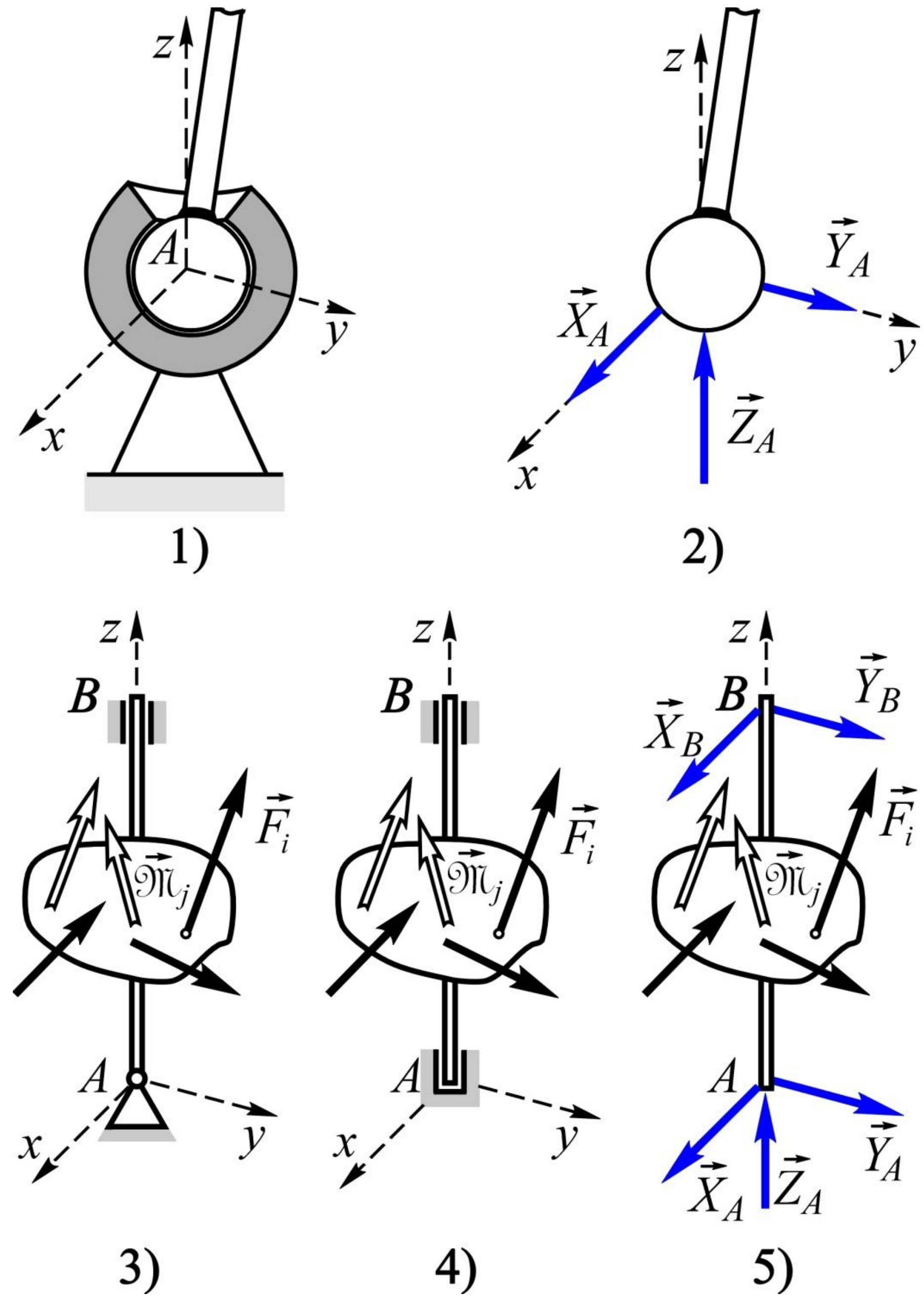
51. Reakcije sfernog i cilindričnog zgloba

Sferni zglob (Sl.1) je veza koja dozvoljava elementu obrtanje oko zgloba ali mu sprečava kretanje u bilo kom pravcu.
U praksi se veoma često sferni zglob *A* i cilindrični *B* koriste u paru kako je prikazano na slici 3 (odnosno, 4).

