6. Određivanje poluprečnika krivine putanje (kinematički način)

Ovde se podrazumeva definisanje procedure za određivanje poluprečnika krivine putanje (samim tim, normalnmog i tangencijalnog ubrzanja) u nekom trenutku vremena, ako su poznate jednačine kretanja *x(t)* i *y(t)* u *xOy* koordinatnom sistemu.

$$a_n(t)=\frac{V(t)^2}{R_k(t)}. \qquad \Rightarrow \quad R_k=\frac{V^2}{a_n}$$

Intenzitet brzine i njegov kvadrat su: $V(t)=\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}, \quad V^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$

Normalno ubrzanje određuje formula $a_n=\sqrt{a^2-|a_t|^2}$

gde je: $a^2=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2,$ $\quad |a_t|=|\dot{V}|=\left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right|$

Gornja formula može se izvesti sledećim diferenciranjem po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\Big| V^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2 \quad \Rightarrow \quad 2V\dot{V}=2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad |a_t|$$

Primer 1.5 U primeru 1.1 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku vremena t=1 s.

S obzirom da je u tom trenutku vremena

$\dot{x} = 1\, m/s$, $\dot{y} = 2\, m/s$, $V = \sqrt{5}\, m/s$,

$\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2\, m/s^2$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = \frac{4}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2}$$

S obzirom da je u tom trenutku

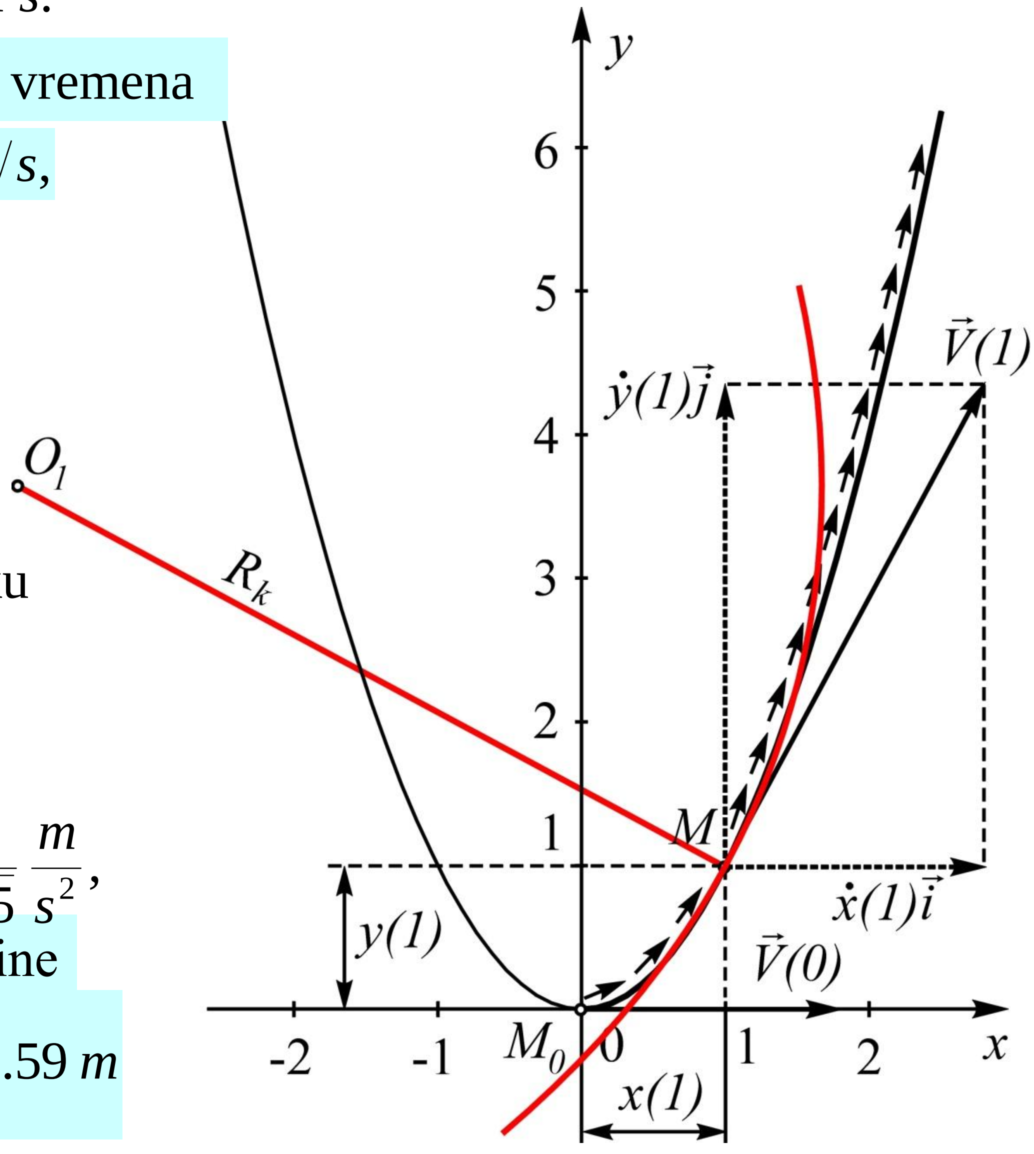
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\, m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

