54. Težište

Svako kruto telo je sačinjeno od velikog broja čestica (elementarnih delova). Kada se telo nalazi u blizini Zemljine površine na svaku od tih čestica dejstvuje sila njene težine koja je usmerena ka centru Zemlje. Posmatranjem krutih tela, čije su dimenzije, u odnosu na dimenzije Zemlje, zanemarljive, može se usvojiti da su sile težina pojedinih čestica tela međusobno paralelne. Te sile, s obzirom da su još i vezane za određene čestice tela, nazivaju se vezanim sistemom paralelnih sila. Pri ma kakvom okretanju tela u odnosu na Zemlju, ove sile menjaju pravac u odnosu na telo ali i dalje ostaju paralelne i jednako usmerene. One su uvek vertikalne i usmerene naniže. Napadne tačke tih sila nakon okretanja tela ostaju nepromenjene. Rezultanta sila težina svih čestica nekog krutog tela je sila težine samog tela.

Težište tela je tačka kroz koju prolazi napadna linija sile težine tela pri ma kakvom njegovom položaju u prostoru. Položaj težišta je nepromenljiv u odnosu na kruto telo.

55. Određivanje težišta krutog tela

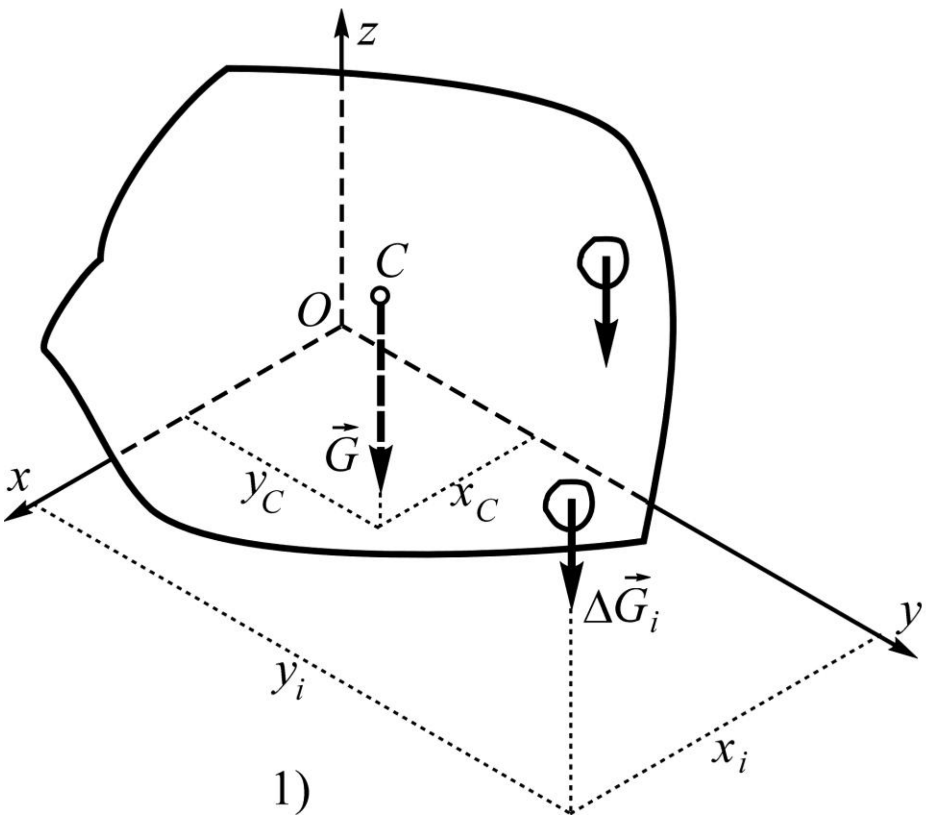
Korišćenjem Varinjonove teoreme, dobija se:

$$Gx_C = \sum \Delta G_i x_i \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{G}$$

