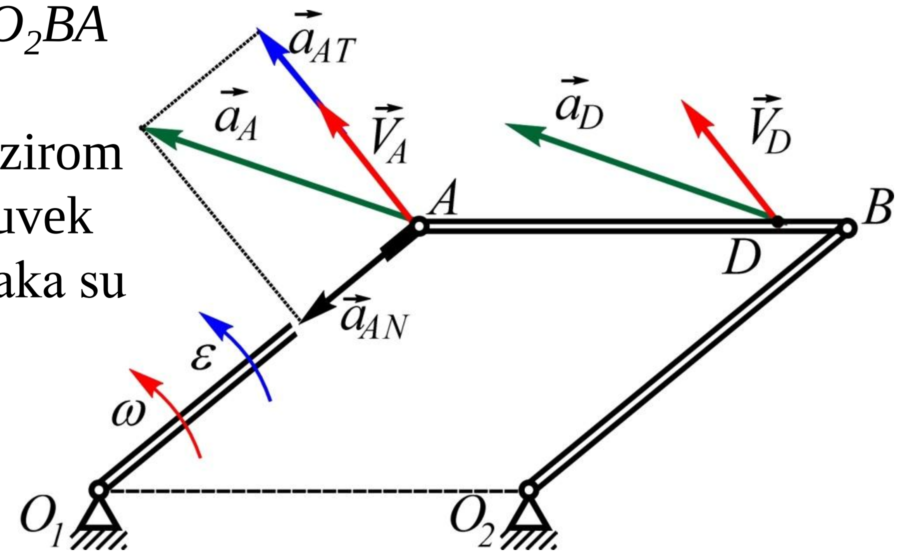
Vektori ubrzanja imaju smer koji je, zbog predznaka „minus“, suprotan od smera porasta koordinate x_A.

Primer 2.3 Ravanski mehanizam prikazan na slici (zglobni četvorougao) sačinjen je od dva identična štapa ($\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = l$) i horizontalnog štapa AB ($\overline{O_1O_2} = \overline{AB}$) koji je zglobno povezan sa štapovima O_1A i O_2B.



Štapovi O_1A i O_2B vrše obrtanja oko zglobova O_1 i O_2. U položaju prikazanom na slici ugaona brzina štapa O_1A je ω a ugaono ubrzanje je ε, smerova datih na slici. U prikazanom položaju odrediti brzinu i ubrzanje proizvoljne tačke D štapa?

Zbog datih jednakosti četvorougao O_1O_2BA je uvek paralelogram a štap AB vrši krivolinijsko translatorno kretanje s obzirom da je u svakom trenutku istog pravca (uvek je horizontalan) a putanje njegovih tačaka su krivolinijske (kružne).



Odredimo prvo vektore brzine i ubrzanja tačke A, štapa AB, koristeći činjenicu da tačka pripada i štapu O_1A, čije je obrtno kretanje u tom položaju definisano veličinama ω i ε. Intenziteti vektora $\vec{V}_A$, $\vec{a}_{AN}$, $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_A$, prikazanih na slici su:

$$V_A = l \cdot \omega,\ \ a_{AN} = l \cdot \omega^2,\ \ a_{AT} = l \cdot \varepsilon,\ \ a_A = \sqrt{a_{AN}{}^2 + a_{AT}{}^2} = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Zbog činjenice da štap AB vrši translatorno kretanje imamo da je