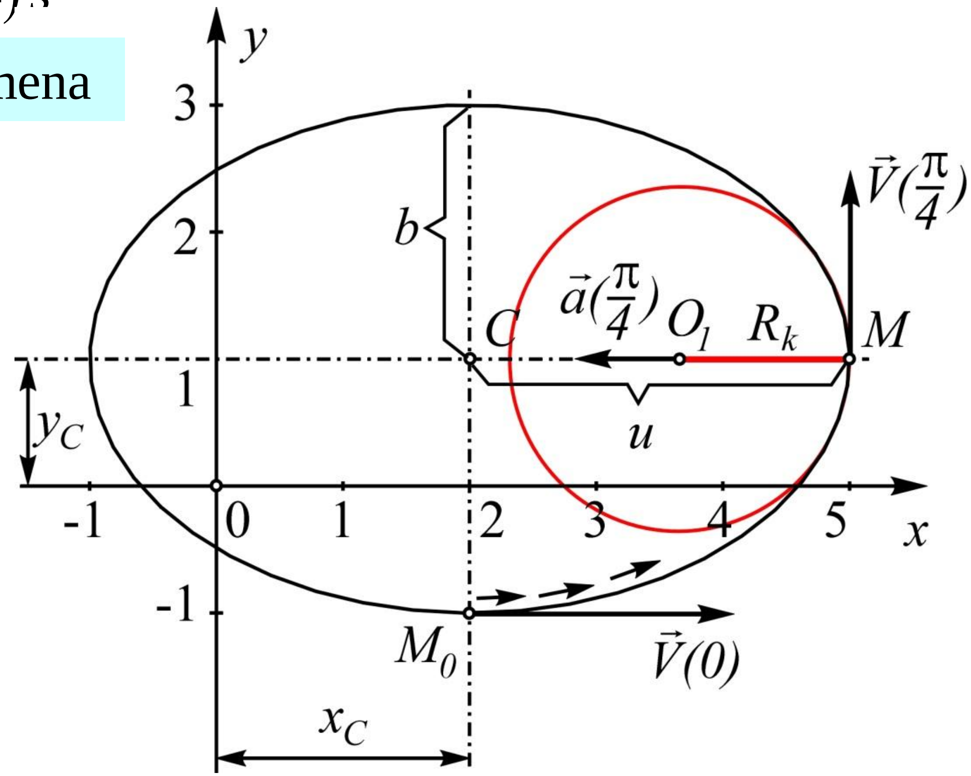
$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5}{\left(2/\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\, m \cong 5.59\, m$$



Primer 1.6 U primeru 1.2 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku vremena $t=(\pi/4)\,s$



S obzirom da je u tom trenutku vremena

$\dot{x}=0,\ \dot{y}=4\ m/s,\quad V=4\ m/s,$

$\ddot{x}=-12\ m/s^2,\ \ddot{y}=0,$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t=\left|\frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{V}\right|=0$$

S obzirom da je u tom trenutku

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{12^2+0^2}=12\ m/s^2$$

normalno ubrzanje iznosi

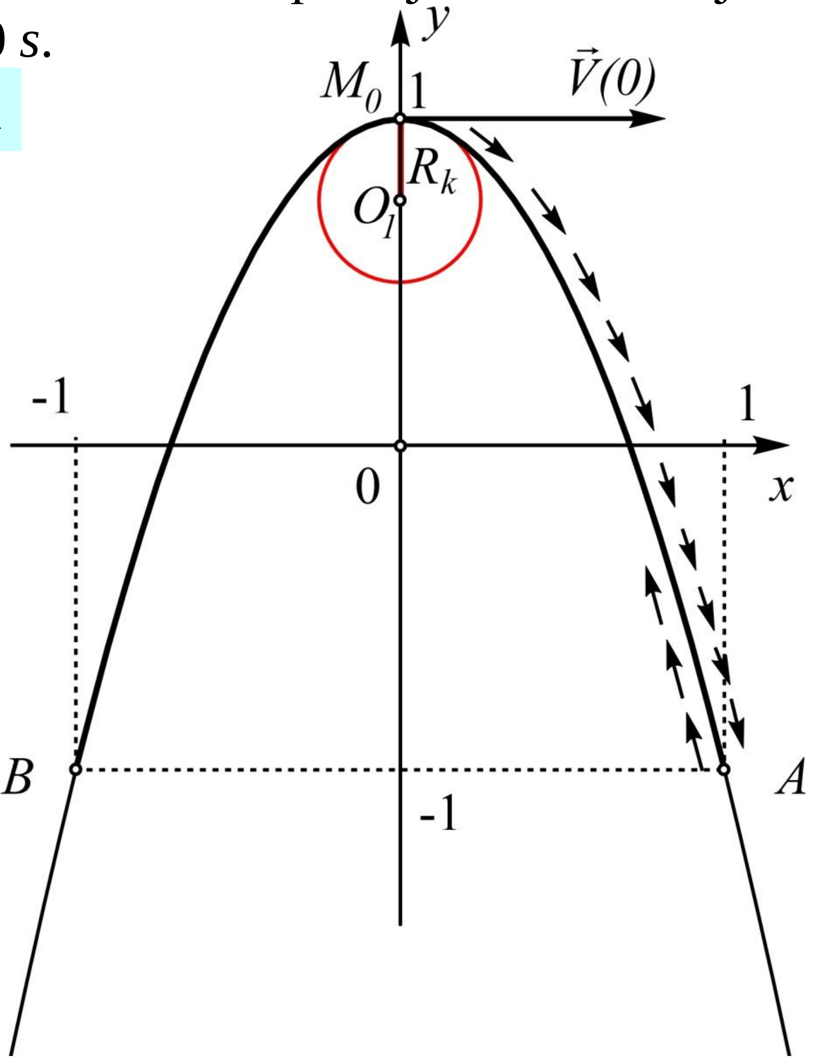
$$a_n=\sqrt{a^2-|a_t|^2}=\sqrt{12^2-0^2}=12\ \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k=\frac{V^2}{a_n}=\frac{4^2}{12}=\frac{4}{3}\ m\cong 1.33\ m$$

Do zaključka da je $a_t=0,\ a=a_n=12\ m/s^2$ itd. moglo se doći i na osnovu same slike

Primer 1.7 U primeru 1.4 odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara početnom trenutku vremena t=0 s.