Tako postavljen cilindrični zglob dopušta obrtanje oko jedne ose (ovde je to osa *z*) i kretanje bez otpora u pravcu te ose. Iz navedenih razloga, za prikazan cilindrični zglob *B*, ne postoji reakcija u *z* pravcu već postoje reakcije u pravcima *x* i *y*.

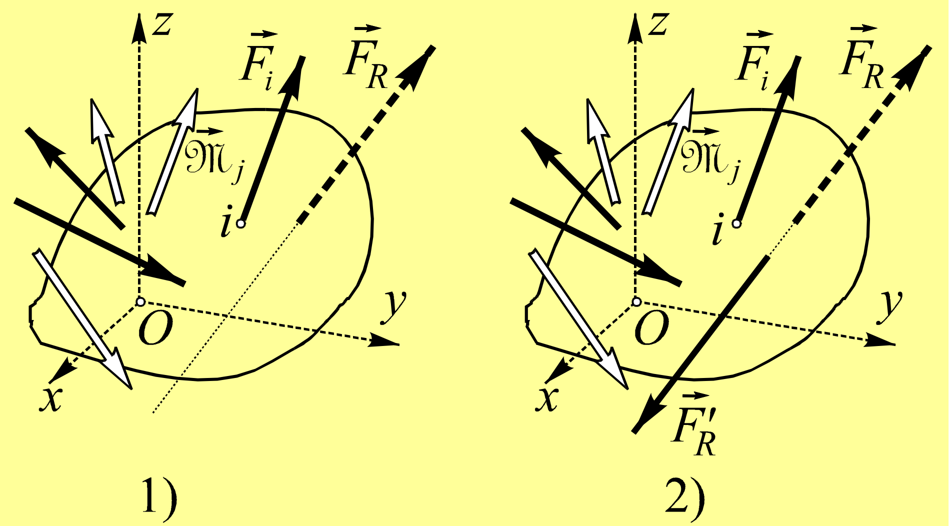


52. Ravnoteža proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova

U slučaju kada su i glavni vektor i glavni moment jednaki nula vektoru, telo na koje dejstvuje proizvoljan prostorni sistem sila i spregova se nalazi u ravnoteži. Dakle, za ravnotežu sistema moraju biti zadovoljene sledeće vektorske jednakosti: $\vec{F}_g = \vec{0}$, $\vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{0}$.

Projektovanjem ovih vektorskih jednakosti na koordinatne ose, dobijaju se sledeći nezavisni ***uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova***:

$$\sum X_i = 0$$
$$\sum Y_i = 0$$
$$\sum Z_i = 0$$
$$\sum M_{xi} = 0$$
$$\sum M_{yi} = 0$$
$$\sum M_{zi} = 0$$



Neka proizvoljan prostorni sistem sila i spregova ima rezultantu

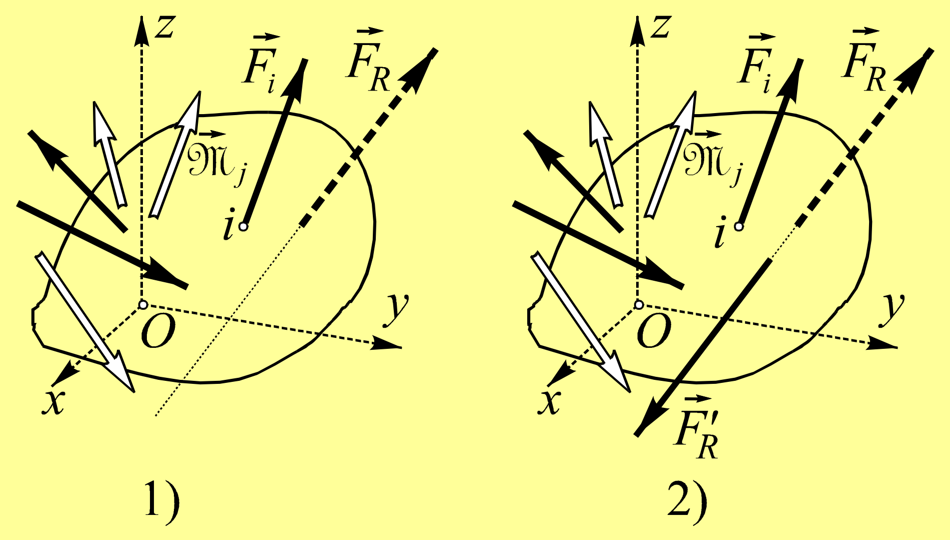
$\sum M_{xi} + M_x^{\vec{F}'_R} = 0$ zbog $M_x^{\vec{F}'_R} = -M_x^{\vec{F}_R}$ $\Rightarrow M_x^{\vec{F}_R} = \sum M_{xi}$