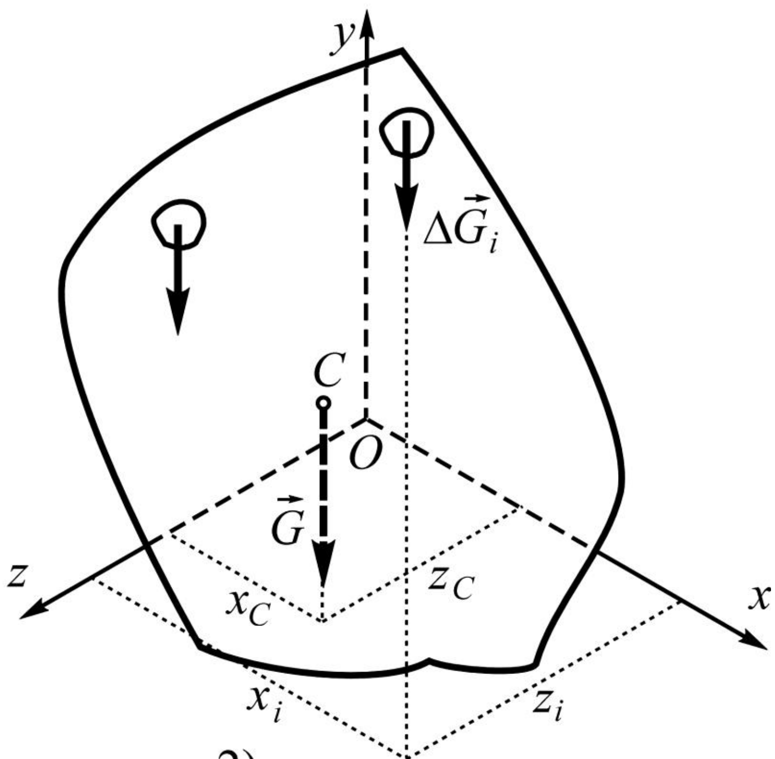
$$G = \sum \Delta G_i$$

$$-Gy_C = -\sum \Delta G_i y_i \Rightarrow y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{G}$$

$$Gz_C = \sum \Delta G_i z_i \quad \Rightarrow \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{G}$$



1)



2)

Za homogena tela, kod kojih specifična težina γ ima istu vrednost u svakom delu njihove zapremine, važe jednakosti: $\Delta G_i = \gamma\,\Delta V_i$, $G = \gamma\, V$, što daje:

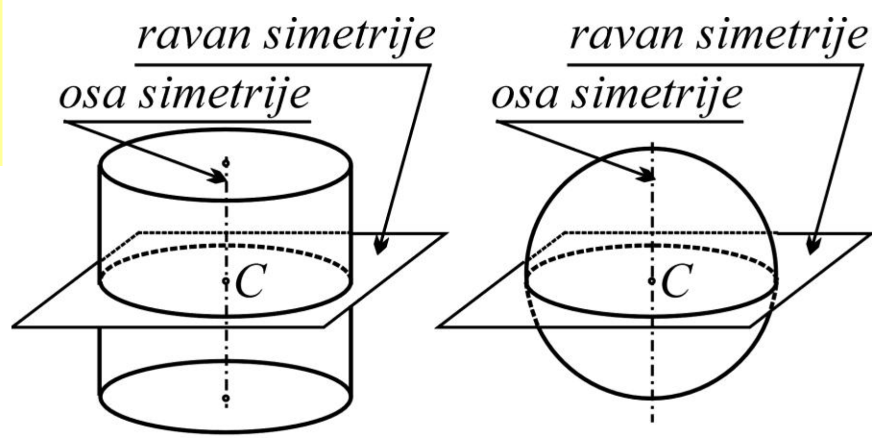
$$x_C = \frac{\sum \Delta V_i x_i}{V}, \qquad y_C = \frac{\sum \Delta V_i y_i}{V}, \qquad z_C = \frac{\sum \Delta V_i z_i}{V}.$$

Težište homogenog tela, pošto zavisi samo od njegovog geometrijskog oblika, naziva se i težištem zapremine.