S obzirom da je u tom trenutku vremena

$\dot{x} = 1\ m/s,\ \dot{y} = 0,\ V = 1\ m/s,$

$\ddot{x} = 0,\ \ \ddot{y} = -4\ m/s^2,$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = 0.$$

S obzirom da je u tom trenutku

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4\ m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{4^2 - 0} = 4\ \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}\ m.$$

I ovde se moglo doći do zaključka da je $a_t = 0$ itd. na osnovu same slike

7. Pravolinijsko kretanje tačke

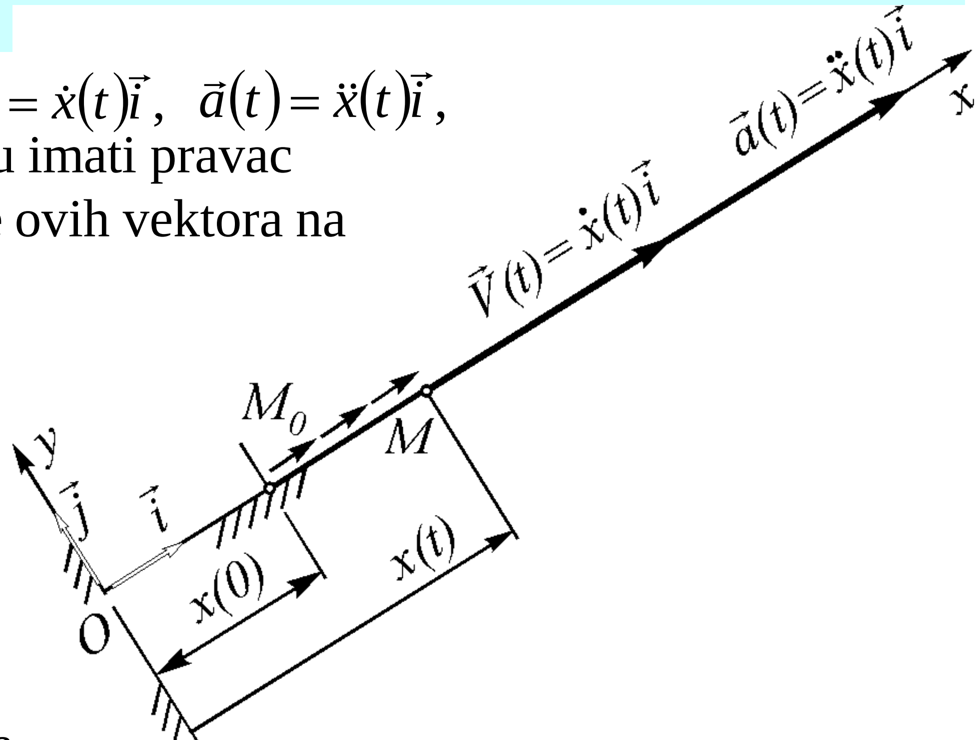
U dinamici se pri pravolinijskom kretanju materijalne tačke uvek jedna osa (na primer *x*) usvaja u pravcu kretanja dok je ona druga (*y* osa) upravna na pravac kretanja. Izložimo kinematiku takvog kretanja kao specijalni slučaj kretanja tačke u *yOx* ravni,

Vektore brzine i ubrzanja su $\vec{V}(t)=\dot{x}(t)\vec{i}\,,\;\; \vec{a}(t)=\ddot{x}(t)\vec{i}\,,$ i ukoliko nisu nula vektori, moraju imati pravac kretanja (pravac *x* ose). Projekcije ovih vektora na *y* osu moraju biti jednake nuli

$$\dot{y}(t)=0,\;\; \ddot{y}(t)=0,$$

što daje i jednakost

$$y(t)=0=const.$$



Intenziteti vektora su:

$$V=|\dot{x}|,\quad a=|\ddot{x}|$$

$x(t)$ je jednačina (zakon) kretanja

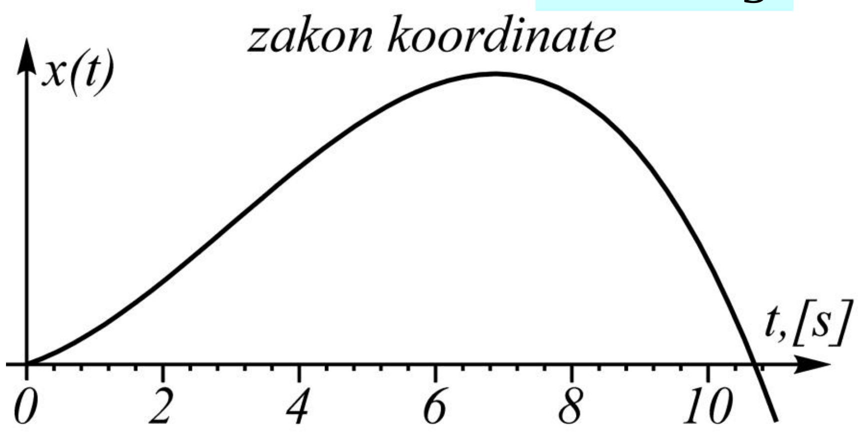
Često će se za pravolinijsko kretanje tačke umesto $x(t)$ koristiti i druge slovne oznake, kao na primer $s(t), y, u, z,...$, ali suština je ista. I tada će se brzine dobijati preko prvih izvoda tih koordinata a ubrzanja preko drugih.