Suma momenata, nekog prostornog sistema sila i spregova, koji ima rezultantu, za neku osu, jednaka je momentu njegove rezultante za istu osu. (Varinjonova teorema)

53. Varinjonova teorema za prostorni sistem

Neka proizvoljan prostorni sistem sila i spregova ima rezultantu (slika 1)

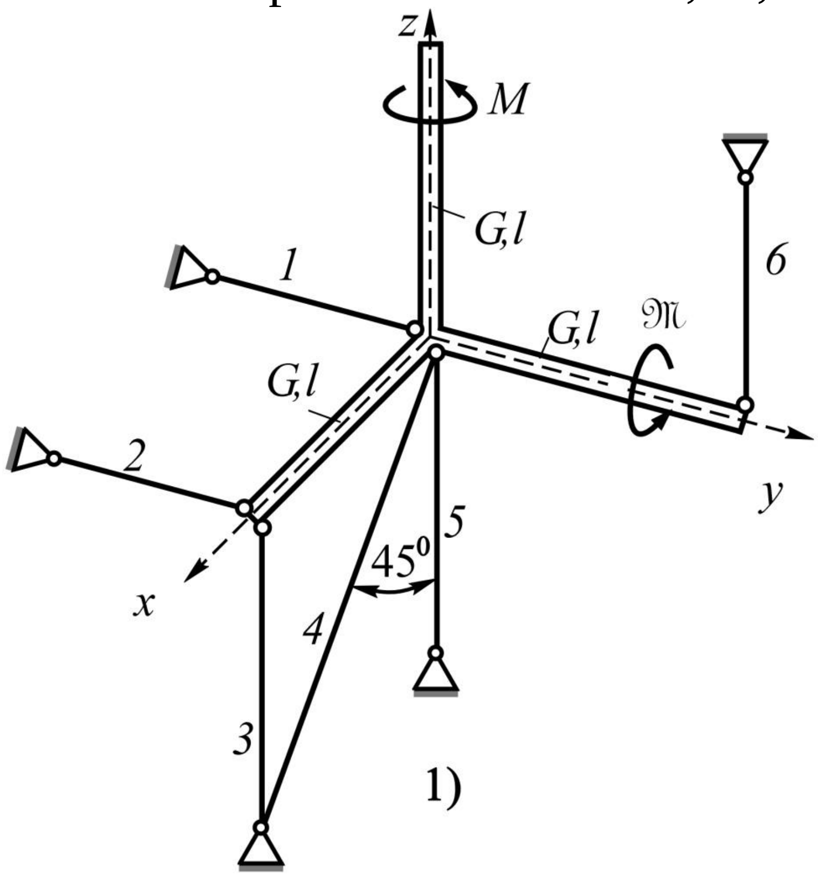
Dodavanjem tom sistemu sile $\vec{F}_g'$, koja ima isu napadnu liniju i intenzitet kao i sila $\vec{F}_g$, a suprotan smer, dobija se uravnotežen sistem sila za koji mora da važe sve jednačine ravnoteže (pa, naravno i momentne)