Težište homogenog tela, pošto zavisi samo od njegovog geometrijskog oblika, naziva se i težištem zapremine. Kada se ΔV_i u gornjim izrazima zameni infinitezimalno malom veličinom dV, koordinata x_i zameni sa x a sume zamene određenim integralima po čitavoj zapremini, dobijaju se sledeće formule za definisanje težišta zapremine:

$$x_C = \frac{\int_{(V)} x\,dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_{(V)} y\,dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_{(V)} z\,dV}{V}.$$

Za tela koja imaju ravan simetrije težište se mora nalaziti u toj ravni. Kada telo ima osu simetrije težište se mora nalaziti na toj osi.

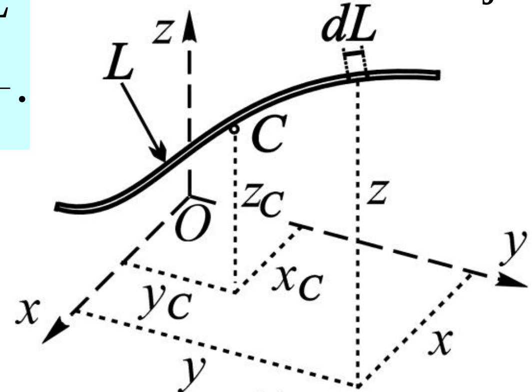


1) 2)

56. Određivanje težišta homogene linije (položaj težišta duži i kružnog luka)

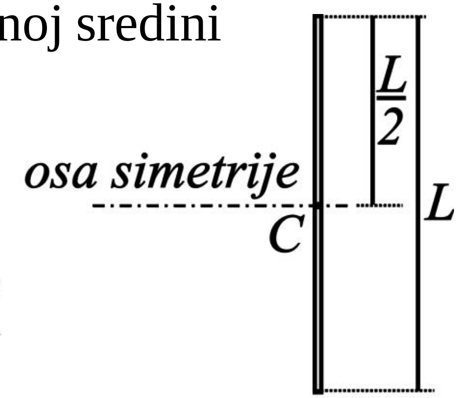
Formule za položaj težišta linije:

$$x_C=\frac{\int\limits_{(L)} x\,dL}{L},\quad y_C=\frac{\int\limits_{(L)} y\,dL}{L},\quad z_C=\frac{\int\limits_{(L)} z\,dL}{L}.$$



1)

Zbog simetrije je očigledno da se težište duži (štapa) nalazi na njenoj sredini



2)

TEŽIŠTE KRUŽNOG LUKA

$$x_C=\frac{\int\limits_{(L)} x\,dL}{L}=\frac{R^2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi}{2\alpha R}=$$

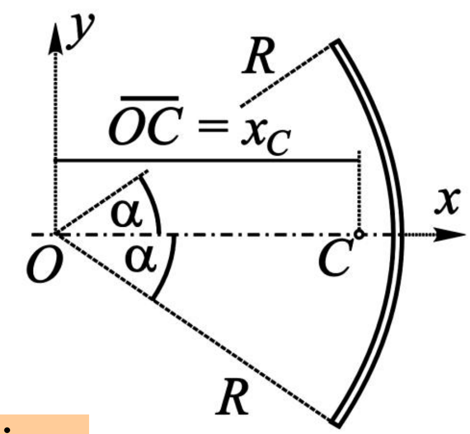
$$=\frac{R}{2\alpha}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}=$$

$$=\frac{R}{2\alpha}\left[\sin\alpha-\sin(-\alpha)\right]=\frac{R}{\alpha}\sin\alpha$$

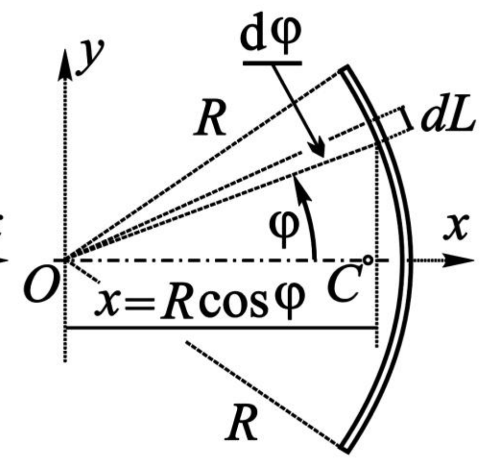
$$\Rightarrow\quad \overline{OC}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

