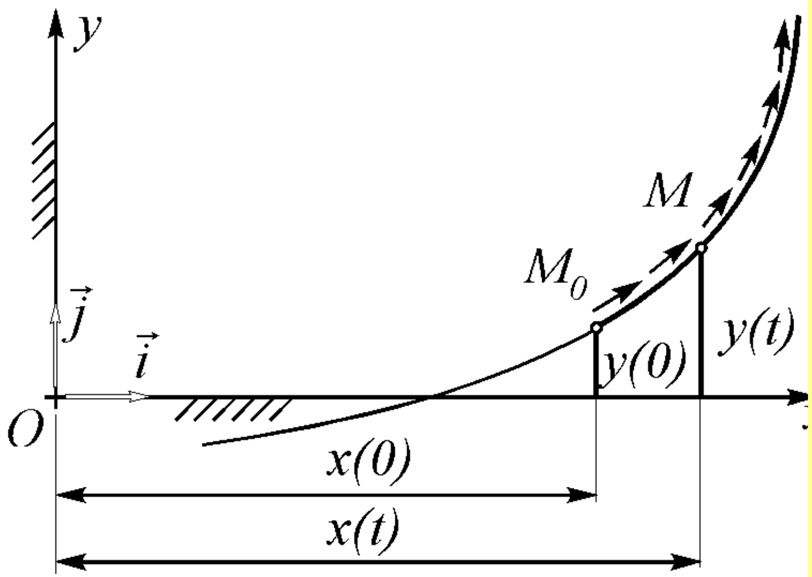
1. Krivolinijsko kretanje tačke u ravni opisano u pravouglom dekartovom koordinatnom sistemu. Jednačine kretanja. Linija putanje. Putanja.



Jednačine kretanja *x(t)* i *y(t)* u potpunosti određuju sve pojmove vezane za kinematiku tačke kao što su: linija putanje, putanja (trajektorija), brzina, ubrzanje i poluprečnik krivine putanje. Funkcija, kriva ili prava, dobijena eliminacijom vremena *t* iz jednačina kretanja naziva se linijom putanje i nju ćemo u svakom primeru crtati.

U većini primera linija putanje se svodi na oblik *y(x)* ili *x(y)* ili *f(x,y)=0*.

Podrazumevaće se da trenutku započinjanja kretanja (početnom trenutku) odgovara *t=0* i da se pri kretanju vreme *t* stalno povećava. Početni položaj tačke M_0, određen koordinatama *x(0)* i *y(0)*, određuje se stavljanjem nule umesto *t* u jednačine kretanja.

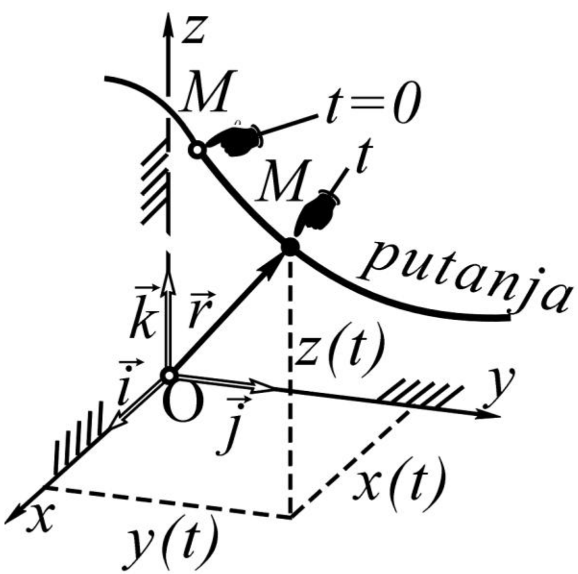
Putanja je onaj deo linije putanje na kom tačka može da se nađe u vremenskom intervalu $t \geq 0$. Taj deo je na slici prikazan debljom linijom.

2. Vektori brzine i ubrzanja u pravouglom dekartovom koordinatnom sistemu i njihove projekcije na koordinatne ose.

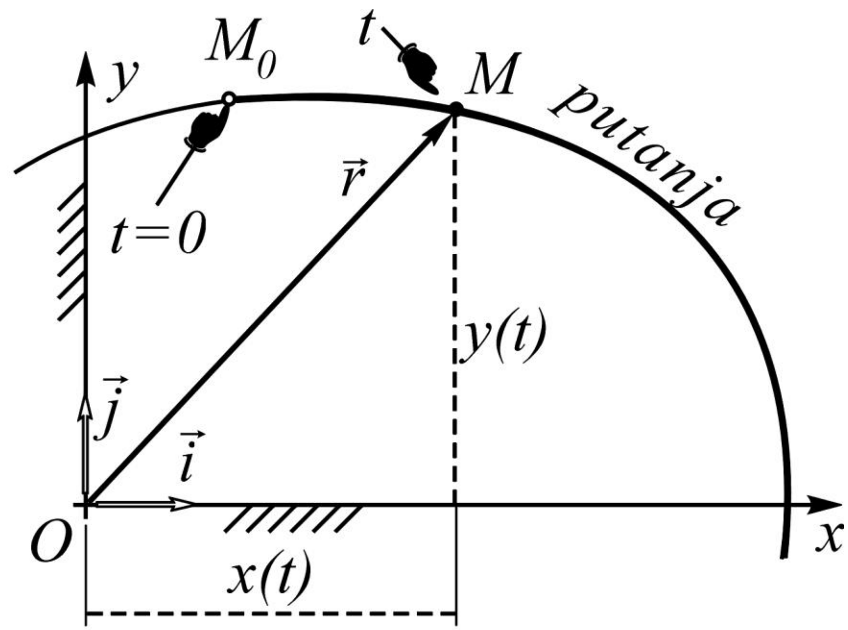
Vektorom položaja pokretne tačke M naziva se vektor koji se proteže od koordinatnog početka do te tačke:

$\vec{r}(t) = \overline{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ $\qquad\qquad$ $\vec{r}(0) = \overrightarrow{OM_0} = x(0)\vec{i} + y(0)\vec{j}$

Dakle, *x(t)* i *y(t)*, osim što su jednačine kretanja, to su i projekcije vektora položaja i koordinate pokretne tačke u nepokretnom *xOy* koordinatnom sistemu.

