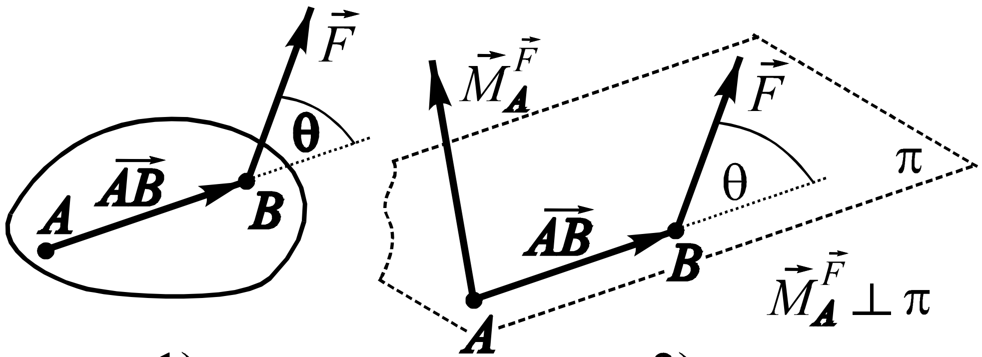
43. Vektor momenta sile za tačku

Vektor momenta sile, koja dejstvuje na neku tačku tela, za proizvoljno izabranu tačku predstavlja meru obrtnog dejstva sile u odnosu na tu proizvoljno izabranu tačku.

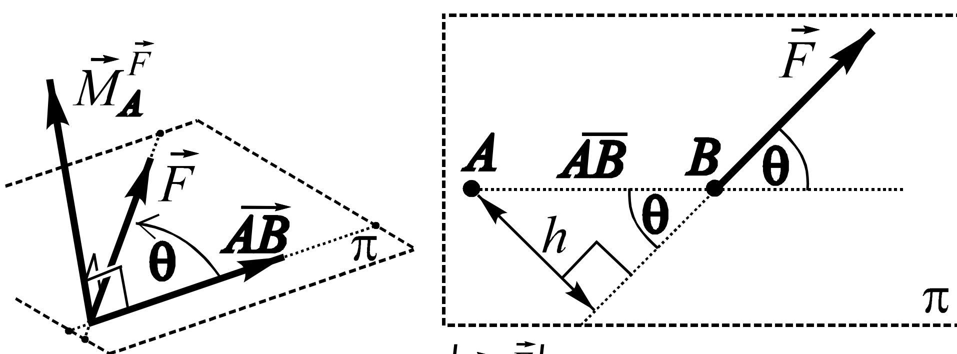


1) 2)

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

Ovde je tačka *A* momentna tačka a tačka *B* napadna tačka sile

Intenzitet vektora momenta sile za tačku iznosi $\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot \overline{AB} \cdot \sin\theta = F \cdot h$



$$\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot \overline{AB} \cdot \sin\theta = F \cdot h$$

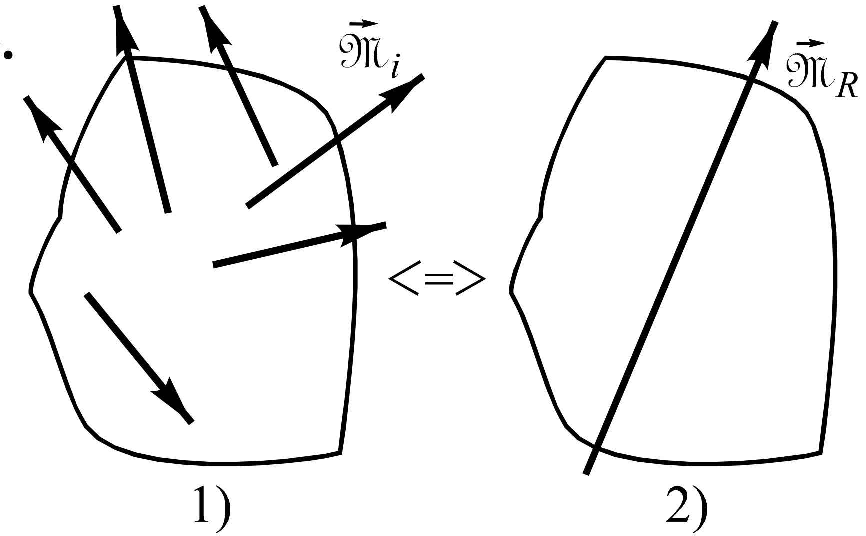
1) 2)

Rastojanje *h*, koje leži u ravni π koju obrazuju napadna linija sile i momentna tačka, predstavlja najkraće rastojanje između napadne linije sile i momentne tačke, i naziva se krakom sile $\vec{F}$ za tačku *A*.

44. Prostorni sistem spregova, vektor rezultujućeg sprega i uslovi ravnoteže.

Sistem spregova može biti zamenjen jednostavnijim ekvivalentnim dejstvom koje čini rezultujući spreg.

$$\vec{\mathfrak{M}}_R = \vec{\mathfrak{M}}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathfrak{M}}_R = \sum \vec{\mathfrak{M}}_i$$



Proizvoljni sistem spregova i rezultujući spreg

$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix}$$

$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy}$$

$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz}$$

$\vec{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_{ix}\vec{i} + \mathfrak{M}_{iy}\vec{j} + \mathfrak{M}_{iz}\vec{k}$ -vektor i-tog sprega

$\vec{\mathfrak{M}}_R = \mathfrak{M}_{Rx}\vec{i} + \mathfrak{M}_{Ry}\vec{j} + \mathfrak{M}_{Rz}\vec{k}$ -vektor rezultujućeg sprega

Telo na koje dejstvuje proizvoljan sistem spregova biće u ravnoteži ako je vektor rezultujućeg sprega jednak nula vektoru, tj. ako su njegove projekcije na sve tri koordinatne ose jednake nuli. To znači da analitički uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema spregova glase:

$$\sum \mathfrak{M}_{ix} = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{iy} = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{iz} = 0$$

Primer 5.3 Odrediti vektor rezultujućeg sprega koji zamenjuje sledeći sistem zadatih spregova: $\vec{\mathfrak{M}}_1 = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 1\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_3 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_4 = 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix} = 2 - 2 + 3 + 0 = 3$$