Korišćenje jednakosti: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$x=R\cos\varphi,\quad dL=Rd\varphi,\quad L=2\alpha R$



3)

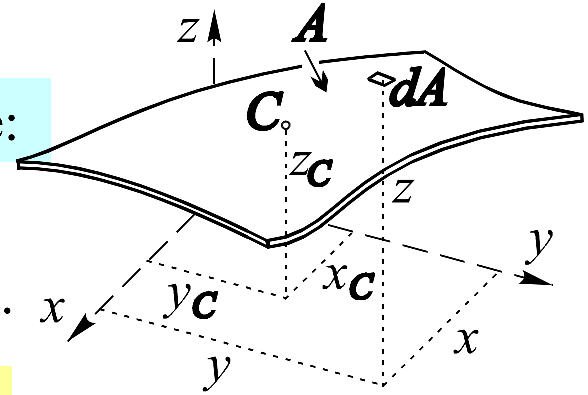


4)

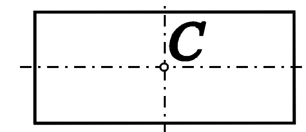
57. Određivanje težišta površine (položaj težišta pravougaonika, kruga, trougla i kružnog isečka)

Formule za položaj težišta površine:

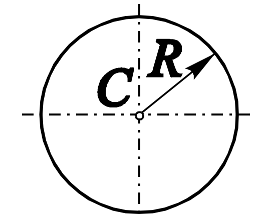
$$x_C = \frac{\int\limits_{(A)} x dA}{A}, y_C = \frac{\int\limits_{(A)} y dA}{A}, z_C = \frac{\int\limits_{(A)} z dA}{A}.$$



1)



2)



3)

POLOŽAJ TEŽIŠTA TROUGLA

Za trougao *ABD*, *DN* ($\overline{AN} = \overline{NB}$) i *AM* ($\overline{DM} = \overline{MB}$) su težišne linije.

Iz sličnosti trouglova *ABD* i *NBM* $\Rightarrow \overline{NM} = \overline{AD}/2$

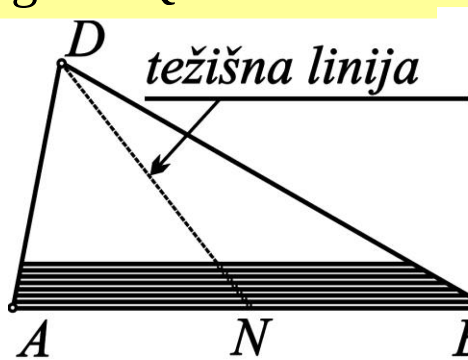
Iz sličnosti trouglova *ADC* i *MNC* $\Rightarrow \overline{NC} = \overline{DC}/2$

$\Rightarrow \overline{NC} = \overline{DN}/3,\ \overline{DC} = (2/3)\,\overline{DN}$

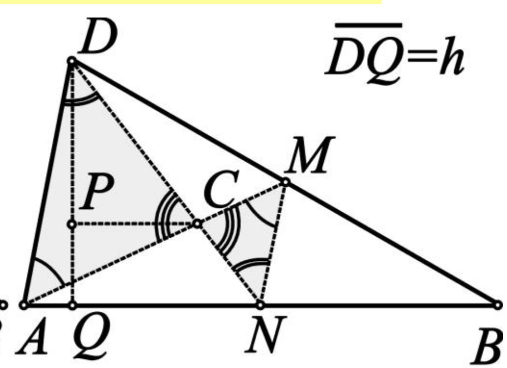
Iz sličnosti trouglova *QND* i *PCD* $\Rightarrow \overline{QP} = \overline{QD}/3 = h/3$

Zbog simetrije je očigledno da se težišta pravougaonika i kruga nalaze na svim njihovim osama simetrije.

Težište trougla se nalazi na trećini visine *h*, mereno od osnovice.