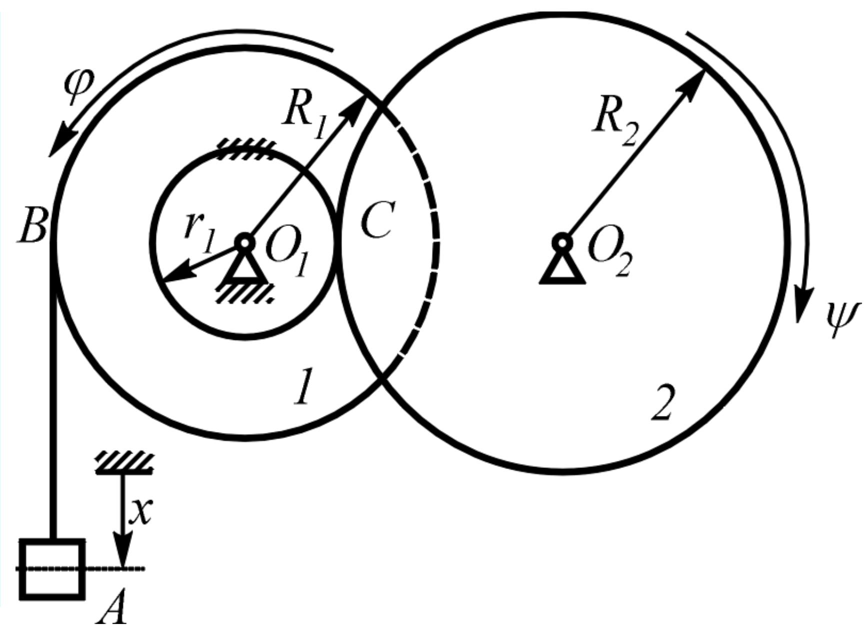
$$\vec{V}_D = \vec{V}_A \quad \text{i} \quad \vec{a}_D = \vec{a}_A.$$

$$\Rightarrow \quad V_D = V_A = l \cdot \omega,\ \ a_D = a_A = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

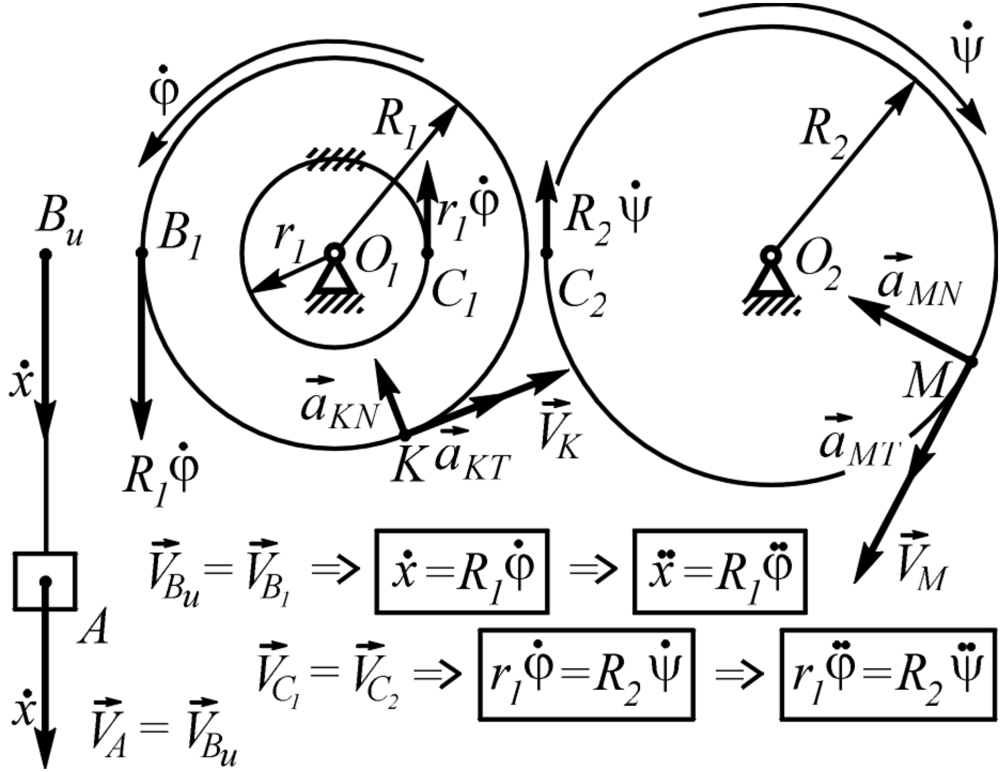
Primer 2.3 Sistem čine teret *A*, koji se kreće vertikalno naniže, i dva doboša *1* i *2*, koji vrše obrtanja oko zglobova O_1 i O_2, postavljenih u njihovim centrima. Doboš *1* je sačinjen od dva kruto vezana diska, poluprečnika r_1 i R_1 a doboš 2 je poluprečnika R_2. Nerastegljivo uže, namotano na veći disk doboša *1* na svom kraju je vezano za teret *A*. Uže pri kretanju ne proklizava u odnosu na disk. Pri kretanju sistema, manji disk doboša *1* uz pomoć trenja prouzrokuje obrtanje doboša *2* tako da nema proklizavanja između njih.