$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy} = -1 + 3 - 2 + 2 = 2$$

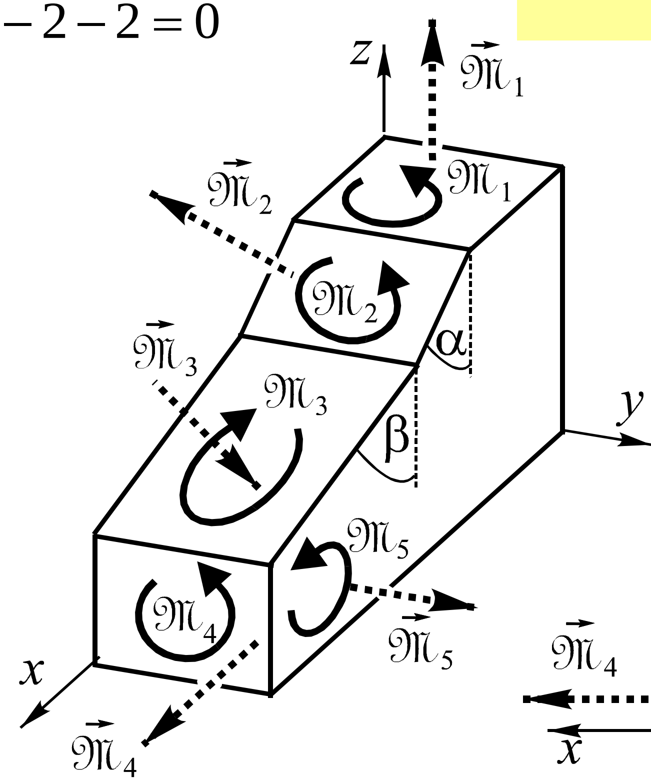
$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz} = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\mathfrak{M}}_R = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

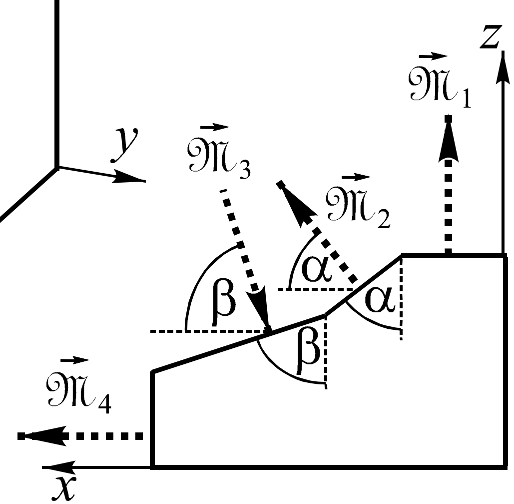
$$\Rightarrow \mathfrak{M}_R = \sqrt{\mathfrak{M}_{Rx}^2 + \mathfrak{M}_{Ry}^2 + \mathfrak{M}_{Rz}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Primer 5.4

Za zadat sistem spregova odrediti rezultujući spreg. Podaci su: $\mathfrak{M}_1$=1 kNm, $\mathfrak{M}_2$=2 kNm, $\mathfrak{M}_3$=2 kNm, $\mathfrak{M}_4$=1 kNm, $\mathfrak{M}_5$=2 kNm, $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$.



1)



2)

$$\mathfrak{M}_{1z}=\mathfrak{M}_1=1\,\text{kNm},\quad \mathfrak{M}_{1x}=\mathfrak{M}_{1y}=0,$$

$$\mathfrak{M}_{4x}=\mathfrak{M}_4=1\,\text{kNm},\quad \mathfrak{M}_{4y}=\mathfrak{M}_{4z}=0,$$

$$\mathfrak{M}_{5y}=\mathfrak{M}_5=2\,\text{kNm},\quad \mathfrak{M}_{5x}=\mathfrak{M}_{5z}=0,$$

$$\mathfrak{M}_{2y}=0,\quad \mathfrak{M}_{3y}=0,$$

$$\mathfrak{M}_{2x}=\mathfrak{M}_2\cos\alpha=\sqrt{2}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{2z}=\mathfrak{M}_2\sin\alpha=\sqrt{2}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3x}=-\mathfrak{M}_3\cos\beta=-1\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3z}=-\mathfrak{M}_3\sin\beta=-\sqrt{3}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{Rx}=\sum\mathfrak{M}_{ix}=0+\sqrt{2}-1+1+0=\sqrt{2}\ \text{kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{Ry}=\sum\mathfrak{M}_{iy}=0+0+0+0+2=2\ \text{kNm},$$

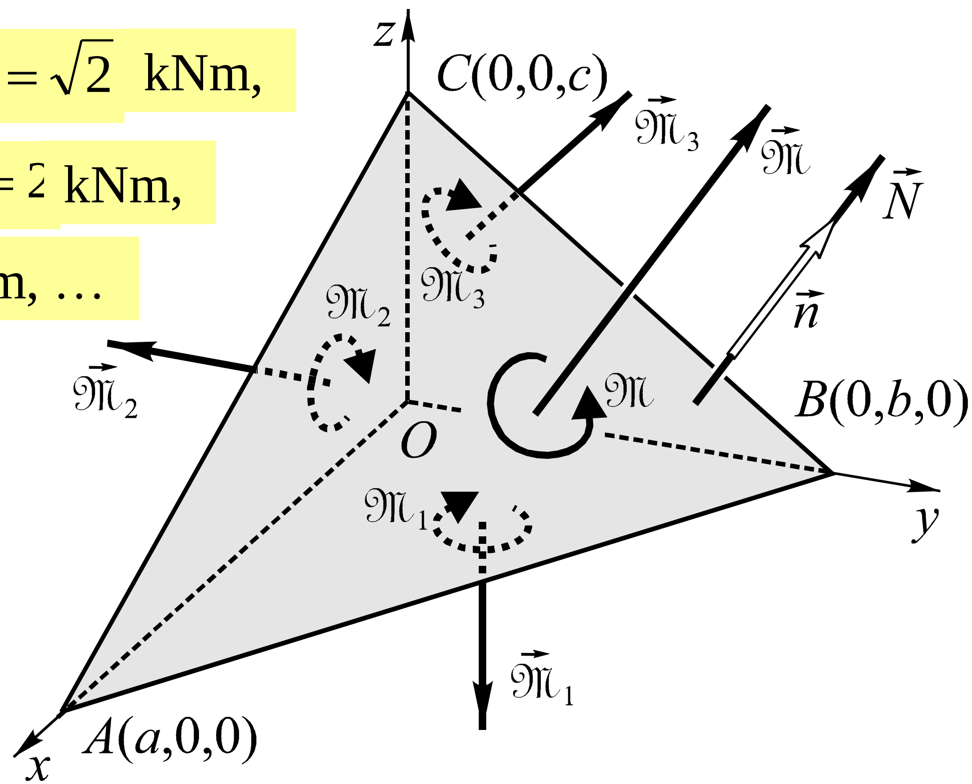
$$\mathfrak{M}_{Rz}=\sum\mathfrak{M}_{iz}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\ \text{kNm},\ \ldots$$

Primer 5.5

(Primer ravnoteže spregova)

Poznate veličine: $\mathfrak{M}$, a, b i c.

Odrediti: $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ i $\mathfrak{M}_3$.



Uvodimo jedinični vektor $\vec{n}$, normalan na ravan ABC $\qquad \vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\vec{n}$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k} \quad \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{bc\,\vec{i} + ac\,\vec{j} + ab\,\vec{k}}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\vec{n} = \frac{\mathfrak{M}\left(bc\,\vec{i} + ac\,\vec{j} + ab\,\vec{k}\right)}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_x\vec{i} + \mathfrak{M}_y\vec{j} + \mathfrak{M}_z\vec{k}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{bc}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\,\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{ac}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\,\mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{ab}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\,\mathfrak{M}\,.$$

Uslovi ravnoteže:

$$\sum \mathfrak{M}_{ix} = -\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_x = 0$$

$$\sum \mathfrak{M}_{iy} = -\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_y = 0$$

$$\sum \mathfrak{M}_{iz} = -\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_z = 0$$

....