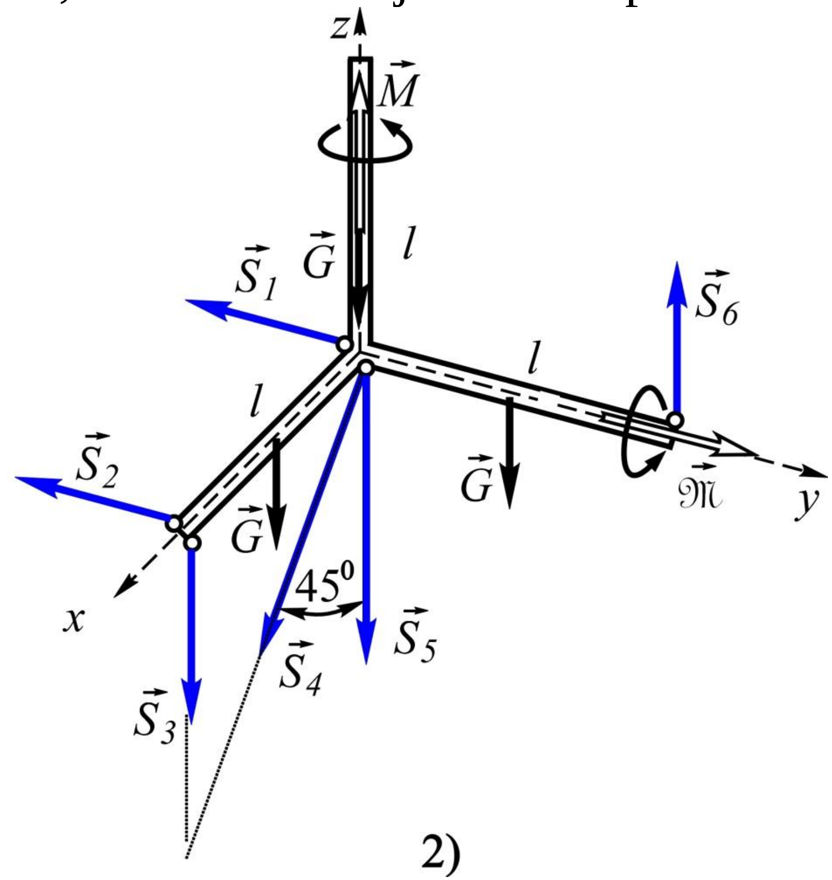


$$\sum M_{xi} + M_x^{\vec{F}_R'} = 0$$ zbog $$M_x^{\vec{F}_R'} = -M_x^{\vec{F}_R}$$ $$\Rightarrow M_x^{\vec{F}_R} = \sum M_{xi}$$

Suma momenata, nekog prostornog sistema sila i spregova, koji ima rezultantu, za neku osu, jednaka je momentu njegove rezultante za istu osu. (Varinjonova teorema)

Primer 10.3 Kruto telo sačinjeno od tri kruto spojena međusobno upravna istovetna homogena štapa, težina G, dužina l, održava u ravnoteži šest lakih štapova kao što je na slici 1 prikazano. Na teški vertikalni štap dejstvuje spreg momenta M, koji leži u ravni upravnoj na taj štap, smera datog na slici. Na teški štap, koji ima pravac ose y, dejstvuje spreg momenta $\mathfrak{M}$ koji leži u ravni upravnoj na taj štap, smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina G, M, $\mathfrak{M}$ i l, odrediti reakcije lakih štapova.





$$\sum X_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \quad S_4 = 0$$

$$\sum Y_i = -S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow \quad S_1 = -\frac{M}{l}$$