Odrediti zakone obrtnih kretanja doboša $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ ako je zakon kretanja tereta $x(t)=bt^2/2$? Takođe odrediti i skicirati vektore brzine i ubrzanja najudaljenijih tačaka *K* i *M* doboša *1* i *2*, respektivno, u trenutku $t = 1\ s$? Veličine r_1, R_1, R_2 i b smatrati poznatim.

Mehanički sistem, prikazan na slici ima jedan stepen slobode kretanja zato što jedna koordinata, na primer *x*, određuje u potpunosti njegov položaj. To znači da sve druge koordinate, kao što su ovde φ i ψ, mogu biti izražene preko *x*. Za nalaženje traženih veza između ovih koordinata traže se prvo veze na nivou brzina i ugaonih brzina



Važno je znati da ako između dva elementa koji se sprežu nema proklizavanja (tj. odvija se kotrljanje bez klizanja) vektori brzina dodirnih tačaka tih elemenata moraju biti jednaki. Na taj način je na slici, gde su odvojeno prikazani teret sa pravolinijskim delom nerastegljivog užeta, doboš *1* i doboš *2*, konstatovana jednakost brzina dodirnih tačaka ovih doboša zbog čega je $r_1\dot{\varphi} = R_2\dot{\psi}$.



Takođe je važno znati da, kada namotano uže na doboš pri kretanju (odmotavanju ili namotavanju) ne proklizava u odnosu na njega vektori brzina tačke užeta i tačke doboša nad kojom se ona nalazi su jednaki. Na taj način je na slici konstatovana jednakost brzina tačke B_u na užetu i tačke B_1 doboša *1* nad kojom se ona nalazi što je dovelo do veze $\dot{x} = R_1\dot{\varphi}$

Diferenciranjem gornjih veza po vremenu dobijaju se sledeće veze između ubrzanja $r_1\ddot{\varphi} = R_2\ddot{\psi}$, $\ddot{x} = R_1\ddot{\varphi}$.

Integraljenjem dobijenih veza uz nulte početne uslove (to su takvi uslovi gde se podrazumeva da koordinate φ i ψ imaju vrednost nula kada je i x koordinata jednaka nuli) dobijaju se veze između samih koordinata $r_1\varphi = R_2\psi,\ x = R_1\varphi.$

Na prethodnoj slici konstatovana je i jednakost brzina tačaka A i B_u , koja je posledica činjenice da pravolinijski deo užeta vrši translatorno kretanje.

Na osnovu veza koordinata lako se dobijaju traženi zakoni:

$$\varphi(t) = \frac{x(t)}{R_1} = \frac{b}{R_1}t^2,\ \psi(t) = \frac{r_1\varphi(t)}{R_2} = \frac{r_1 b}{R_2 R_1}t^2.$$

Pošto izvodi po vremenu zadate jednačine kretanja daju $\dot{x}(t) = bt$ i $\ddot{x}(t) = b,$ a s obzirom na dobijene veze, intenziteti vektora brzina i komponenenata ubrzanja tačaka K i M u funkciji vremena su:

$$V_K(t) = R_1\dot{\varphi}(t) = \dot{x}(t) = bt,\ a_{KT}(t) = R_1\ddot{\varphi}(t) = \ddot{x}(t) = b,\ a_{KN}(t) = R_1\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{\dot{x}(t)^2}{R_1} = \frac{b^2t^2}{R_1},$$

$$V_M(t) = R_2\dot{\psi}(t) = r_1\dot{\varphi}(t) = \frac{r_1}{R_1}\dot{x}(t) = \frac{r_1}{R_1}bt,\ a_{MT}(t) = R_2\ddot{\psi}(t) = r_1\ddot{\varphi}(t) = \frac{r_1}{R_1}\ddot{x}(t) = \frac{r_1}{R_1}b,$$

$$a_{MN}(t) = R_2\dot{\psi}(t)^2 = R_2\left(\frac{r_1}{R_1R_2}bt\right)^2 = \frac{{r_1}^2b^2t^2}{{R_1}^2R_2}.$$