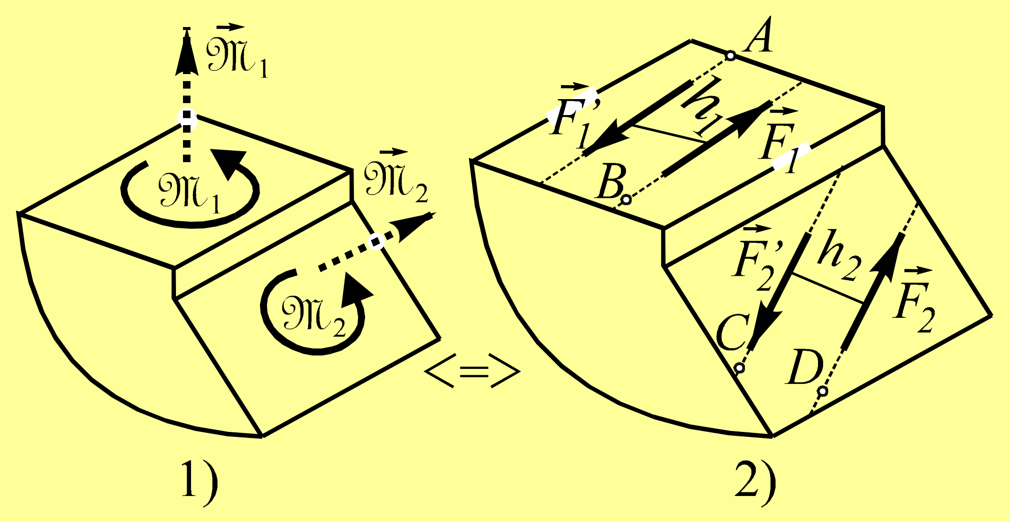
45. Izražavanje sprega preko momenta sile za tačku (vektori).

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_A^{\vec{F}_1}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1' = \vec{M}_B^{\vec{F}_1'}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_2 = \overrightarrow{CD} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_C^{\vec{F}_2}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_2 = \overrightarrow{DC} \times \vec{F}_2' = \vec{M}_D^{\vec{F}_2'}$$

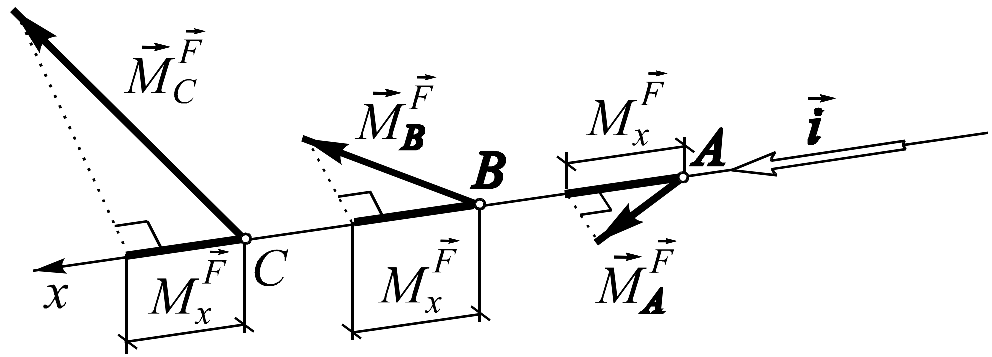


Vektor sprega se može odrediti preko vektora momenta sile za tačku

Jedini uslov koji moraju da zadovolje tačke A, B, C i D je da se nalaze na proizvoljnim mestima napadnih linija sila: $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_2$.

46. Moment sile za osu

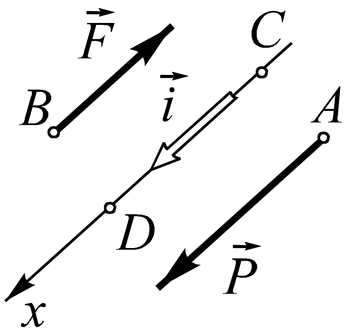
Moment sile za osu je skalarna veličina koja predstavlja meru obrtnog dejstva sile za tu osu. Može se dobiti projektovanjem na osu vektora momenta sile za proizvoljnu tačku na toj osi.



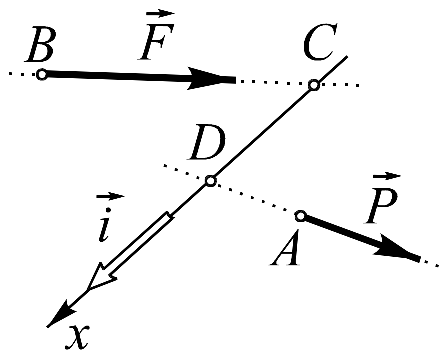
Ovde, moment sile $\vec{F}$ *za x osu određuje ma koji od narednih skalarnih proizvoda:*

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_A^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \vec{M}_B^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \vec{M}_C^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = ...$$

Sile koje su paralelne sa osom i sile čije napadne linije presecaju osu nemaju obrtno dejstvo oko te ose, tj. momenti takvih sila za osu jednaki su nuli



1)



2)

1) $\Rightarrow$

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_D^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{DB} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{i} = 0$$

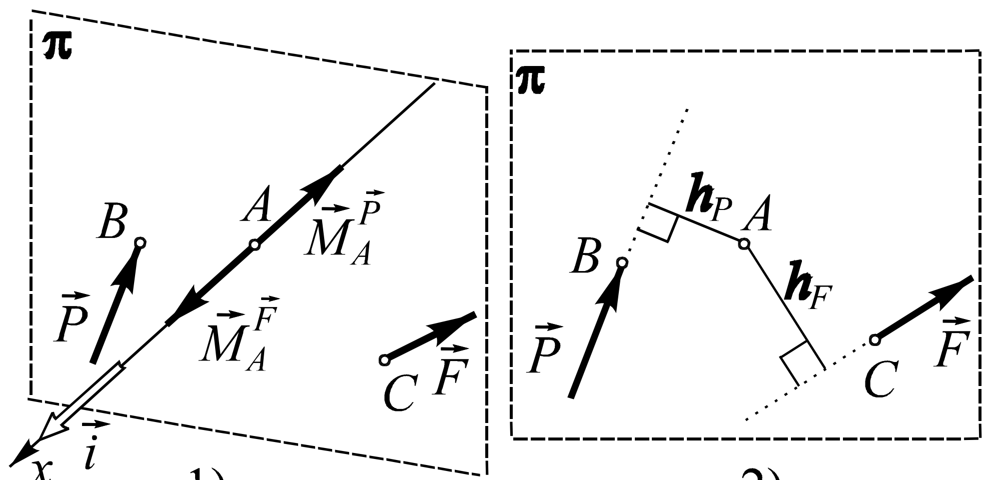
$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_C^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{CA} \times \vec{P}\right) \cdot \vec{i} = 0$$