Primer 1.8

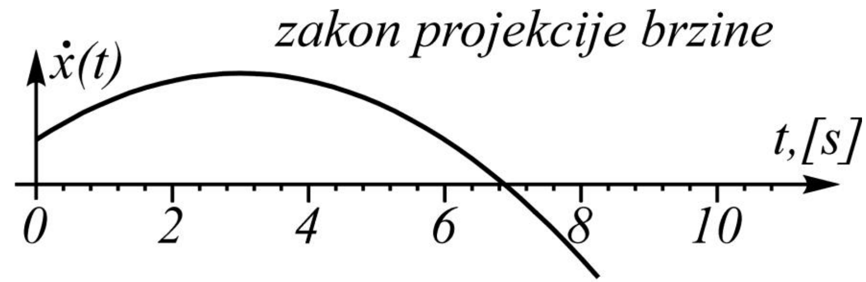
Za pravolinijsko kretanje tačke jednačina (zakon) kretanja je $x(t) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{18}t^3$ (t je u *[s]*, x je u *[m]*). Odrediti brzinu i ubrzanje u funkciji vremena i nacrtati vektore brzine i ubrzanja u trenucima $t_0 = 0, t_1 = 6$ i $t_2 = 9$ sekundi? Nacrtati funkcije $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), s(t), V(t)$ i $a(t)$? Odrediti u kom trenutku vremena $\bar{t} = ?$ i na kom mestu $x(\bar{t}) = ?$ tačka menja smer kretanja?

Projekcija brzine je $\dot{x}(t) = 1 + t - \frac{1}{6}t^2$

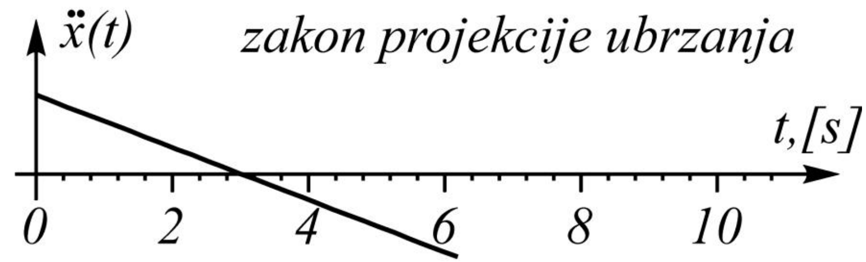
a projekcija ubrzanja $\ddot{x}(t) = 1 - \frac{1}{3}t$



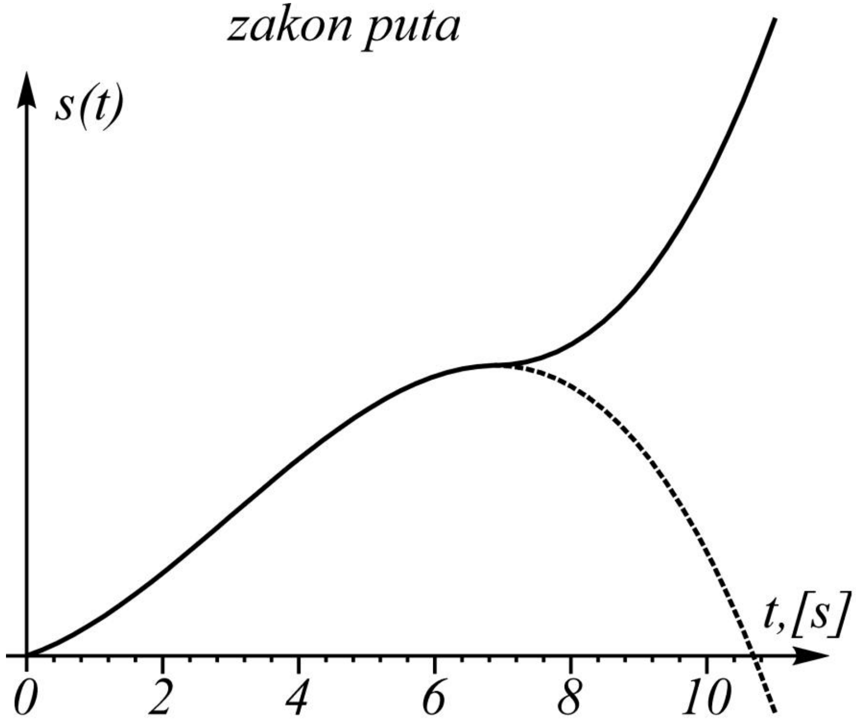
1)



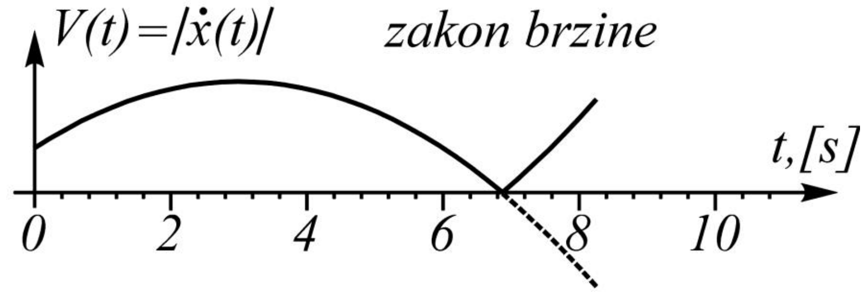
2)