Vrednosti ovih veličina, kao i intenziteta samih ubrzanja tačaka K i M u trenutku $t=1\,s$ su:

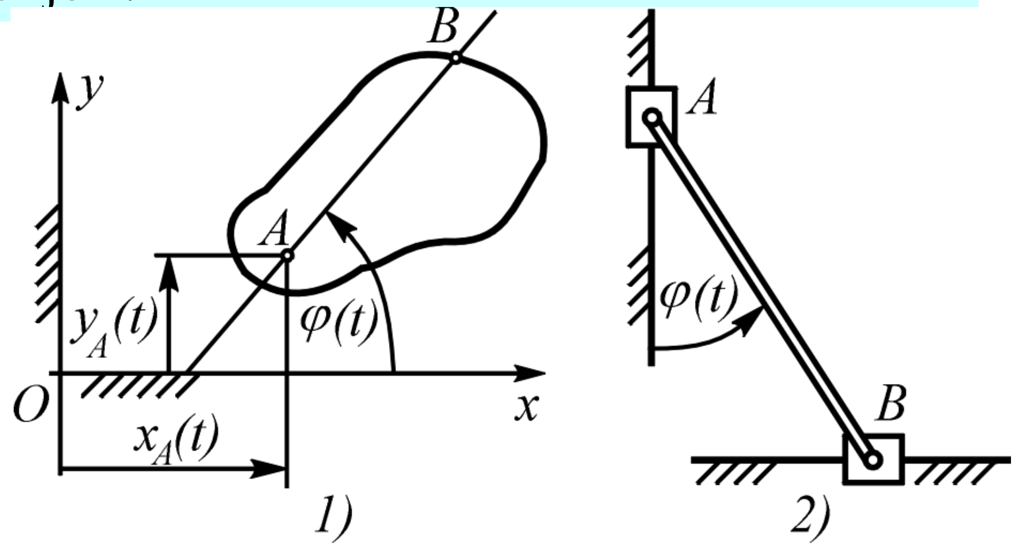
$$V_K = b,\ a_{KT} = b,\ \ a_{KN} = \frac{b^2}{R_1} \quad \Rightarrow a_K = \sqrt{a_{KT}^{\ 2} + a_{KN}^{\ 2}} = b\sqrt{1+\frac{b^2}{R_1^{\ 2}}}$$

$$V_M = \frac{r_1}{R_1}b,\ a_{MT} = \frac{r_1}{R_1}b,\ a_{MN} = \frac{r_1^{\ 2}b^2}{R_1^{\ 2}R_2} \quad \Rightarrow a_M = \sqrt{a_{MT}^{\ 2} + a_{MN}^{\ 2}} = \frac{r_1 b}{R_1}\sqrt{1+\frac{r_1^{\ 2}b^4}{R_1^{\ 2}R_2^{\ 2}}}$$

13. Ravno kretanje krutog tela. Jednačine ravnog kretanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela koje vrši ravno kretanje.

Ako se telo kreće u ravni (Sl.1) a to kretanje nije obrtanje oko ose a nije ni translatorno onda je to kretanje takvo da istovremeno sadrži i rotaciju i translaciju i naziva se ravnim kretanjem.

I kod ravnog kretanja, kao i kod obrtanja oko nepomične ose jedna od jednačina kretanja je zavisnost ugla rotacije φ od vremena *t*. Ugao rotacije φ se definiše kao ugao između ma koje nepokretne prave (ovde *x* ose) i ma koje prave koja pripada telu (ovde prave *AB*).