2) $\Rightarrow$

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_C^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{CB} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{i} = \vec{0} \cdot \vec{i} = 0$$

$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_D^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{DA} \times \vec{P}\right) \cdot \vec{i} = \vec{0} \cdot \vec{i} = 0$$

Slučaj kada sila leži u ravni upravnoj na osu



1) 2)

$$\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot h_F, \quad \left|\vec{M}_A^{\vec{P}}\right| = P \cdot h_P$$

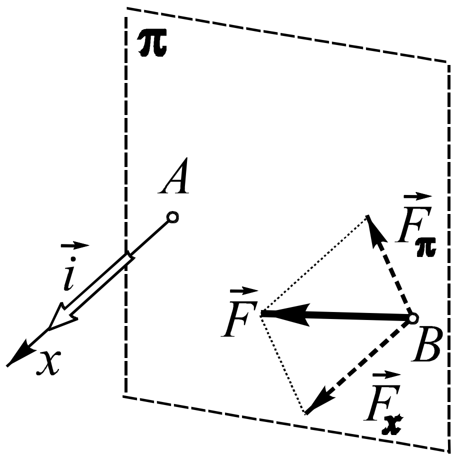
$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_A^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = +F \cdot h_F$$

$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_A^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = -P \cdot h_P$$

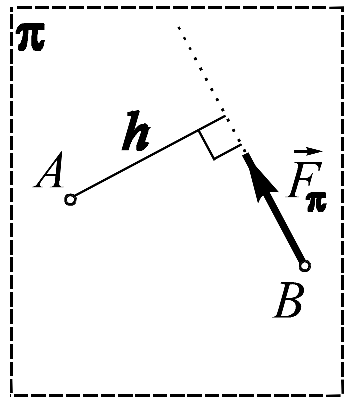
Praktično se mement sile za osu, kada sila leži u ravni upravnoj na osu, određuje prikazom te ravni u pravoj veličini tako što se posmatra sa strane u koju je usmerena osa

U takvom pogledu osa se vidi kao tačka a sila, njena napadna linija i najkraće rastojanje između napadne linije sile i ose vide se u pravoj veličini. Predznak momenta za osu je “+” ako, tako gledano, sila teži da obrne oko ose u pozitivnom matematičkom smeru (suprotno od smera kazaljke na satu), dok je predznak “-” ako sila teži da obrne oko ose u smeru kazaljke na satu. Sama vrednost koja sledi iza predznaka jednaka je proizvodu intenziteta sile i kraka sile. Krak sile predstavlja najkraće rastojanje između napadne linije sile i ose.

Slučaj kada sila zauzima proizvoljan položaj u odnosu na osu



1)



2)

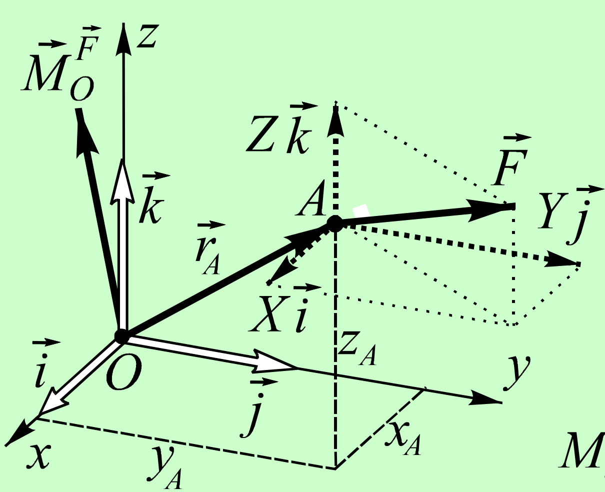
$$M_x^{\vec{F}} = M_x^{\vec{F}_\pi} + M_x^{\vec{F}_x}$$

$$M_x^{\vec{F}} = M_x^{\vec{F}_\pi} = F_\pi \cdot h$$

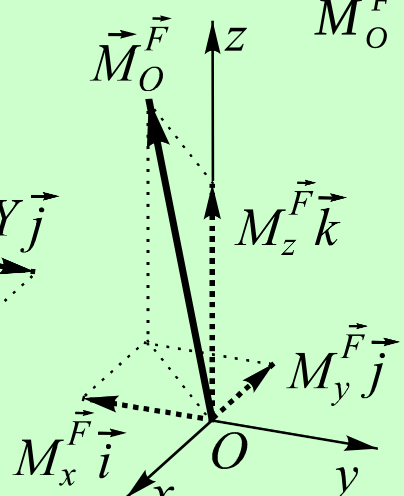
Moment proizvoljne sile $\vec{F}$ određene svojim projekcijama X, Y i Z i koordinatama x, y i z njene napadne tačke:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} + $$

$$+ (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$



1)



2)

$$M_x^{\vec{F}} = yZ - zY$$

$$M_y^{\vec{F}} = zX - xZ$$

$$M_z^{\vec{F}} = xY - yX$$

47. Moment sprega za osu (prostorni problemi).

Pod pojmom “moment sprega za neku osu” podrazumevaće se mera obrtnog dejstva sprega u odnosu na tu osu.

Moment sprega za neku osu jednak je projekciji vektora tog sprega na tu osu.

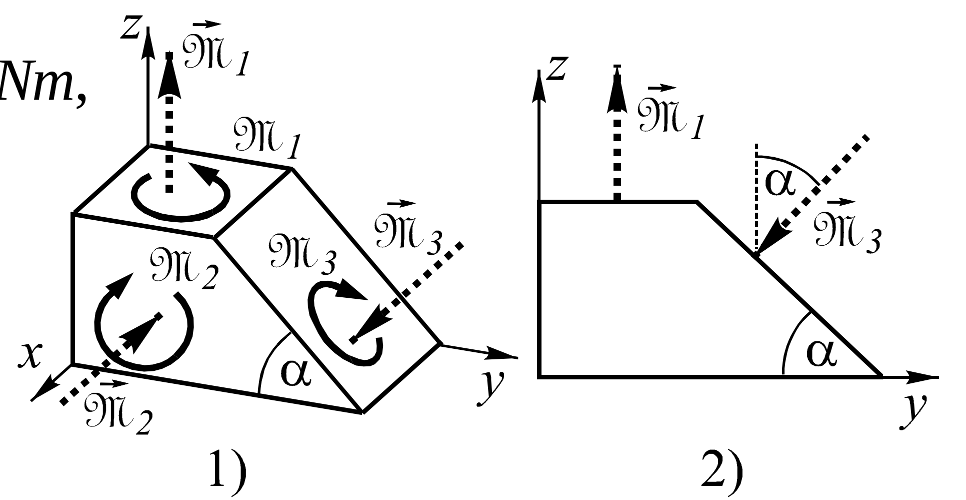
Dakle, za spreg čiji je vektor $\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_x \vec{i} + \mathfrak{M}_y \vec{j} + \mathfrak{M}_z \vec{k}$ veličine $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y$ i $\mathfrak{M}_z$ istovremeno predstavljaju, kako njegove projekcije na koordinatne ose, tako i momente tog sprega za iste ose.