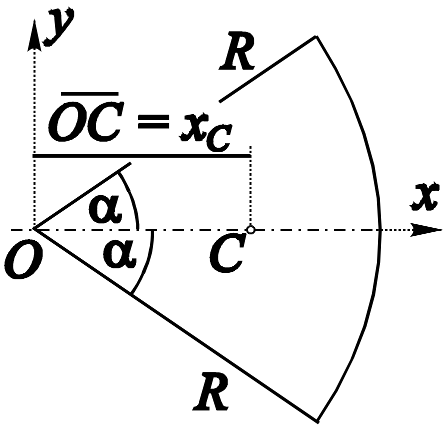


1)

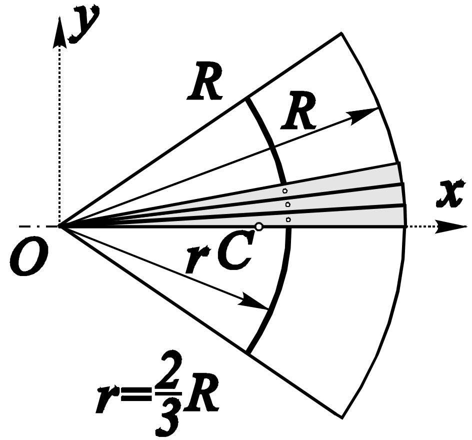


2)

POLOŽAJ TEŽIŠTA KRUŽNOG ISEČKA



1)



2)

Zamislimo da je kružni isečak (Sl.1) podeljen na veliki broj jednakih uskih trouglova, kao što je prikazano na slici 2. Svaki od tih trouglova praktično ima težište na rastojanju $r=2R/3$ od centra O odgovarajućeg kruga.

Spajanjem težišta svih tih uskih trouglova dobija se kružni luk kome se težište poklapa se težištem kružnog isečka. Zbog $r=2R/3$, u skladu sa formulom za težište kružnog luka, dobija se da je položaj težišta kružnog isečka određen izrazom:

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

57. Određivanje težišta složenih linija i složenih površina

Pod složenom linijom podrazumeva se linija sačinjena od više elementarnih linija, kojima su poznate dužine i položaji težišta. Izrazi, kojima se određuje položaj težišta složene linije, imaju oblik:

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{L}, \quad y_C = \frac{\sum l_i y_i}{L}, \quad z_C = \frac{\sum l_i z_i}{L}.$$

l_i - dužine elementarnih linija

x_i, y_i i z_i - koordinate težišta elementarne linije čija je dužina l_i

L – ukupna dužina složene linije koju određuje jednakost $L = \sum l_i$

Pod složenom površinom podrazumeva se površina koja se može dobiti sabiranjem ili sabiranjem i oduzimanjem više elementarnih površina, kojima su poznate veličine i položaji težišta. Trouglovi, pravougaonici, krugovi i kružni isečci su česte elementarne površine. Izrazi, kojima se određuje položaj težišta složene površine, imaju oblik:

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}, \quad z_C = \frac{\sum A_i z_i}{A}.$$

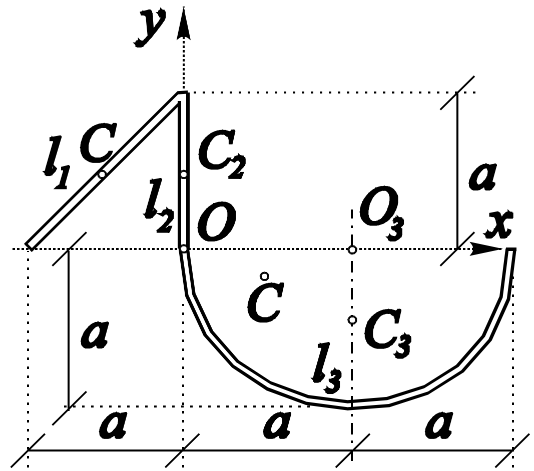
A_i - veličine elementarnih površina

x_i, y_i i z_i - koordinate težišta elementarne površine čija je površina A_i

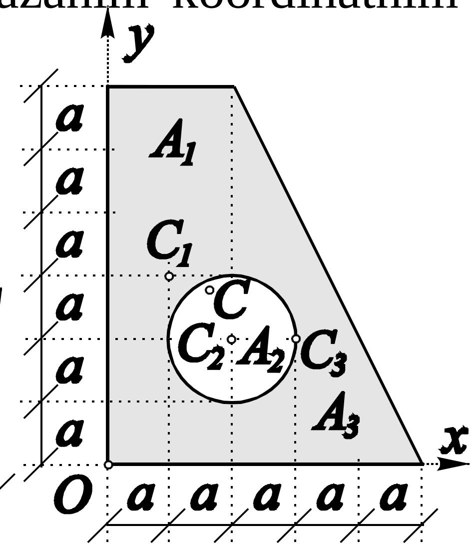
A – ukupna površina složene površine koju određuje jednakost $A = \sum A_i$