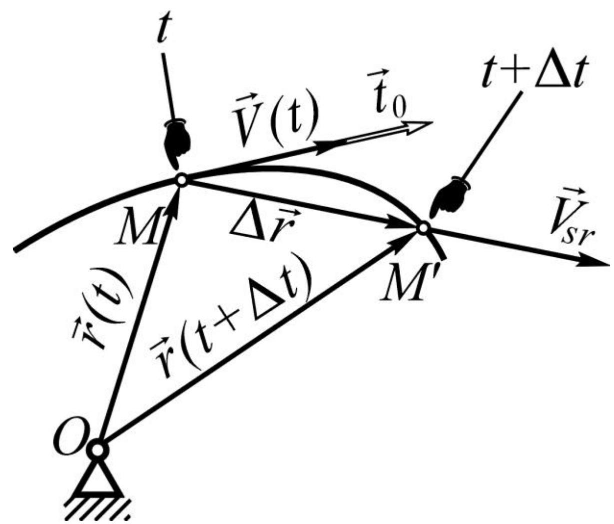


prostor



ravan

$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$



$\vec{V}_{sr}$ - Srednja brzina u vremenskom intervalu Δt

$\vec{t}_0$ - Jedinični vektor tangente na putanju

Vektor brzine $\vec{V}(t)$ **pokretne tačke u proizvoljnom trenutku vremena je prvi izvod po vremenu vektora položaja** $\vec{r}(t)$:

$$\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

Za krivolinijsko kretanje pravac vektora brzine poklapa sa pravcem tangente

Zbog $\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ i činjenice da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni vektori, dobija se vektor brzine:

$$\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$$

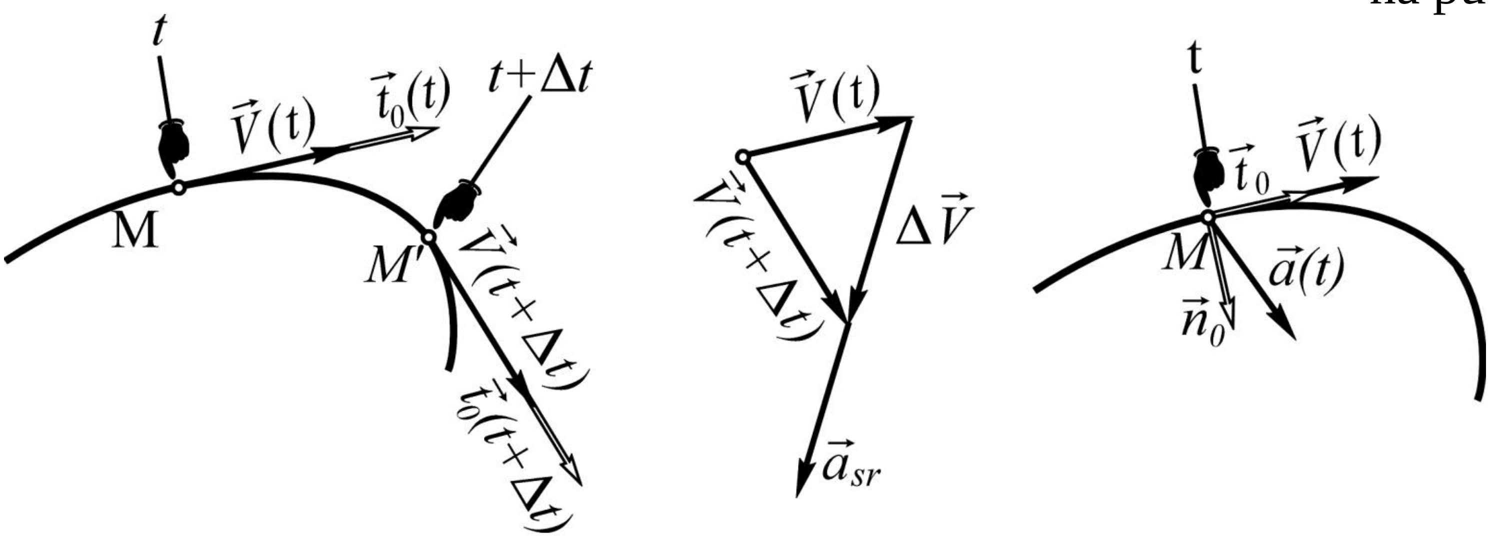
Projekcije vektora vrzine na koordinatne ose jednake su prvim izvodima po vremenu jednačina kretanja, odnosno koordinata pokretne tačke u nepokretnom *xOy* koordinatnom sistemu, dakle: $V_x(t) = \dot{x}(t)$, $V_y(t) = \dot{y}(t)$

Intenzitet vektora brzine: $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, $\quad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}, \quad \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$\vec{n}_0$ - Jedinični vektor normale na putanju

$\vec{a}_{sr}$ - Srednje ubrzanje u vremenskom intervalu Δt



1) 2) 3)

Vektor ubrzanja $\vec{a}(t)$ pokretne tačke u proizvoljnom trenutku vremena, jednak je prvom izvodu po vremenu vektora brzine $\vec{V}(t)$, odnosno, drugom izvodu po vremenu vektora položaja $\vec{r}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{V}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Za krivolinijsko kretanje, u opštem slučaju, vektor ubrzanja je usmeren u konkavnu stranu putanje.

Zbog $\vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)$, $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ i činjenice da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni vektori, dobija se vektor ubrzanja: $\vec{a}(t)=\ddot{x}(t)\vec{i}+\ddot{y}(t)\vec{j}$,