Primer 5.9

Podaci su: $\mathfrak{M}_1 = 1\, kNm, \mathfrak{M}_2 = 2\, kNm,$

$\mathfrak{M}_3 = 2\, kNm, \alpha = 45^0.$

Odrediti momente spregova za koordinatne ose?



$$\mathfrak{M}_{3y} = -\mathfrak{M}_3 \sin\alpha = -\sqrt{2}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3z} = -\mathfrak{M}_3 \cos\alpha = -\sqrt{2}\,\text{kNm}$$

………. …….

48. Redukcija proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na tačku koordinatnog početka. Glavni vektor i glavni moment.

U opštem slučaju, svaki proizvoljni prostorni sistem sila i spregova (slika 1) može da se svede na torzer (slika 2) sačinjen od dva vektora. Jedan od ta dva vektora je sila $\vec{F}_g$ (glavni vektor), a drugi je spreg $\vec{\mathfrak{M}}_g$ (glavni moment)

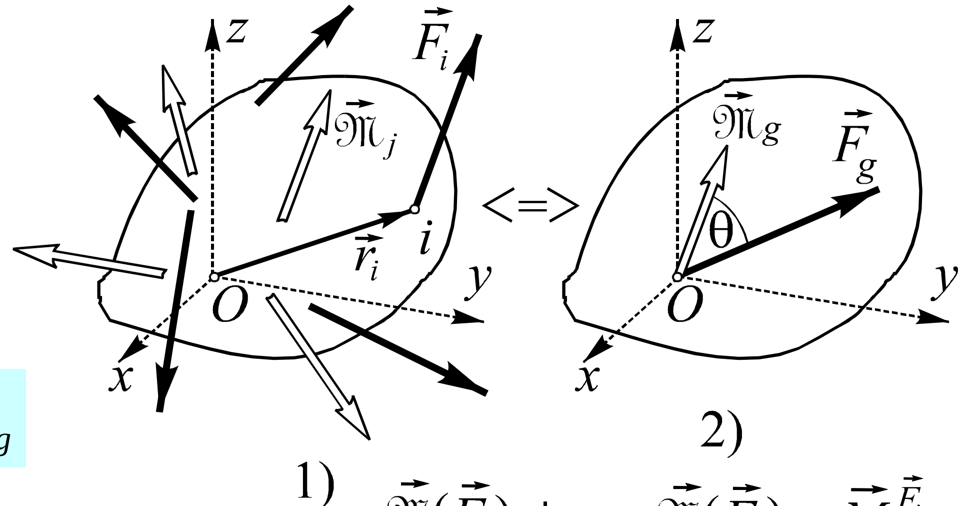
To se postiže redukcijom svake od sila na tačku koordinatnog početka O. (slike 3 i 4)

Glavni vektor $\vec{F}_g = X_g \vec{i} + Y_g \vec{j} + Z_g \vec{k}$

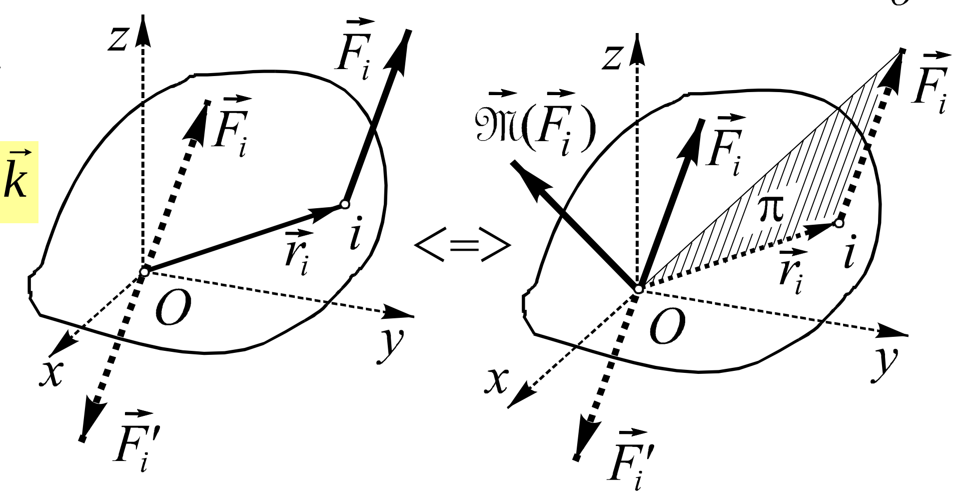
Glavni moment

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \mathfrak{M}_{gx}\, \vec{i} + \mathfrak{M}_{gy}\, \vec{j} + \mathfrak{M}_{gz}\, \vec{k}$$

Ugao između ta dva vektora određuje kosinusna teorema.



$\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) \perp \pi \qquad \vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) = \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$



3) 4)

$$\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = \mathfrak{M}_g F_g \cos\theta \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g}{\mathfrak{M}_g F_g}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = \mathfrak{M}_{gx} X_g + \mathfrak{M}_{gy} Y_g + \mathfrak{M}_{gz} Z_g$$

49. Projekcije glavnog vektora i glavnog momenta proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na koordinatne ose.

Projekcije glavnog vektora se dobijaju projektovanjem vektorske jednakosti

$$\vec{F}_g = \sum \vec{F}_i$$

na koordinatne ose

$$X_g = \sum X_i,\ \ Y_g = \sum Y_i,\ \ Z_g = \sum Z_i$$

Glavni moment čine spregovi koji su rezultat redukcije sila $\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i)$ i zadati spregovi $\vec{\mathfrak{M}}_j$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \sum \vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) + \sum \vec{\mathfrak{M}}_j$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

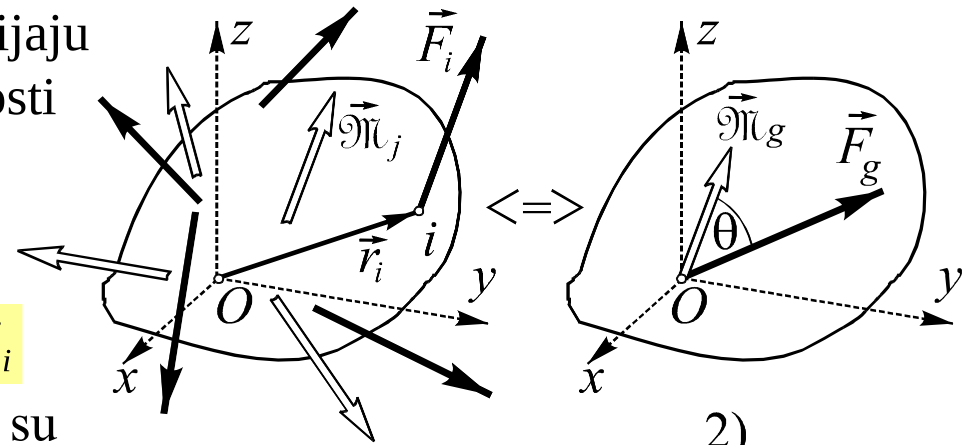
Projekcije glavnog momenta

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \sum \vec{M}_O$$

su: $\mathfrak{M}_{gx} = \sum M_x^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jx} = \sum M_{xi}$