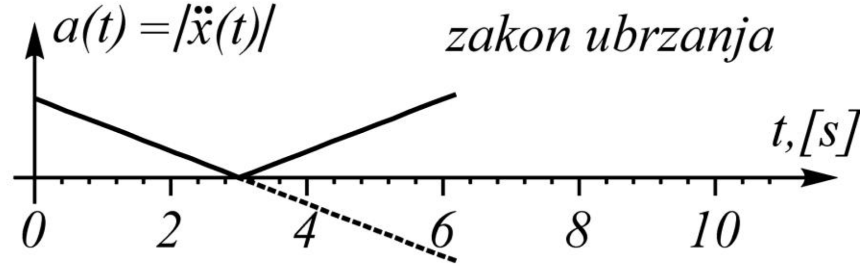
3)



1)



2)

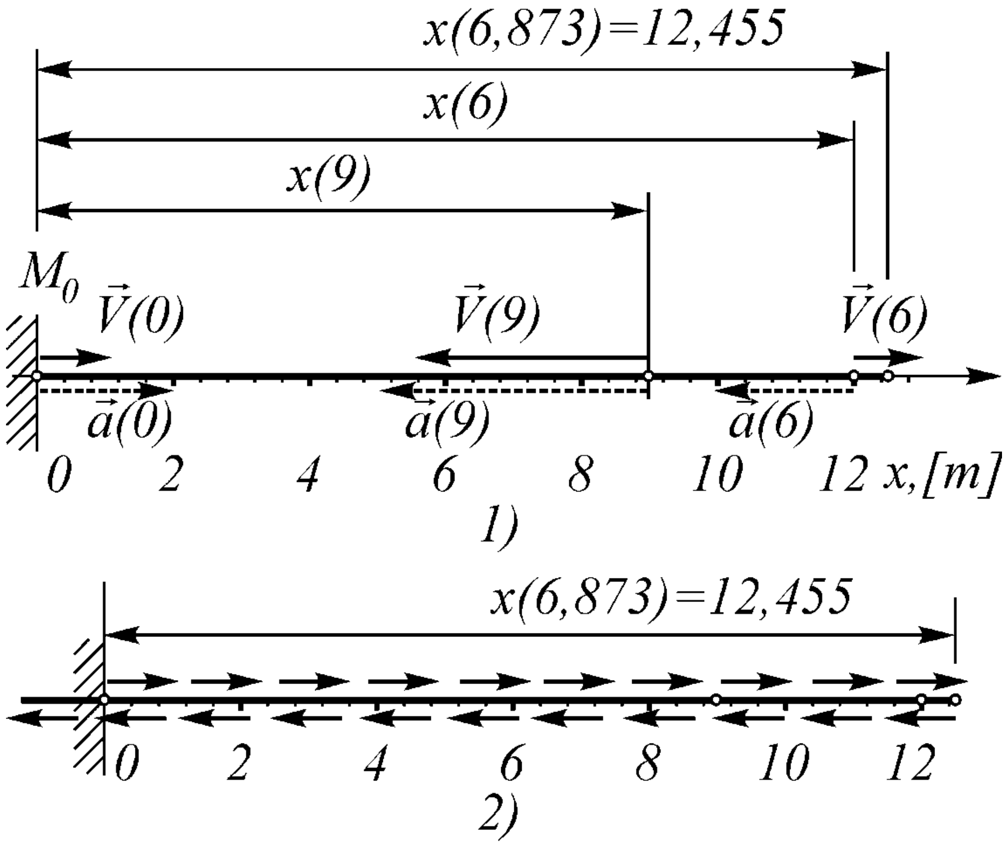


3)

Uvrstimo sada u izraze za $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ umesto vremena t vrednosti 0, 6 i 9 kako bi dobili položaj, brzinu i ubrzanje u tim vremenskim trenucima:

$x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1\,m/s$, $\ddot{x}(0)=1\,m/s^2$, $x(6)=12\,m$, $\dot{x}(6)=1\,m/s$, $\ddot{x}(6)=-1\,m/s^2$,

$x(9)=9\,m$, $\dot{x}(9)=-3.5\,m/s$, $\ddot{x}(9)=-2\,m/s^2$.



Za $t=0$ kretanje je ubrzano

Za $t=6s$ kretanje je usporeno

Za $t=9s$ kretanje je ubrzano ali se tačka kreće u suprotnom smeru od porasta *x* koordinate

Tačka menja smer kretanja u trenutku $\bar{t}$ kada joj je brzina jednaka nuli, tj.

$$\dot{x}(\bar{t})=0 \Rightarrow 1+\bar{t}-\frac{1}{6}\bar{t}^2=0 \Rightarrow \quad \bar{t}=3+\sqrt{15}, \;\; \bar{t}\approx 6{,}873\,s \Rightarrow x(\bar{t})=12{,}455\,m$$

8A. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog pravolinijskog kretanja tačke

Jednoliko (ravnomerno) pravolinijsko kretanje $\Rightarrow \dot{x} = V = const.$

$dx = Vdt$ - diferencijalna jednačina

$x(0) = 0$ - početni uslov

$\Rightarrow x(t) = V \cdot t$ - Zakon kretania (Zakon puta)