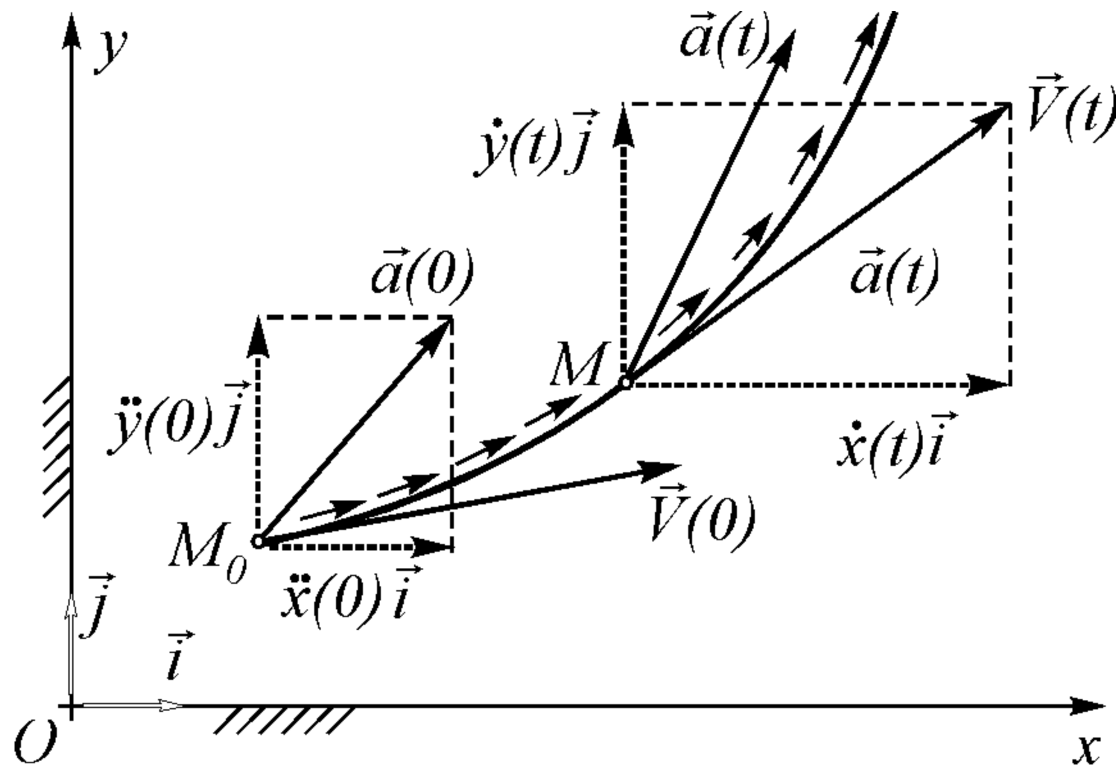
odakle se vidi da su njegove projekcije na koordinatne ose jednake drugim izvodima koordinata (jednačina kretanja) po vremenu:

$$a_x(t)=\ddot{x}(t),\quad a_y(t)=\ddot{y}(t)\quad \Rightarrow a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2}$$

Te projekcije su, takođe, jednake prvim izvodima projekcija brzine, kao funkcija vremena, po vremenu:

$$a_x(t)=\dot{V}_x(t), a_y(t)=\dot{V}_y(t).$$

Na slici su nacrtani vektori brzine i ubrzanja u početnom M_0 i proizvoljnom M položaju, koji odgovaraju početnom i proizvoljnom trenutku vremena, respektivno. Takodje su prikazane komponente vektora $\vec{V}(t)$ i $\vec{a}(0)$.



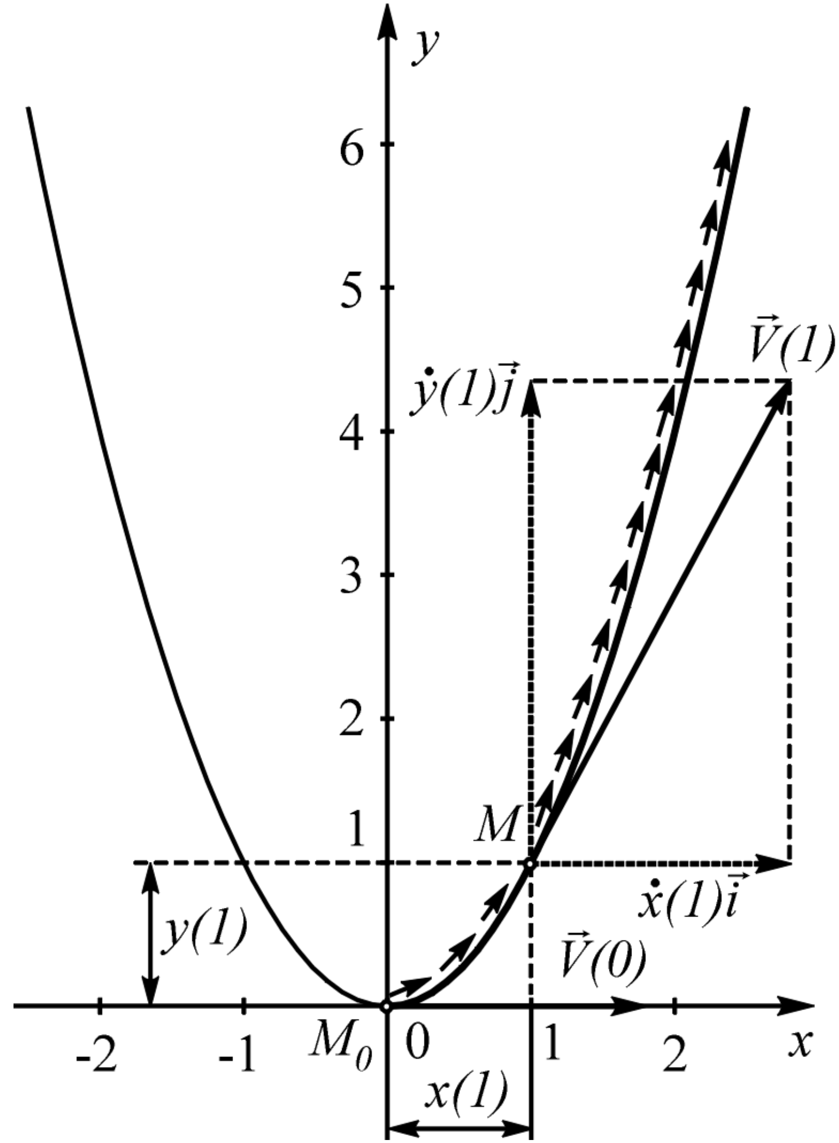
Primer 1.1 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = t$ i $y = t^2$ (t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu u trenutku *t=1s*? Odrediti ubrzanje u proizvoljnom trenutku?

Eliminacijom vremena t iz jednačina kretanja dobija se da je jednačina linije putanje parabola $y = x^2$

Početni položaj:
$x(0) = 0, y(0) = 0 \Rightarrow M_0(0,0)$

Putanja (trajektorija) je samo desna grana parabole.

Oblast kretanja: $x \geq 0,\ y \geq 0$



Projekcije brzine i ubrzania u funkciji vremena dobijaju se preko izvoda od jednačina kretanja: $x = t,\ y = t^2$

$\dot{x}(t) = 1,\ \dot{y}(t) = 2t,\ \ddot{x}(t) = 0,\ \ddot{y}(t) = 2$

Brzina u trenutku *t=1s* (prikazana je na slici sa prethodnog slajda) :

$\dot{x}(1) = 1,\ \dot{y}(1) = 2 \ \Rightarrow \vec{V}(1) = 1\vec{i} + 2\vec{j},\ \ V(1) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\ m/s$

Položaj u trenutku *t=1s* :

$x(1) = 1,\ y(1) = 1 \Rightarrow\ M(1,1)$

Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$\vec{a}(t) = 2\vec{j},\ a(t) = 2\ m/s^2$

Vektor ubrzanja je konstantan, paralelan sa *y* osom i usmeren naviše.