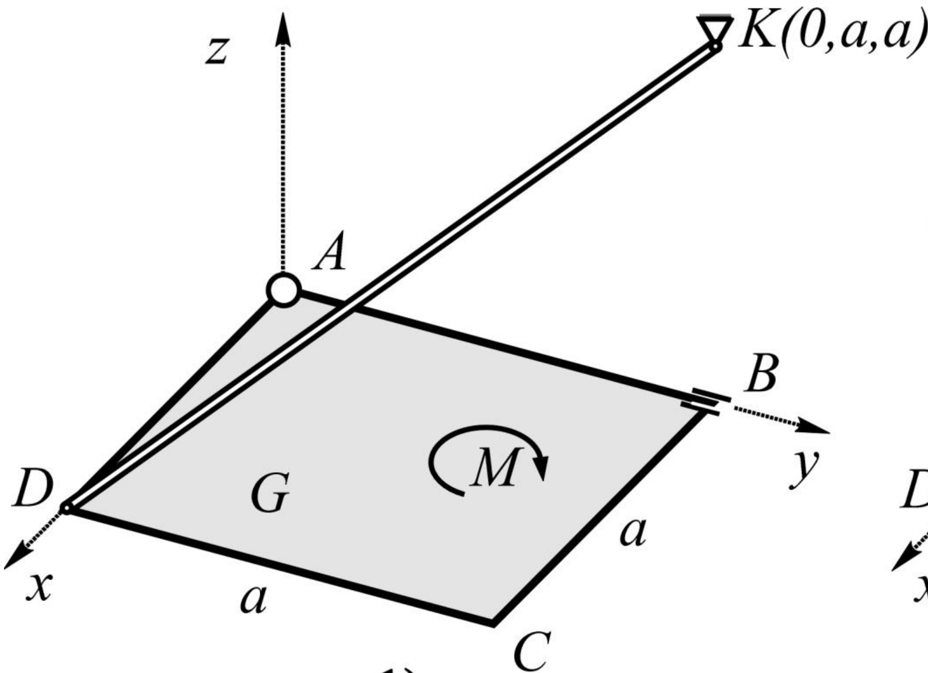
$$\sum Z_i = -S_3 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 + S_6 - 3G = 0 \quad \Rightarrow S_5 = \frac{\mathfrak{M}}{l} - 2G$$

$$\sum M_{x\,i} = -G \cdot \frac{l}{2} + S_6 \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{G}{2}$$

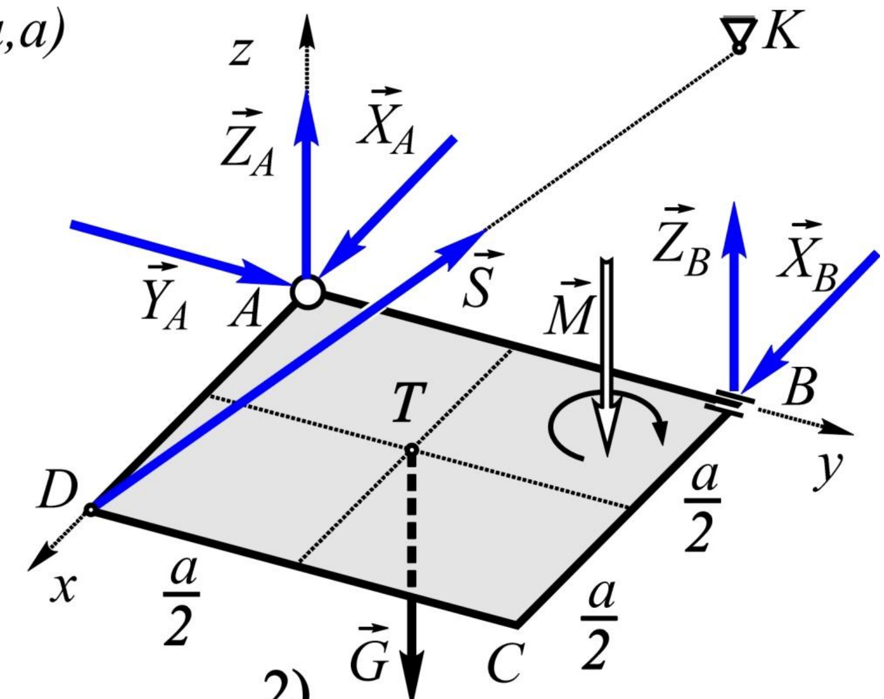
$$\sum M_{y\,i} = G \cdot \frac{l}{2} + S_3 \cdot l + \mathfrak{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{\mathfrak{M}}{l} - \frac{G}{2}$$

$$\sum M_{z\,i} = -S_2 \cdot l + M = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{M}{l}$$

Primer 10.4 Horizontalna homogena kvadratna ploča *ABCD*, težine *G*, stranice *a*, vezana je u tački *A* sfernim zglobom a u tački *B* cilindričnim (Sl.1). Za tačku *D* ploče vezan je laki štap *KD*, gde su zadate koordinate *K(0,a,a)*. Na ploču dejstvuje spreg momenta *M* koji leži u ravni ploče smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina *G*, *M* i *a*, odrediti reakcije veza u tačkama *A* i *B* kao i silu u lakom štapu *KD*.