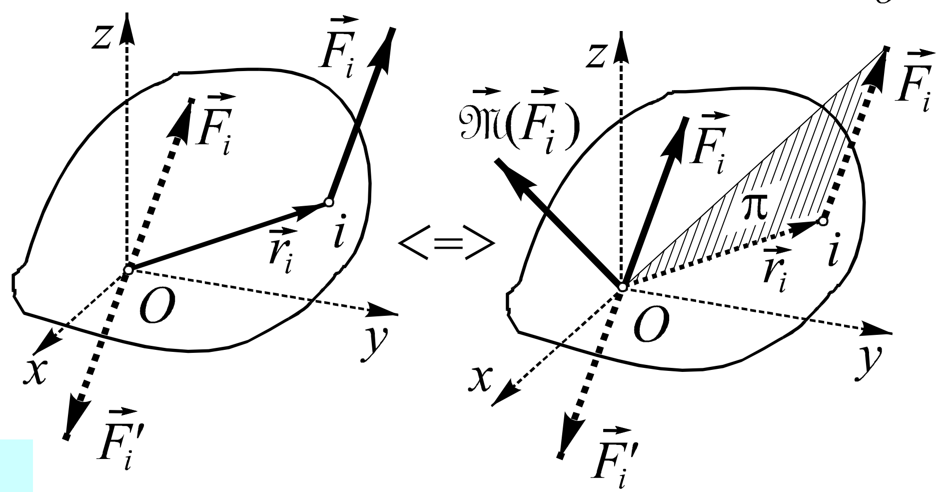
$$\mathfrak{M}_{gy} = \sum M_y^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jy} = \sum M_{yi}$$

$$\mathfrak{M}_{gz} = \sum M_z^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jz} = \sum M_{zi}$$



1) 2)

$\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) \perp \pi \qquad \vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) = \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$



3) 4)

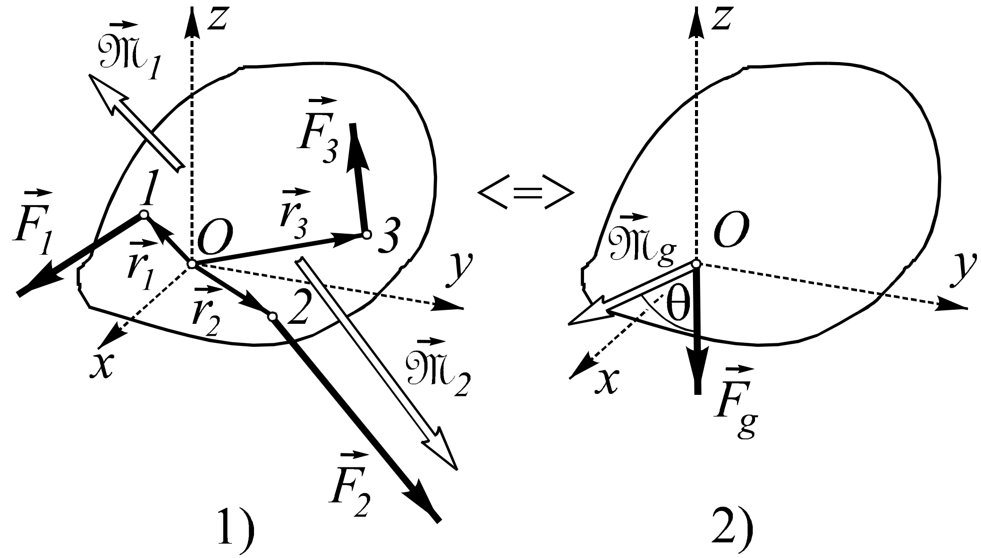
Primer 10.1

Za zadat proizvoljan prostorni sistem sila i spregova (Sl.1) sile su definisane vektorima:

$$\vec{F}_1 = 1\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{r}_1 = -1\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = \sqrt{2}\,\vec{i} + 4\vec{j} - 1\vec{k},\ \vec{r}_2 = 1\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -1\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{r}_3 = 3\vec{j} + 1\vec{k}$$



Projekcije sila su u kilonjutnima ([kN]) a koordinate napadnih tačaka sila u metrima ([m]).Vektori spregova koji pripadaju zadatom sistemu su:

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{k},\ \vec{\mathfrak{M}}_2 = -9\vec{i} - 1\vec{j} - 7\vec{k}$$

Projekcije spregova u kilonjutnmetrima ([kNm]).

Odrediti: glavni vektor, glavni moment tačku za koordinatnog početka *O* i ugao između glavnog vektora i glavnog momenta?

$$X_g = \sum X_i = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$Y_g = \sum Y_i = -2 + 4 - 1 = 1\ \text{kN}$$

$$Z_g = \sum Z_i = -2 - 1 + 2 = -1\ \text{kN}$$

$$\vec{F}_g = \sqrt{2}\,\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$F_g = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-1\right)^2} = 2\ \text{kN}$$

$$\mathfrak{M}_{gx} = \sum\left(y_i Z_i - z_i Y_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jx} = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 +$$

$$+ y_2 Z_2 - z_2 Y_2 + y_3 Z_3 - z_3 Y_3 + \mathfrak{M}_{1x} + \mathfrak{M}_{2x} =$$

$$= -1\cdot(-2) - 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) - 0\cdot 4 + 3\cdot 2 - 1\cdot(-1) + 2\sqrt{2} - 9 = 2\sqrt{2}\ \mathrm{kN}$$

$$\mathfrak{M}_{gy} = \sum\left(z_i X_i - x_i Z_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jy} = z_1 X_1 - x_1 Z_1 +$$

$$+ z_2 X_2 - x_2 Z_2 + z_3 X_3 - x_3 Z_3 + \mathfrak{M}_{1y} + \mathfrak{M}_{2y} =$$

$$= 1\cdot 1 - 0\cdot(-2) + 0\cdot\sqrt{2} - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) - 0\cdot 2 + 0 - 1 = 0$$

$$\mathfrak{M}_{gz} = \sum\left(x_i Y_i - y_i X_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jz} = x_1 Y_1 - y_1 X_1 +$$

$$+ x_2 Y_2 - y_2 X_2 + x_3 Y_3 - y_3 X_3 + \mathfrak{M}_{1z} + \mathfrak{M}_{2z} =$$