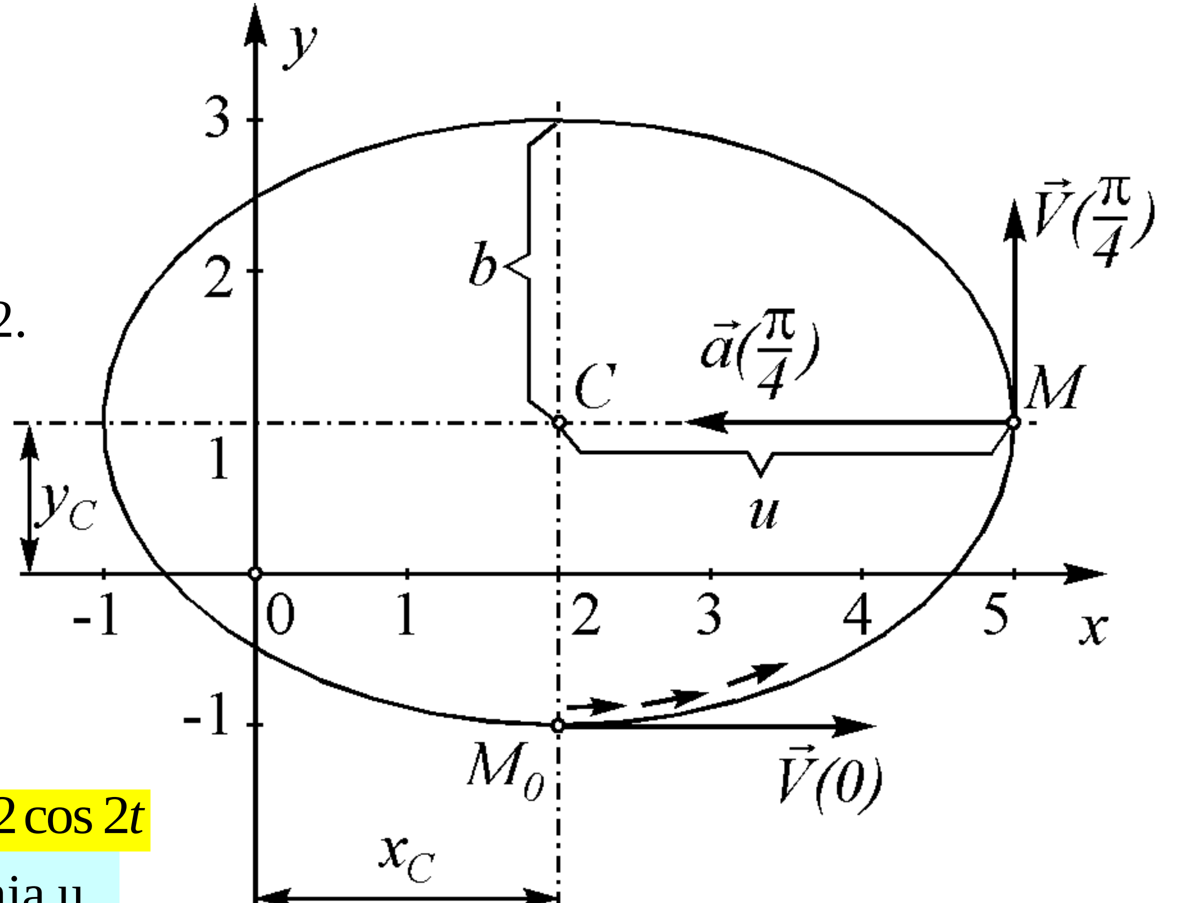
Primer 1.2 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = 2 + 3\sin 2t$ i $y = 1 - 2\cos 2t$ (*t* je u sekundama a *x* i *y* su u metrima). Odrediti trajektoriju i skicirati je? Odrediti oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t = (\pi/4)$ *s*?

Jednačinu putanje dobićemo preuređenjem, kvadriranjem pa sabiranjem jednačina kretanja: $\frac{x-2}{3} = \sin 2t,\ \ \frac{y-1}{2} = -\cos 2t \ \ \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$

Jednačina elipse

$$\frac{(x-x_C)^2}{u^2}+\frac{(x-y_C)^2}{b^2}=1$$

$x_C=2,\ y_C=1,$ u=3 i b=2.



Oblast kretanja:

$-1\le x\le 5,$ $-1\le y\le 3$

Početni položaj:

$x(0)=2,\ y(0)=-1\Rightarrow$

$M_0(2,-1)$

$x=2+3\sin 2t$ $y=1-2\cos 2t$

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$\dot{x}(t)=6\cos 2t$

$\dot{y}(t)=4\sin 2t$

$\ddot{x}(t)=-12\sin 2t$

$\ddot{y}(t)=8\cos 2t$

Položaj, brzina i ubrzanje u trenutku $t=(\pi/4)$

$x(\pi/4)=5,\ y(\pi/4)=1$

$\dot{x}(\pi/4)=0$

$\dot{y}(\pi/4)=4$

$\vec{V}(\pi/4)=4\vec{j}$ $V(\pi/4)=4\ m/s$

$\ddot{x}(\pi/4)=-12$

$\ddot{y}(\pi/4)=0$

$\vec{a}(\pi/4)=-12\vec{i}$ $a(\pi/4)=12\ m/s^2$

Primer 1.3 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = 2t^2 - 1$ i $y = t^2 + 2$ (t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t=1s$?