Sume u ovim izrazima su algebarske, što znači da je predznak nekog člana “+” ako se radi o površini koja se dodaje i “-” ako se radi o površini koja se oduzima.

Primer 11.1 Za složenu liniju, prikazanu na slici 1, i složenu površinu, prikazanu na slici 2, odrediti koordinate težišta u prikazanim koordinatnim sistemima. Veličina *a* je poznata.



1)



2)

Sl.1

$$l_1 = a\sqrt{2}, \quad l_2 = a, \quad l_3 = a\pi$$

$$x_1 = -\frac{a}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = a$$

$$y_1 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{a}{2}, \quad y_3 = -\frac{2a}{\pi}$$

$$L = l_1 + l_2 + l_3 = \left(1 + \sqrt{2} + \frac{2}{\pi}\right) a \approx 3.05\, a$$

$$x_C = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{L} \approx 0.746\, a$$

$$y_C = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{L} \approx -0.260\, a$$

Sl.2

$$A_1 = 12a^2, \quad A_2 = a^2\pi, \quad A_3 = 9a^2$$

$$x_1 = a, \quad x_2 = 2a, \quad x_3 = 3a$$

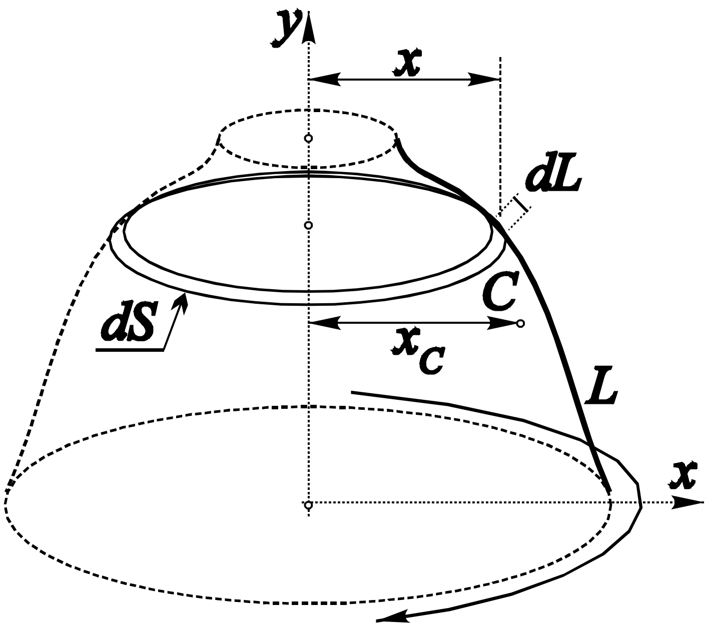
$$y_1 = 3a, \quad y_2 = 2a, \quad y_3 = 2a$$

$$A = \sum A_i = A_1 - A_2 + A_3 = (21 - \pi)\, a^2$$

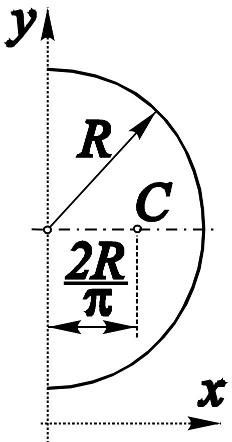
$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2 + A_3 x_3}{A} = \frac{39 - 2\pi}{21 - \pi} a$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{54 - 2\pi}{21 - \pi} a$$

59. Papus-Guldinova teorema o površini obrtnog tela. Uraditi primer.



1)



2)

Obrtanjem ravanske linije oko ose, koja se nalazi u istoj ravni sa linijom dobija se obrtna površina (Sl.1). Prikazana linija *L* je ravanska pošto leži u *xy* ravni. Obrtanje se vrši se oko *y* ose za pun ugao od 2π rad.