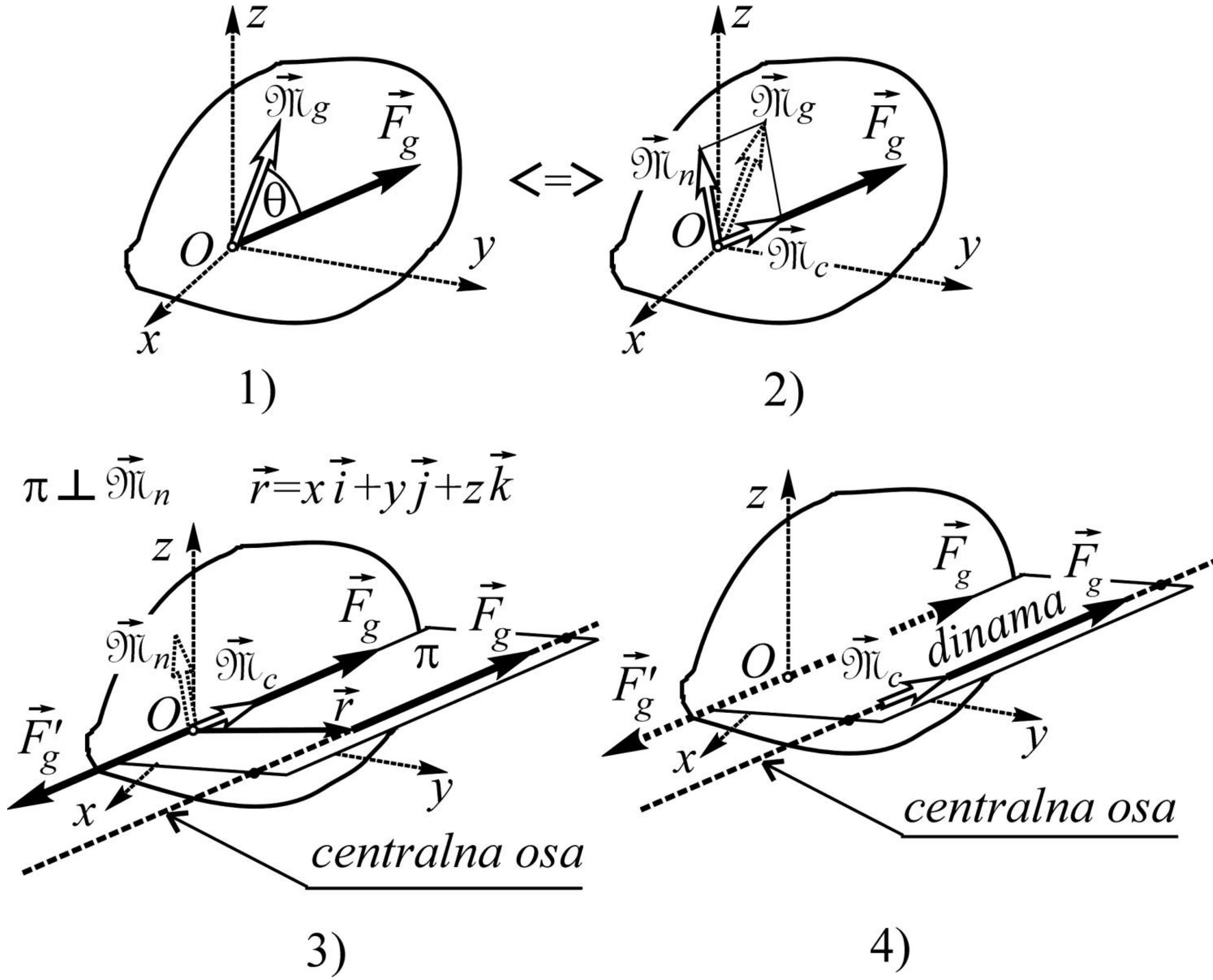
$$= 0\cdot(-2) - (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\sqrt{2} + 0\cdot(-1) - 3\cdot(-1) + 2\sqrt{2} - 7 = 1\,\mathrm{kN}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 1\vec{k} \qquad \mathfrak{M}_g = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = 3\,\mathrm{kNm}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 3\,(\mathrm{kN})^2\,\mathrm{m}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g}{\mathfrak{M}_g F_g} = \frac{3}{3\cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^0$$

50. Svođenje proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova (odnosno torzera) na dinamu. Centralna osa. U kojim slučajevima se proizvoljni prostorni sistem sila i spregova može svesti na rezultantu.



Proizvoljan prostorni sistem sila i spregova u opštem slučaju, kada je

$\vec{F}_g \neq \vec{0},\ \vec{\mathfrak{M}}_g \neq \vec{0},\ \theta \neq 0^0,\ \theta \neq 180^0,\ \theta \neq 90^0,$

može da bude sveden na dinamu, koju čine dva vektora čiji pravci su isti. Prava u prostoru na kojoj leži dinama nosi naziv centralna osa. Jedan od vektora koji čine dinamu je glavni vektor $\vec{F}_g$ čija napadna linija je centralna osa. Drugi vektor, koji će biti označavan sa $\vec{\mathfrak{M}}_C$, je spreg čiji naziv je "moment diname".

$$\mathfrak{M}_C = \vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \frac{\vec{F}_g}{F} = \frac{\mathfrak{M}_{gx} X_g + \mathfrak{M}_{gy} Y_g + \mathfrak{M}_{gz} Z_g}{F}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{\mathfrak{M}}_C + \vec{\mathfrak{M}}_n$$

Ovo je projekcija momenta diname na $\vec{F}_g$

Spreg $\vec{\mathfrak{M}}_n$ se zamenjuje spregom sila ($\vec{F}_g', \vec{F}_g$) koji leži u ravni π (Sl.3), upravnoj na vektor tog sprega.

Sila $\vec{F}_g$, koja pripada tom spregu sila, ima za napadnu liniju centralnu osu. Vektor položaja $\vec{r}$, ma koje tačke centralne ose, ima oblik $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ gde su *x*, *y* i *z*, osim što su projekcije vektora $\vec{r}$, i tekuće koordinate centralne ose.

Uklanjanjem sila $\vec{F}_g'$ i $\vec{F}_g$, koje dejstvuju u tački *O* i premeštanjem sprega $\vec{\mathfrak{M}}_C$ na centralnu osu dobija se dinama, prikazana na slici 4.

Spreg $\vec{\mathfrak{M}}_n$, izražen preko momenta sile za tačku ima oblik:

$$\vec{\mathfrak{M}}_n = \vec{r} \times \vec{F}_g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X_g & Y_g & Z_g \end{vmatrix} = \left(y Z_g - z Y_g\right)\vec{i} + \left(z X_g - x Z_g\right)\vec{j} + \left(x Y_g - y X_g\right)\vec{k}$$

Vektor momenta diname $\vec{\mathfrak{M}}_C$ ima oblik:

$$\vec{\mathfrak{M}}_C = \vec{\mathfrak{M}}_g - \vec{\mathfrak{M}}_n = \mathfrak{M}_{Cx}\,\vec{i} + \mathfrak{M}_{Cy}\,\vec{j} + \mathfrak{M}_{Cz}\vec{k}$$

gde su njegove projekcije određene izrazima

$$\mathfrak{M}_{Cx} = \mathfrak{M}_{gx} - \left(y Z_g - z Y_g\right)$$

$$\mathfrak{M}_{Cy} = \mathfrak{M}_{gy} - \left(z X_g - x Z_g\right)$$

$$\mathfrak{M}_{Cz} = \mathfrak{M}_{gz} - \left(x Y_g - y X_g\right)$$

Pošto su vektori diname $\vec{\mathfrak{M}}_C$ i $\vec{F}_g$ kolinearni važi vektorska jednakost

$$\vec{\mathfrak{M}}_C = p\,\vec{F}_g, \quad (*)$$

gde je p koeficijent proporcionalnosti koji se naziva parametrom diname.