Jednako (ravnomerno) promenljivo pravolinijsko kretanje

Ovde je a (ubrzanje, usporenje) konstantno

$\ddot{x} = a > 0$ (jednako ubrzano), a-ubrzanje ili

$\ddot{x} = -a < 0$ (jednako usporeno), a-usporenje

Neka su početni uslovi:

$x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = V_0$

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = a = const. \Rightarrow \dot{x}(t) = V_0 + at$ -Zakon brzine

$dx = (V_0 + at)dt \Rightarrow x(t) = V_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako ubrzano

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -a = const. \Rightarrow \dot{x}(t) = V_0 - at$ -Zakon brzine

$dx = (V_0 - at)dt \Rightarrow x(t) = V_0 \cdot t - a \cdot \frac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako usporeno

8B. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog krivolinijskog kretanja tačke

Jednoliko (ravnomerno) krivolinijsko kretanje $\Rightarrow \dot{s} = V = const.$

$ds = Vdt$ - diferencijalna jednačina

$s(0) = 0$ - početni uslov

$\Rightarrow s(t) = V \cdot t$ - Zakon kretanja (Zakon puta)

Jednako (ravnomerno) promenljivo krivolinijsko kretanje

Ovde je a_T (tangencijalno ubrzanje/usporenje) konstantno

Početni uslovi:

$s(0) = 0,$

$\dot{s}(0) = V_0$

$\ddot{s} = a_T > 0$ (jednako ubrzano), a_T- tangencijalno ubrzanje ili

$\ddot{s} = -a_T < 0$(jednako usporeno), a_T- tangencijalno usporenje

$\ddot{s} = \dfrac{d\dot{s}}{dt} = a_T = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(t) = V_0 + a_T t$ -Zakon brzine

$ds = (V_0 + a_T t)dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = V_0 \cdot t + a_T \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako ubrzano

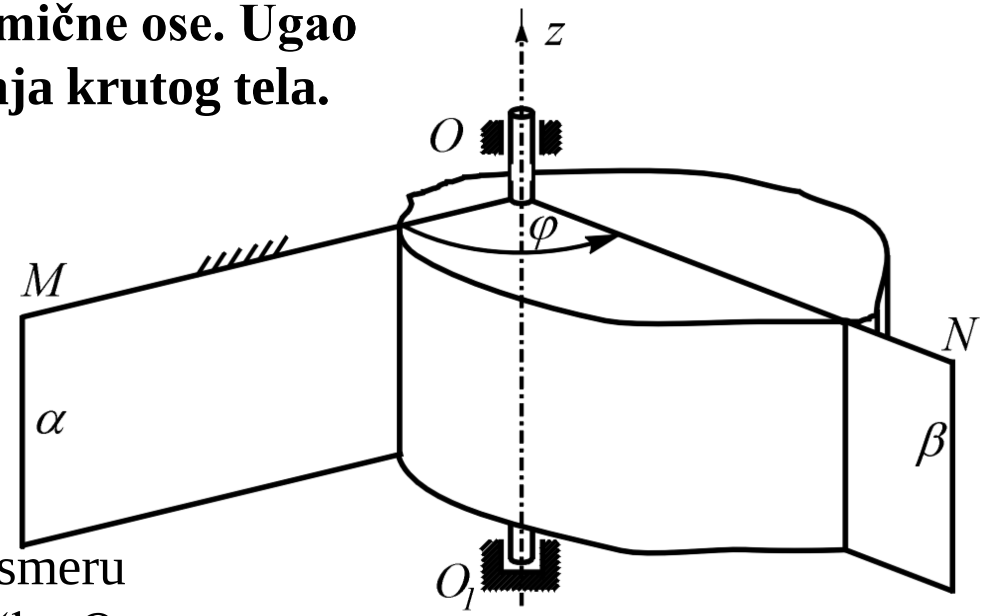
$\ddot{s} = \dfrac{d\dot{s}}{dt} = -a_T = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(t) = V_0 - a_T t$ -Zakon brzine

$ds = (V_0 - a_T t)dt \quad \Rightarrow \quad s(t) = V_0 \cdot t - a_T \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako usporeno

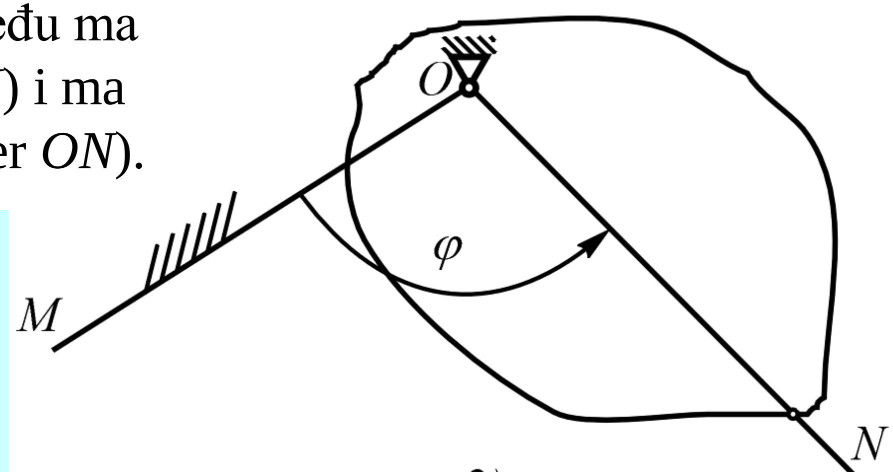
9A. Obrtanje krutog tela oko nepomične ose. Ugao rotacije tela. Zakon obrtnog kretanja krutog tela.