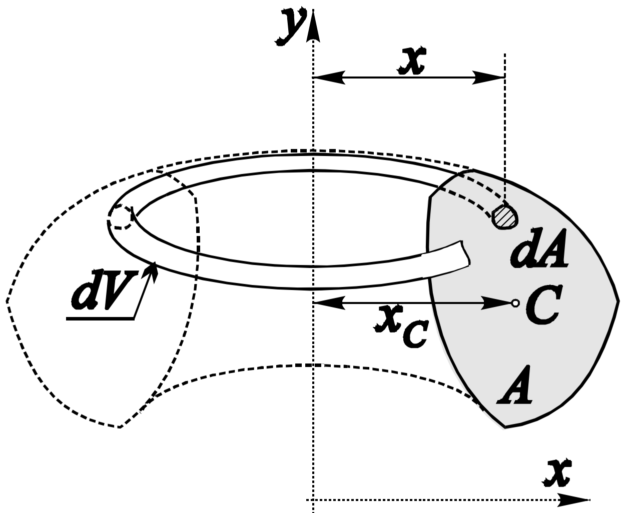
Obrtanjem elementartnog dela linije dužine *dL*, čija *x* koordinata iznosi *x*, oko *y* ose za pun krug, dobija se elementarna površina obrtnog tela koja iznosi

$dS = 2x\pi \cdot dL$ Integraljenjem ovog izraza dobija se $S = 2\pi \int\limits_{(L)} x dL = 2\pi x_C L$

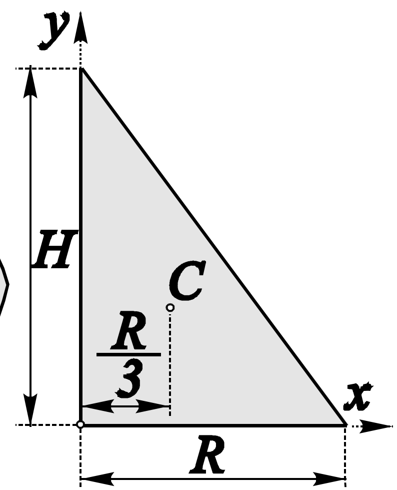
Primer 11.2 Korišćenjem Papus - Guldinove teoreme izračunati površinu lopte?
Lopta se može dobiti obrtanjem polovine kružnog luka oko *y* ose (Sl.2):

$$L = R\pi, \quad x_C = \frac{2R}{\pi} \quad \Rightarrow \quad S = 2\pi x_C L = 2\pi \frac{2R}{\pi} R\pi = 4R^2\pi$$

60. Papus-Guldinova teorema o zapremini obrtnog tela. Uraditi primer.



1)



2)

Obrtanjem ravanske površine oko ose, koja se nalazi u istoj ravni sa tom površinom dobija se obrtna zapremina (Sl.1). Prikazana površina *A* je ravanska pošto leži u *xy* ravni. Obrtanje se vrši oko *y* ose za pun ugao od 2π rad.

Obrtanjem elementartnog dela *dA* čija *x* koordinata iznosi *x*, oko *y* ose za pun krug, dobija se elementarna zapremina obrtnog tela koja iznosi

$dV = 2x\pi \cdot dA$ Integraljenjem ovog izraza dobija se $V = 2\pi \int\limits_{(L)} x dA = 2\pi x_C A$

Primer 11.3 Korišćenjem Papus-Guldinove teoreme odrediti formulu za zapreminu prave kupe čija je površina bazisa *B* a visina *H* ?

Prava kupa se može dobiti obrtanjem pravouglog trougla oko *y* ose (Sl-2).

$$x_C = \frac{R}{3}, \quad A = \frac{RH}{2} \quad \Rightarrow V = 2\pi x_C A = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{RH}{2} = \frac{R^2\pi \cdot H}{3} = \frac{B \cdot H}{3}$$