Eliminacije vremena t (određivanje jednačine linije putanje)

$y = t^2 + 2 \Rightarrow t^2 = y - 2,\ x = 2t^2 - 1 = 2(y-2) - 1 \Rightarrow x = 2y - 5$

y	0	3
x	-5	1

Početni položaj:

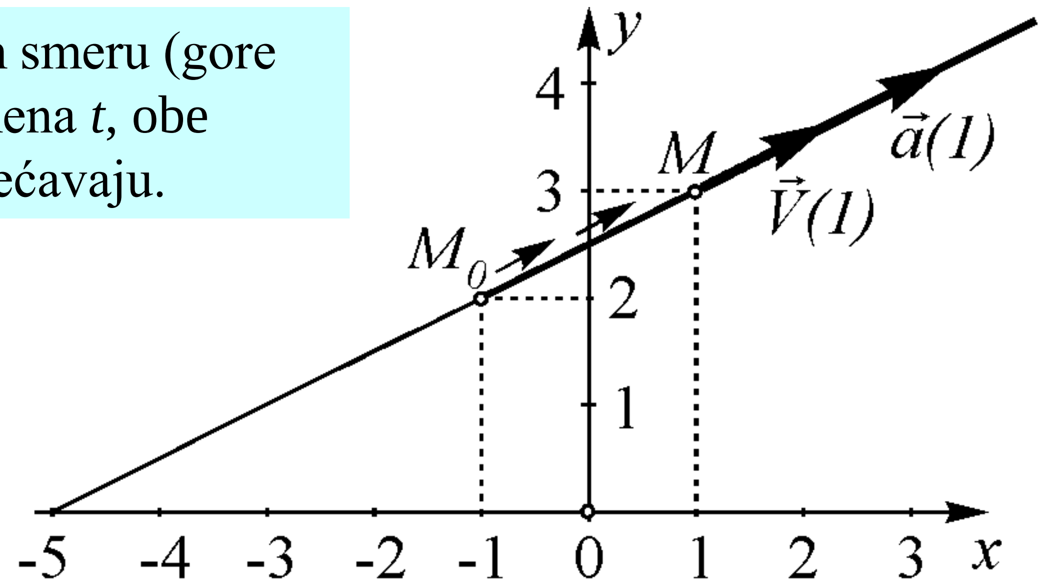
$x(0) = -1,\ y(0) = 2 \ \Rightarrow M_0(-1,2)$

Tačka se kreće stalno u jednom smeru (gore desno) pošto sa porastom vremena t, obe koordinate i x i y se stalno povećavaju.

Zbog toga je trajektorija poluprava (podebljani deo linije putanje) a oblast kretanja je $x \geq -1,\ y \geq 2$

Položaj tačke u trenutku $t=1s$

$x(1) = 1,\ y(1) = 3 \Rightarrow M(1,3)$



Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$\dot{x}(t) = 4t,\ \ \dot{y}(t) = 2t,\ \ \ddot{x}(t) = 4,\ \ \ddot{y}(t) = 2$

odakle se vidi da je vektor ubrzanja tokom kretanja konstantan

$$\vec{a}(t) = 4\vec{i} + 2\vec{j} = \overrightarrow{const.} \Rightarrow a(t) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$

Brzina u trenutku *t=1s*

$$\dot{x}(1) = 4,\ \dot{y}(1) = 2 \Rightarrow \vec{V}(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j},\ V(1) = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$

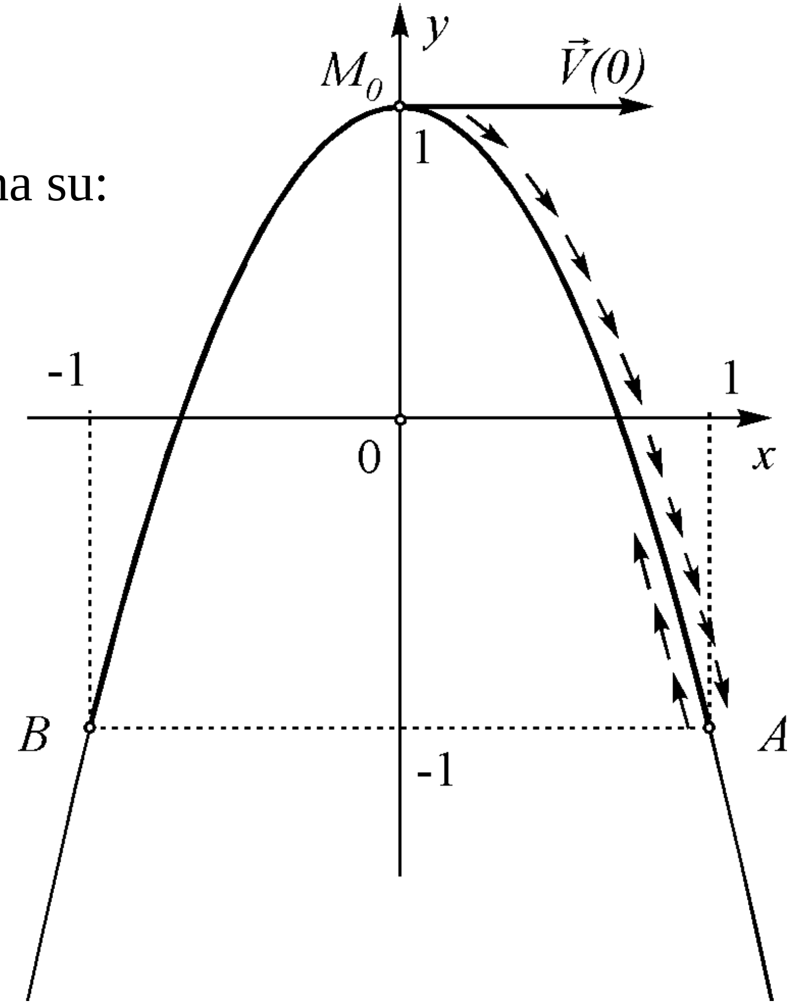
Primer 1.4 Jednačine kretanja tačke u ravni su $x = \sin t$ i $y = \cos 2t$ (t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku? Odrediti trenutak vremena $\bar{t}$ u kojem tačka prvi put menja smer kretanja?

Za dobijanje jednačine linije putanje (odnosno, za eliminaciju vremena t iz jednačina kretanja) iskoristimo trigonometrijske identitete prema kojima dobijamo da je linija putanje parabola:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \quad \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \Rightarrow \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \ \Rightarrow \ y = 1 - 2x^2$$

Zbog $-1 \le \sin t \le 1, -1 \le \cos 2t \le 1$ oblast kretanja je $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$

Tačka osciluje duž parabole a na mestima A i B menja smer kretanja.



Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$$\dot{x}(t) = \cos t, \quad \dot{y}(t) = -2\sin 2t$$

$$\ddot{x}(t) = -\sin t, \quad \ddot{y}(t) = -4\cos 2t$$

Brzina u proizvoljnom trenutku:

$$\vec{V}(t) = \cos t\,\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}$$

$$V(t) = \sqrt{\cos^2 t + (2\sin 2t)^2}$$

Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$$\vec{a}(t) = -\sin t\,\vec{i} - 4\cos 2t\,\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{\sin^2 t + (4\cos 2t)^2}$$

Početni položaj:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \Rightarrow M_0(0,1)$$

Zbog $\dot{x}(0) = 1 \geq 0$ tačka je započela kretanje u desnu stranu.