Ugao rotacije φ (Sl.1) je definisan kao ugao između ma koje nepokretne ravni (na primer α) i ma koje ravni koja pripada telu (na primer β).



1)

Pogledom u pravcu ose obrtanja *z* u smeru suprotnom od nje, osa se vidi kao tačka *O* a ravni kao prave *OM* i *ON* te se ugao rotacije φ (Sl.2) može definisati i kao ugao između ma koje nepokretne prave (na primer *OM*) i ma koje prave koja pripada telu (na primer *ON*).



2)

Ugao rotacije tela je važna globalna karakteristika rotacionog kretanja. Kruto telo koje se obrće oko nepomične ose vrši čistu rotaciju.

Zakonom obrtnog kretanja krutog tela (tj. jednačinom tog kretanja) naziva se zavisnost ugla rotacije (na primer φ) od vremena t. Ovo je zbog toga što znati $\varphi(t)$, ispostaviće se, znači, znati sve o kinematici takvog kretanja.

O POJMU “BROJ STEPENI SLOBODE KRETANJA”

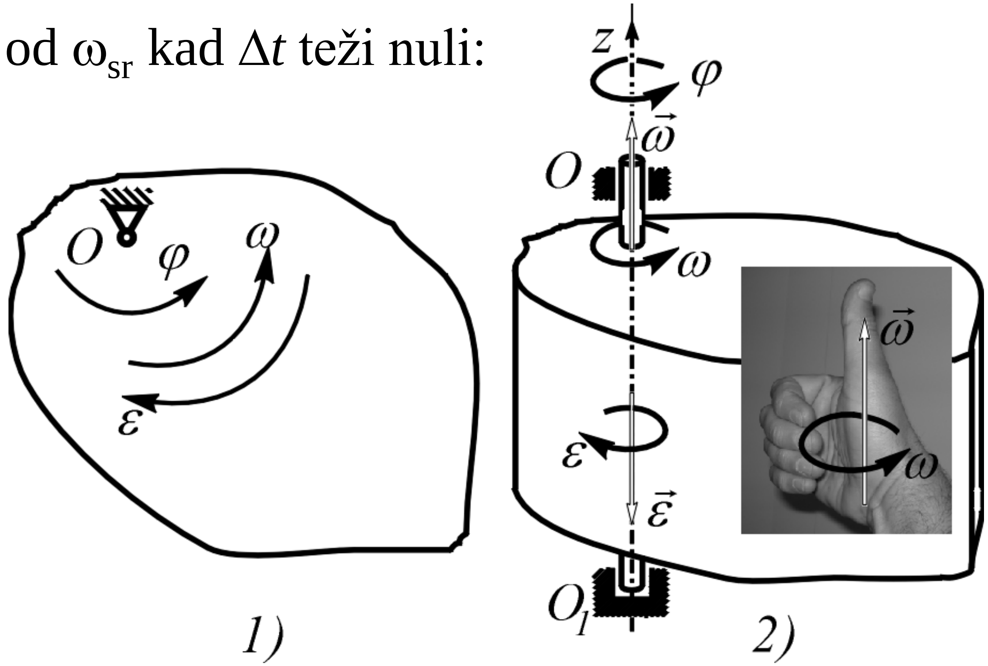
Kada, kao kod obrtanja krutog tela oko nepomične ose, jedna koordinata u potpunosti određuje položaj tela, kaže se da sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja su i pravolinijsko kretanje tačke (tu je jednačina kretanja, na primer, $x(t)$) kao i krivolinijsko kretanje po poznatoj krivoj (gde je jednačina kretanja, na primer, $s(t)$). Dakle, broj jednačina kretanja se poklapa sa brojem stepeni slobode kretanja. Jasno je da za kretanje tačke u ravni, koje je definisano sa dve jednačine kretanja (na primer, sa $x(t)$ i $y(t)$, kao što je to obrađeno u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu), sistem ima dva stepena slobode kretanja.

9B. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela. Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.

Srednja ugaona brzina tela ω_{sr} u nekom vremenskom intervalu Δt definisana je kao količnik priraštaja ugla rotacije $\Delta\varphi$ i proteklog vremena Δt: $\omega_{sr} = \Delta\varphi / \Delta t$

Ugaona brzina se dobija kao limes od ω_{sr} kad Δt teži nuli:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$



Ugaona brzina tela ω, kao mera brzine obrtnog kretanja, govori o promeni ugla rotacije φ sa vremenom t i jednaka prvom izvodu ugla rotacije po vremenu:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$

Srednje ugaono ubrzanje tela ε_{sr} u nekom vremenskom intervalu Δt definisano je kao količnik priraštaja ugaone brzine $\Delta\omega$ i proteklog vremena Δt: $\varepsilon_{sr} = \Delta\omega / \Delta t$

Ugaono ubrzanje se dobija kao limes od ε_{sr} kad Δt teži nuli:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

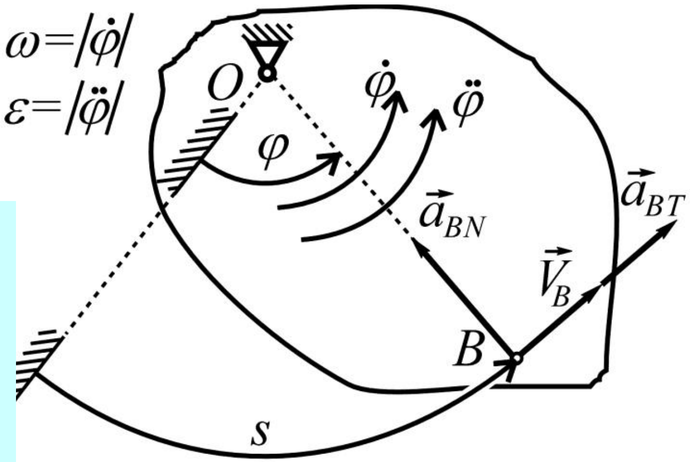
Ugaono ubrzanje u nekom trenutku vremena jednako prvom izvodu ugaone brzine po vremenu, i samim tim, drugom izvodu ugla rotacije po vremenu.