1)



2)

$$D(a,0,0),\quad K(0,a,a)\quad \Rightarrow \overrightarrow{DK} = -a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$$

$$\overline{DK} = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$x_D = a,$$
$$y_D = z_D = 0$$

$$\vec{S} = \frac{S}{\overline{DK}}\overrightarrow{DK} = \frac{S}{a\sqrt{3}}\left(-a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}\right)$$

$$\vec{S} = -\frac{S}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{S}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{S}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$$X_S = -\frac{S}{\sqrt{3}},\ Y_S = \frac{S}{\sqrt{3}},\ Z_S = \frac{S}{\sqrt{3}}$$

Jednačine ravnoteže:

$$\sum X_i = X_A + X_B - \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \quad X_A = \frac{M}{a}$$

$$\sum Y_i = Y_A + \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = -\frac{G}{2}$$

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - G + \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_{xi} = Z_B \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B = \frac{G}{2}$$

$$\sum M_{yi} = G \cdot \frac{a}{2} - \frac{S}{\sqrt{3}} \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{3}}{2}G$$

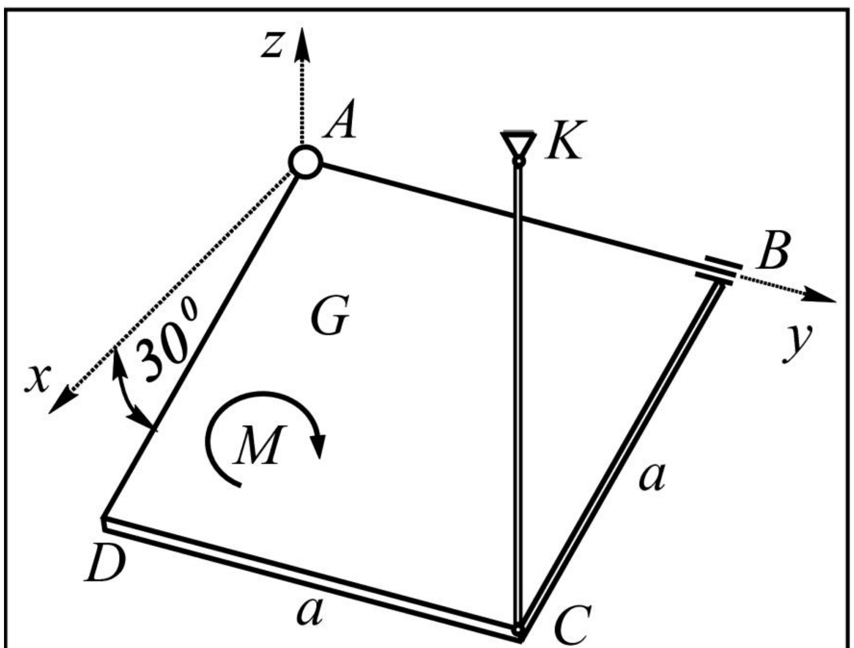
$$\sum M_{zi} = -X_B \cdot a + \frac{S}{\sqrt{3}} \cdot a - M = 0 \quad \Rightarrow \quad X_B = \frac{G}{2} - \frac{M}{a}$$