Na mestu prve promene smera kretanja (A) brzina tačke jednaka je nuli:

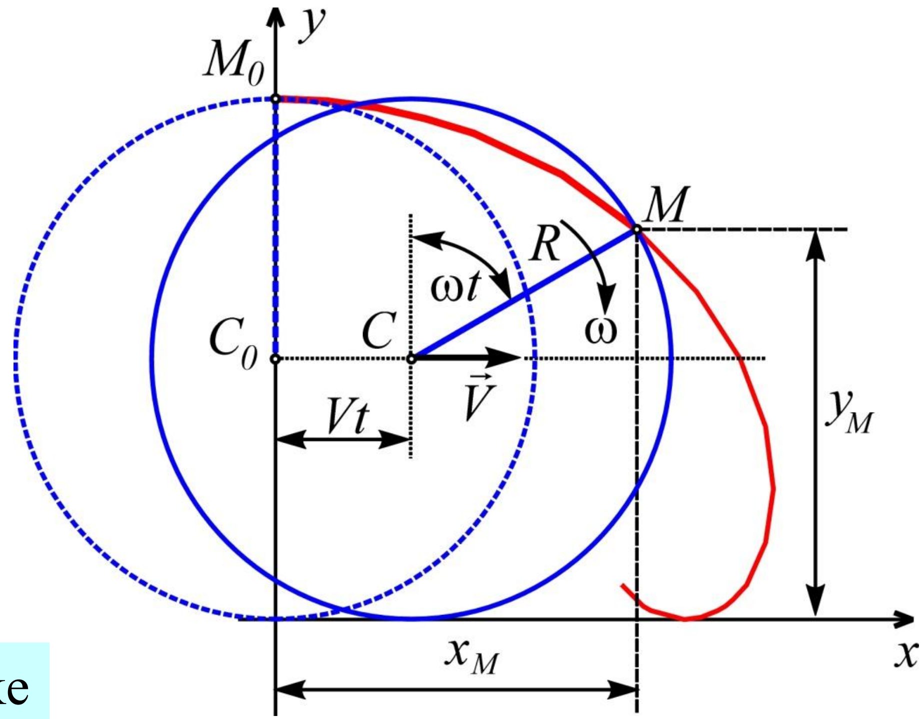
$$\dot{x}(\bar{t}) = \cos\bar{t} = 0, \quad \dot{y}(\bar{t}) = -2\sin 2\bar{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = (\pi/2)\ s$$

3. Trohoida. Cikloida

Parametarske jednačine trohoide:
(u prikazanoj varijanati)

$$x(t) = x_M = Vt + R\sin\omega t$$

$$y(t) = y_M = R + R\cos\omega t$$



Trohoida

C – centar rotora (tačka koja se kreće ravnomerno pravolinijski, brzinom V)

R – poluprečnik rotora (rastojanje tačke M od tačke C), $R = \overline{CM}$

ω – ugaona brzina rotora (konstanta)

Specijalni slučaj trohoide, za $R\omega = V$, je cikliода

Brzina tačke M može se odrediti preko prvog izvoda parametarskih jednačina:

$$\dot{x}(t) = V + R\omega\cos\omega t$$

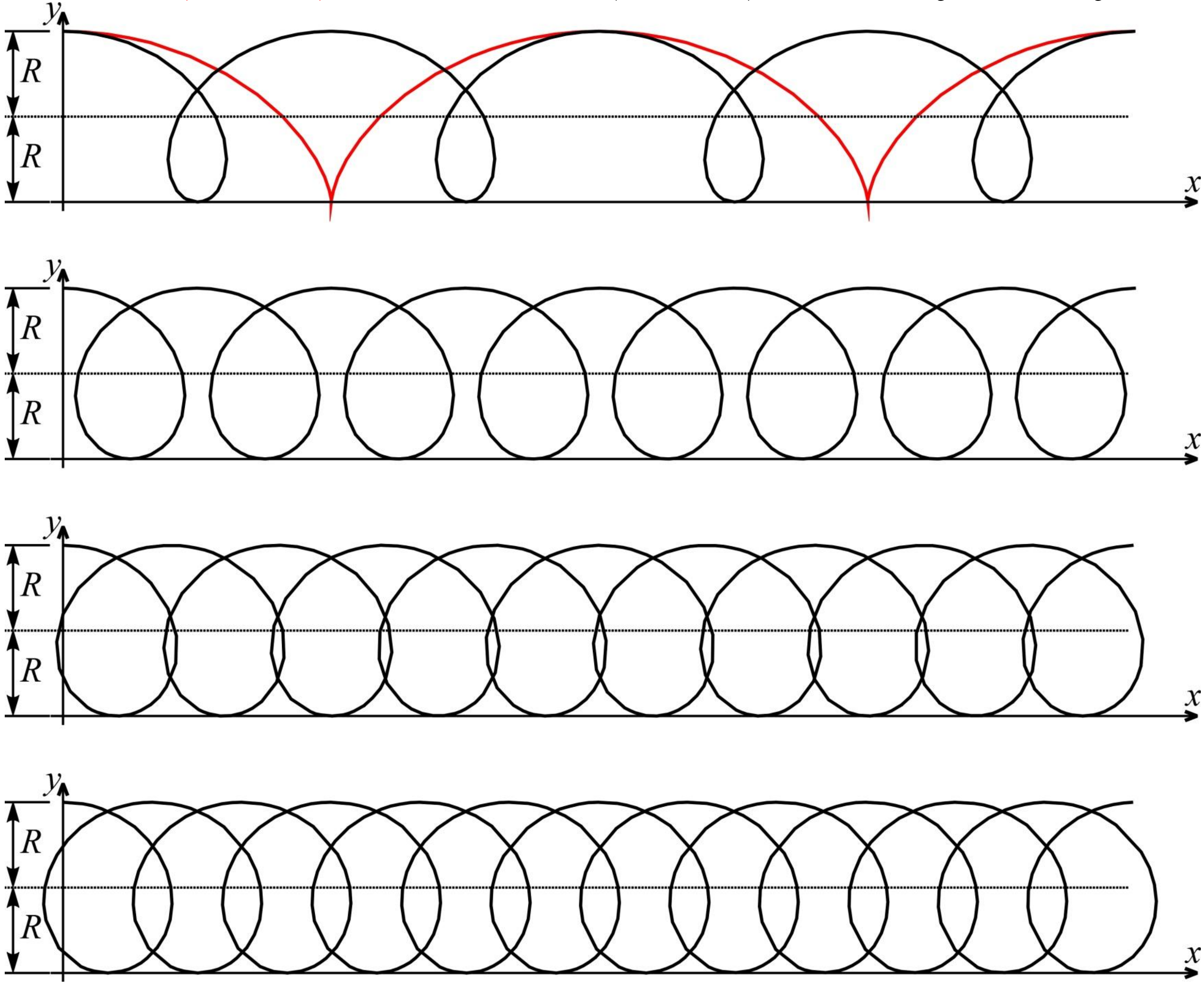
$$\dot{y}(t) = -R\omega\sin\omega t$$

Ubrzanje tačke M određuje drugi izvod:

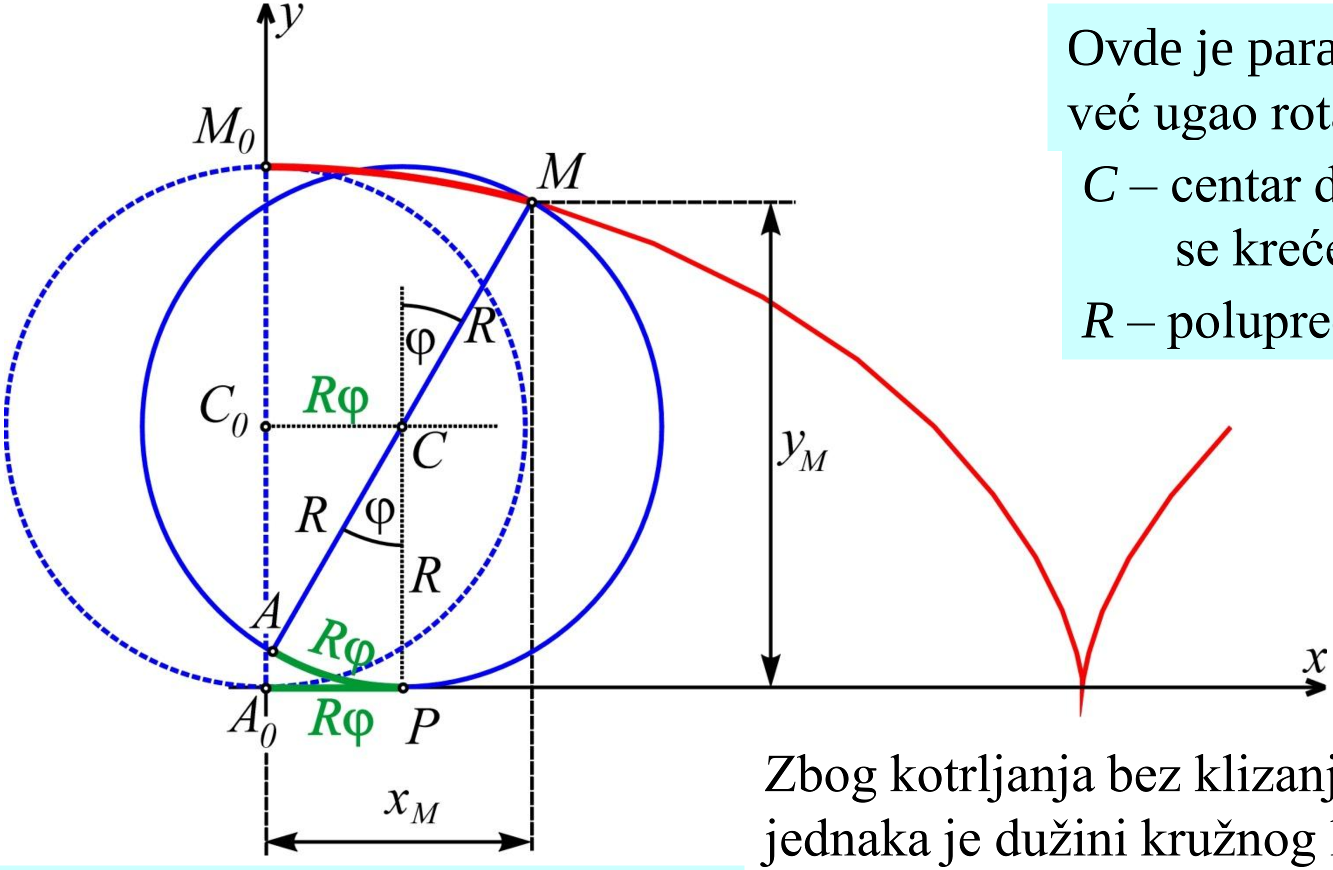
$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2\sin\omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2\cos\omega t$$

Ciklioda ($R\omega = V$), i više trohoida ($R\omega > V$). Na svakoj narednoj slici $\dfrac{R\omega}{V}$ je veće.



Cikloida dobijena kotrljanjem bez klizanja kružnog diska po pravoj (x osi)



Ovde je parametar, ne vreme t, već ugao rotacije diska φ.

C – centar diska (tačka koja se kreće pravolinijski)

R – poluprečnik diska $R = \overline{CM}$

Zbog kotrljanja bez klizanja dužina duži A_0P jednaka je dužini kružnog luka AP, što je Rφ.

Parametarske jednačine cikloide: (u prikazanoj varijanati)

$$x(\varphi) = x_M = R\varphi + R\sin\varphi$$

$$y(\varphi) = y_M = R + R\cos\varphi$$

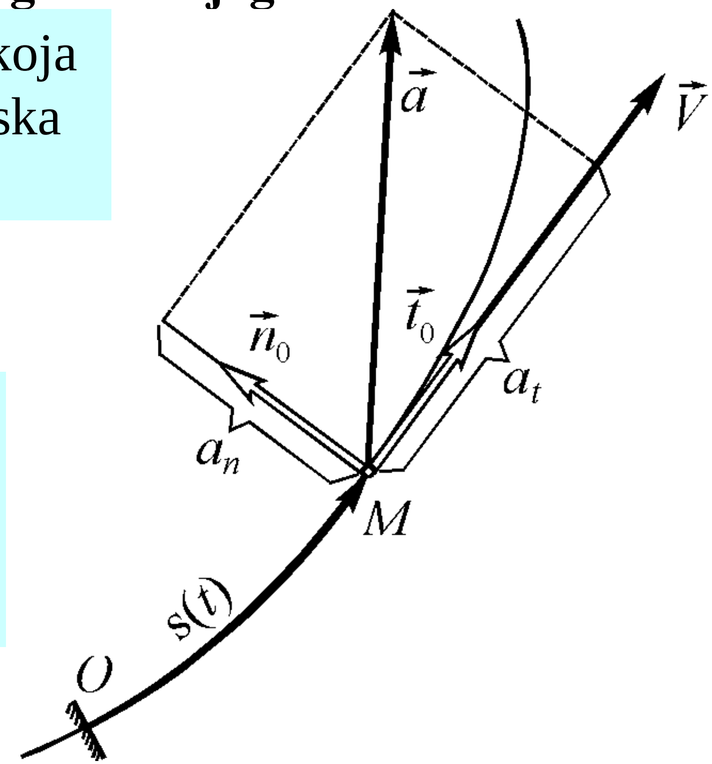
Brzina se može odrediti preko prvog izvoda:

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} + R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{y} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

4. Krivolinijska koordinata. Jedinični vektori tangente i normale. Vektor brzine izražen preko njegove projekcije na tangentu i njegov intenzitet.