Potpuno identično, kao što važi za slučaj obrtanja oko nepomične ose, prvi izvod ugla rotacije po vremenu daje ugaonu brzinu tela ω a drugi izvod ugla rotacije po vremenu, tj. prvi izvod ugaone brzine, daje ugaono ubrzanje tela ε, dakle:

$\omega(t) = \dot{\varphi}(t),\ \varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t).$

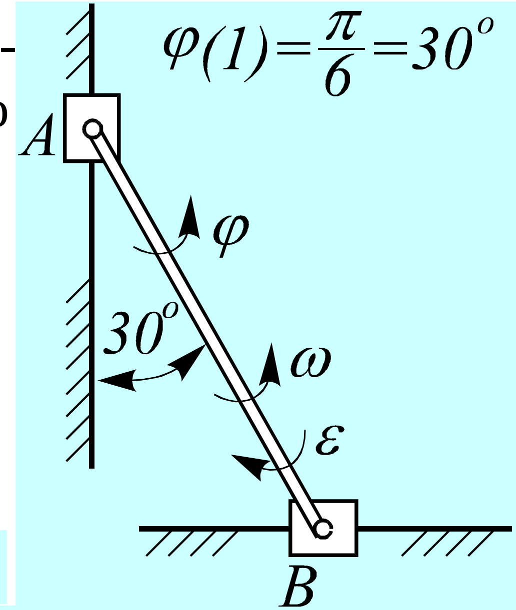
Za slobodno kruto telo koje vrši ravno kretanje (Sl.1), s obzirom da tri promenljive koordinate u potpunosti određuju položaj tela, postoje tri jednačine koje definišu njegovo kretanje. Osim već pomenute jednačine $\varphi(t)$ druge dve mogu, kao na slici 2.10-1, da budu *x* i *y* koordinata ma koje proizvoljne tačke tela.

Dakle, jednačine kretanja za slobodno kruto telo koje vrši ravno kretanje (Sl.1) su: $x_A(t),\ y_A(t),\ \varphi(t).$

Međutim, ako je telo koje vrši ravno kretanje podvrgnuto nekim vezama (kao na primer na slici 2) broj jednačina kretanja (samim tim i broj stepeni slobode kretanja) se umanjuje za broj veza. Tako, za ravno kretanje štapa kao što je prikazano na slici 2 kretanje je definisano samo jednom jednačinom kretanja $\varphi(t).$

Tačka *A* štapa je primorana da se uz pomoć klizača kreće duž vertikalne prave a slično tome tačka *B* se kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu. Da je štap na mestu *A* ili mestu *B* bio slobodan (bez klizača koji bi na tom mestu sputavao kretanje), postojala bi samo jedna veza a samim tim dve jednačine kretanja.

Primer 2.4 Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa prikazanog na prethodnoj slici 2 u trenutku t = 1 s, ako se njegov ugao rotacije menja sa vremenom po zakonu



$$\varphi(t)=\frac{\pi}{6}-2+3t-t^2.$$

S obzirom da je prvi izvod ugla rotacije po vremenu $\dot{\varphi}(t)=3-2t$, a njegova vrednost za t = 1 s je $\dot{\varphi}(1)=1$, imamo da je u tom trenutku ugaona brzina štapa $\omega=1\,s^{-1}$, sa smerom koji je, zbog predznaka "plus" u izrazu za $\dot{\varphi}(1)$, isti kao i smer porasta ugla rotacije.

S obzirom da je drugi izvod ugla rotacije po vremenu $\ddot{\varphi}(t)=-2$, a njegova je vrednost, kako za ma koje t, tako i za t = 1 s, takođe $\ddot{\varphi}(1)=-2$, imamo da je u tom trenutku ugaono ubrzanje štapa $\varepsilon=2\,s^{-1}$.

Smer ugaonog ubrzanja ε je, zbog predznaka "minus" u izrazu za $\ddot{\varphi}(1)$, suprotan u odnosu na smer porasta ugla rotacije φ.