$$M_x^{\vec{S}} = y_D Z_S - z_D Y_S = 0$$

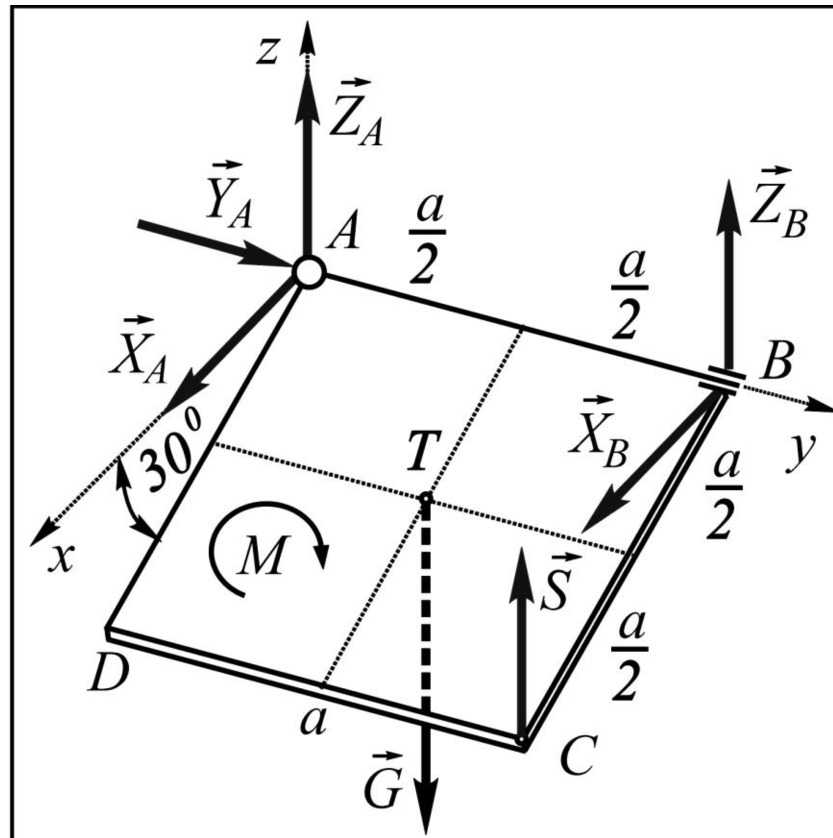
$$M_y^{\vec{S}} = z_D X_S - x_D Z_S = -a\frac{S}{\sqrt{3}}$$

$$M_z^{\vec{S}} = x_D Y_S - y_D X_S = a\frac{S}{\sqrt{3}}$$

Primer 10.5 Homogena kvadratna ploča *ABCD* (Sl.1), težine *G*, stranice *a*, koja sa horizontalnom *xAy* ravni gradi ugao od 30^0, vezana je u tački *A* sfernim zglobom a u tački *B* cilindričnim. Za tačku *C* ploče vezan je vertikalni laki štap *KC*. Na ploču dejstvuje spreg momenta M koji leži u ravni ploče smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina *G*, *M* i *a* odrediti reakcije veza u zglobovima *A* i *B* kao i silu u lakom štapu.



1)



2)

Jednačine ravnoteže:

$$\sum X_i = X_A + X_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{a}$$

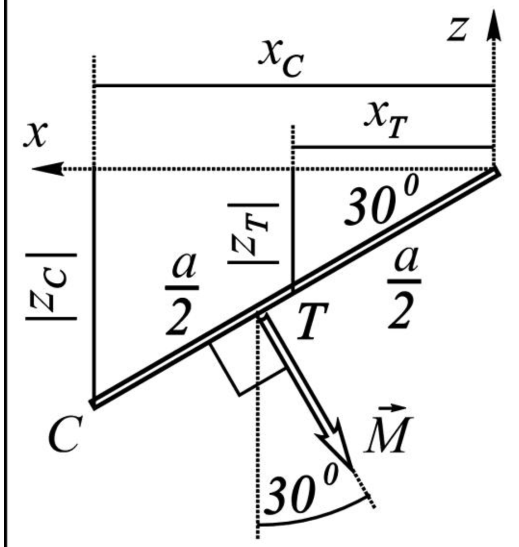
$$\sum Y_i = Y_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 0$$

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - G + S = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = \frac{G}{2} - \frac{M}{2a}$$

$$\sum M_{xi} = Z_B \cdot a + S \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} - M \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow Z_B = \frac{M}{2a}$$

$$\sum M_{yi} = G \cdot \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - S \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{G}{2}$$

$$\sum M_{zi} = -X_B \cdot a - M\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{a}$$



$$x_T = \frac{a}{2}\cos 30^0$$

$$z_T = -\frac{a}{2}\sin 30^0$$

$$x_C = a\cos 30^0$$

$$z_C = -a\sin 30^0$$

$$M_x = -M \sin 30^0$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = -M\cos 30^0$$

3)