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja su upravni na ravni u kojima leže putanje tačaka tela. Smerove tih vektora može da odredi pravilo desne ruke (Sl.2). Po tom pravilu, prste desne ruke postaviti u smeru ω a palac desne ruke će pokazati smer vektora $\vec{\omega}$, isto tako, prste desne ruke postaviti u smeru ε a palac desne ruke će pokazati smer vektora $\vec{\varepsilon}$

$$\omega = |\dot{\varphi}|$$
$$\varepsilon = |\ddot{\varphi}|$$

10. Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće.



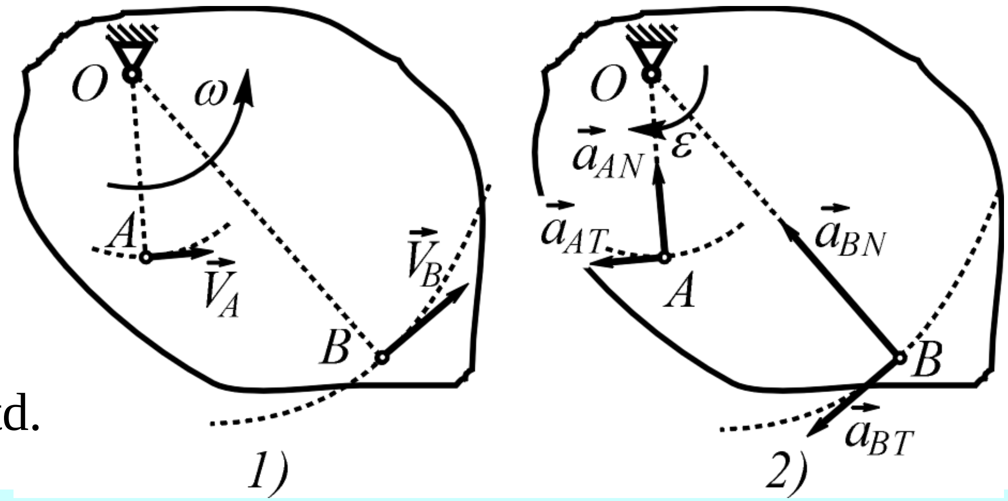
$$s = \overline{OB} \cdot \varphi$$
$$V_B = \dot{s} = \overline{OB} \cdot \dot{\varphi}$$
$$a_{BT} = \ddot{s} = \overline{OB} \cdot \ddot{\varphi}$$
$$a_{BN} = \frac{V_B^2}{\overline{OB}} = \overline{OB} \cdot \dot{\varphi}^2$$

Svaka tačka tela koje se obrće oko nepomične ose ima kružnu putanju, poluprečnika koji je jednak najkraćem rastojanju između te tačke i ose obrtanja.

Pošto je vektor brzine svake tačke u pravcu tangente na njenu kružnu putanju, on mora biti i upravan na duž koja povezuje tu tačku sa njoj najbližom tačkom na osi obrtanja, zbog toga je $\vec{V}_A \perp \overline{OA}$ i $\vec{V}_B \perp \overline{OB}$.

Intenzitet brzine se dobija množenjem najkraćeg rastojanja između tačke i ose obrtanja sa ugaonom brzinom, zbog čega je $V_A = \overline{OA} \cdot \omega$, $V_B = \overline{OB} \cdot \omega$ itd.

Zbog činjenice da tačke imaju kružne putanje vektori njihovih ubrzanja se, kao i uvek u takvom slučaju, razlažu na normalne i tangencijalne komponente, dakle



$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{AT}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT} \quad \text{itd.}$$

Vektor normalnog ubrzanja tačke uvek je usmeren od te tačke ka osi obrtanja (najkraćim putem). Intenzitet normalnog ubrzanja jednak je proizvodu između najkraćeg rastojanja te tačke do ose obrtanja i kvadrata ugaone brzine tela, dakle

$$a_{AN} = \overline{OA} \cdot \omega^2, \; a_{BN} = \overline{OB} \cdot \omega^2 \quad \text{itd.}$$

Kao i kod brzine, vektor tangencijalnog ubrzanja svake tačke ima pravac tangente na njenu kružnu putanju, pa je stoga upravan na duž koja povezuje tu tačku sa njoj najbližom tačkom na osi obrtanja. Zbog toga je $\vec{a}_{AT} \perp \overline{OA}$ i $\vec{a}_{BT} \perp \overline{OB}$. Smer tangencijalnog ubrzanja neke tačke, kao na slici, odgovara smeru ugaonog ubrzanja. Intenzitet tangencijalnog ubrzanja se dobija množenjem najkraćeg rastojanja između tačke i ose obrtanja sa ugaonim ubrzanjem, zbog čega je

$$a_{AT} = \overline{OA} \cdot \varepsilon, \quad a_{BT} = \overline{OB} \cdot \varepsilon \quad \text{itd.}$$