U prirodnom koordinatnom sistemu koordinata koja u potpunosti određuje položaj tačke je krivolinijska (prirodna, lučna) koordinata *s(t)*.



Međusobno upravni jedinični vektori ovog koordinatnog sistema su $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$

Jedinični vektor tangente $\vec{t}_0$ ima smer porasta koordinate *s(t)*, dok je, njemu upravni, jedinični vektor normale $\vec{n}_0$ uvek usmeren u konkavnu stranu putanje.

Vektor brzine:

$$\vec{V} = V_t\vec{t}_0, \quad \vec{V} = \pm V\vec{t}_0$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = ds\vec{t}_0, \quad \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{t}_0, \quad \vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0 \quad \Rightarrow \quad V_t = \dot{s}$$

$$\vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0$$

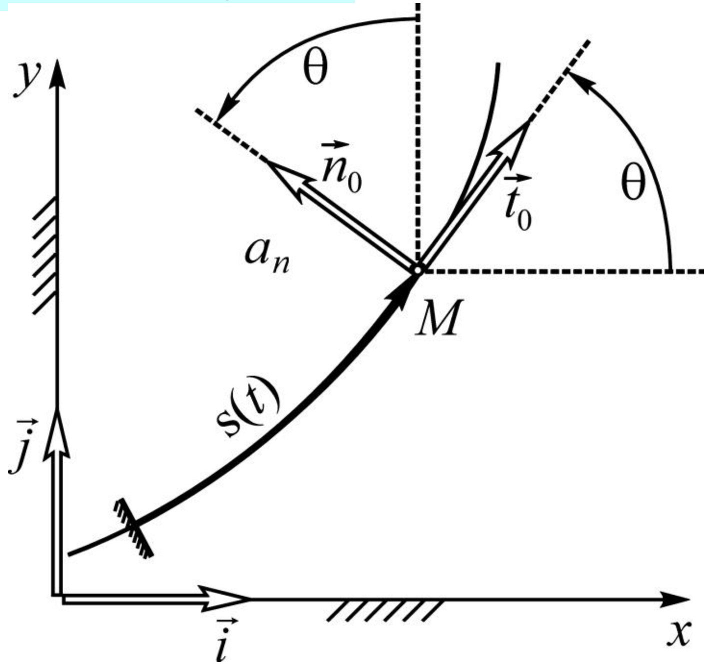
5. Tangencijalno i normalno ubrzanje

Vektor ubrzanja $\vec{a}$ u ovom koordinatnom sistemu ima oblik $\vec{a} = a_t\vec{t}_0 + a_n\vec{n}_0$

Projekcije ubrzanja na tangentu i normalu a_t i a_n nazivaju se tangencijalnim i normalnim ubrzanjem. $a^2 = a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}$

$\vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0$ Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobija se:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{s}\vec{t}_0 + \dot{s}\dot{\vec{t}}_0$$



Za dobijanje $\dot{\vec{t}}_0$ izrazimo $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$ preko $\vec{i}$ i $\vec{j}$

$$\vec{t}_0 = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \quad \vec{n}_0 = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\dot{\vec{t}}_0 = \frac{d}{dt}\vec{t}_0 = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\vec{i} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\vec{j}$$

$$\dot{\vec{t}}_0 = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = \dot{\theta}\vec{n}_0$$

$$\dot{\vec{t}}_0 = \dot{\theta}\vec{n}_0$$

U gornjem izvođenju koriščeni su: činjenica da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni i sledeći identiteti:

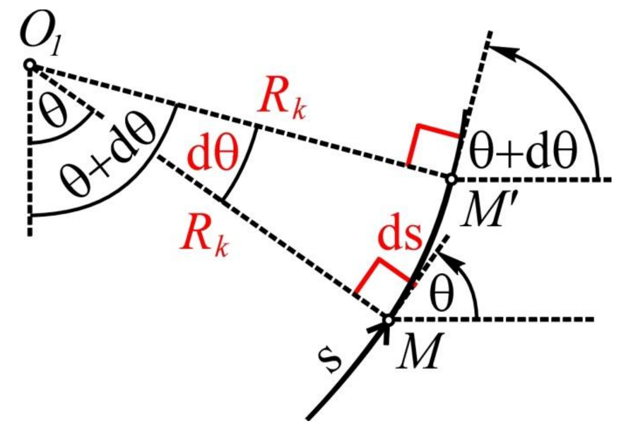
$$\frac{d}{dt}\cos\theta = \frac{d}{d\theta}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\sin\theta = \frac{d}{d\theta}\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

Sada, izraz za vektor ubrzanja $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t}_0 + \dot{s}\dot{\vec{t}}_0$ postaje $\vec{a} = \ddot{s}\vec{t}_0 + \dot{s}\dot{\theta}\vec{n}_0$,

što daje da tangencijalno i normalno ubrzanje određuju izrazi:

$a_t(t) = \ddot{s}(t)$, $a_n(t) = \dot{s}(t)\dot{\theta}(t)$

Odredimo $\dot{\theta}$, kako bi dobili konačni izraz za $a_n = \dot{s}\dot{\theta}$:



$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \dot{s} = \frac{\dot{s}}{R_k}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{R_k}$$

gde je, na osnovu slike, korišćena jednakost: $R_k \cdot d\theta = ds \Rightarrow \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{R_k}$

R_k - poluprečnik krivine putanje

Konačno, pošto je $\dot{s}^2 = V^2$, tangencijalno i normlno ubrzanje određuju formule:

$$a_t(t) = \ddot{s}(t), \quad |a_t(t)| = |\dot{V}(t)|, \quad a_n(t) = \frac{V(t)^2}{R_k(t)}.$$

Poluprečnik krivine u nekoj tački putanje predstavlja poluprečnik kruga koji najbolje aproksimira beskonačno malu okolinu te tačke.