Projektovanjem ove vektorske jednačine na osu koja je istog pravca i smera kao glavni vektor $\vec{F}_g$, dobija se skalarna jednačina $\mathfrak{M}_C = p\,F_g$ na osnovu koje se dobija sledeća formula koja određuje parametar diname:

$$p = \frac{\mathfrak{M}_C}{F_g} = \frac{\mathfrak{M}_{gx} X_g + \mathfrak{M}_{gy} Y_g + \mathfrak{M}_{gz} Z_g}{F_g^2}$$

Znajući parametar diname, jednačine koje određuju centralnu osu (što je prava u prostoru) dobijaju se projektovanjem vektorske jednačine (*) na koordinatne ose. Te projekcije, odnosno jednačine centralne ose imaju oblik:

$$\mathfrak{M}_{gx} - \left(y Z_g - z Y_g\right) = p\, X_g$$

$$\mathfrak{M}_{gy} - \left(z X_g - x Z_g\right) = p\, Y_g$$

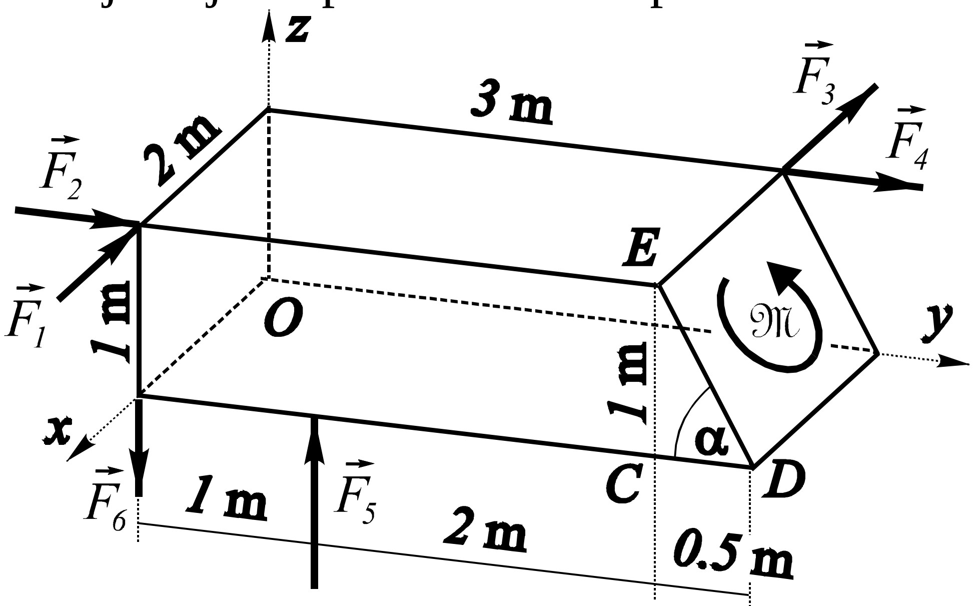
$$\mathfrak{M}_{gz} - \left(x Y_g - y X_g\right) = p\, Z_g$$

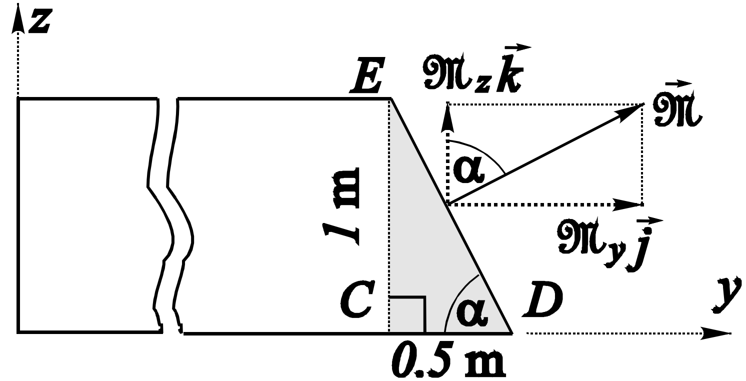
Svaka od dobijenih jednačina, posmatrana zasebno, predstavlja jednačinu ravni, koja sadrži centralnu osu a upravna je na jednu od koordinatnih ravni.

Prva od tih jednačina predstavlja ravan upravnu na *zOy* ravan, druga na *zOx* a treća na *xOy*. Presek svih triju ravni je prava u prostoru koja predstavlja centralnu osu.

S obzirom da su samo dve ravni, koje se seku, dovoljne da odrede pravu u prostoru, jasno je da centralnu osu mogu da odrede bilo koje dve od ovih jednačina. U cilju skiciranja centralne ose najpogodnije je da se, u skladu sa jednačinama, odrede koordinate dveju njenih tačaka (obično se bira da su to tačke prodora centralne ose kroz dve od tri koordinatne ravni). S obzirom da dve tačke određuju pravu, skiciranjem tih tačaka, centralna osa je određena.

Primer 10.2 Svesti na dinamu proizvoljan prostorni sistem sila i spregova koji dejstvuje na prikazanu laku prizmu.





$$\tan\alpha = 2 \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\mathfrak{M}_x = 0 \qquad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}\sin\alpha = 3 \text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}\cos\alpha = \frac{3}{2} \text{ kNm}$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_6 = 1 \text{ kN}$$

$$F_5 = 2 \text{ kN} \qquad \mathfrak{M} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ kNm}$$

$$X_g = \sum X_i = -1-1 = -2 \text{ kN}$$

$$Y_g = \sum Y_i = 1+1 = 2 \text{ kN}$$

$$Z_g = \sum Z_i = 2-1 = 1 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$F_g = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \text{ kN}$$

$$\mathfrak{M}_{gx} = -F_2 \cdot 1 - F_4 \cdot 1 + F_5 \cdot 2 = 0$$

$$\mathfrak{M}_{gy} = -F_1 \cdot 1 - F_3 \cdot 1 - F_5 \cdot 2 + F_6 \cdot 2 + \mathfrak{M}_y = -1 \text{ kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{gz} = F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 3 + \mathfrak{M}_z = 6.5 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathfrak{M}}_g = -1\vec{j} + 6.5\vec{k}$$

$$\mathfrak{M}_C = \frac{\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g}{F_g} = \frac{-2+6.5}{3} = 1.5\ \text{kNm}$$

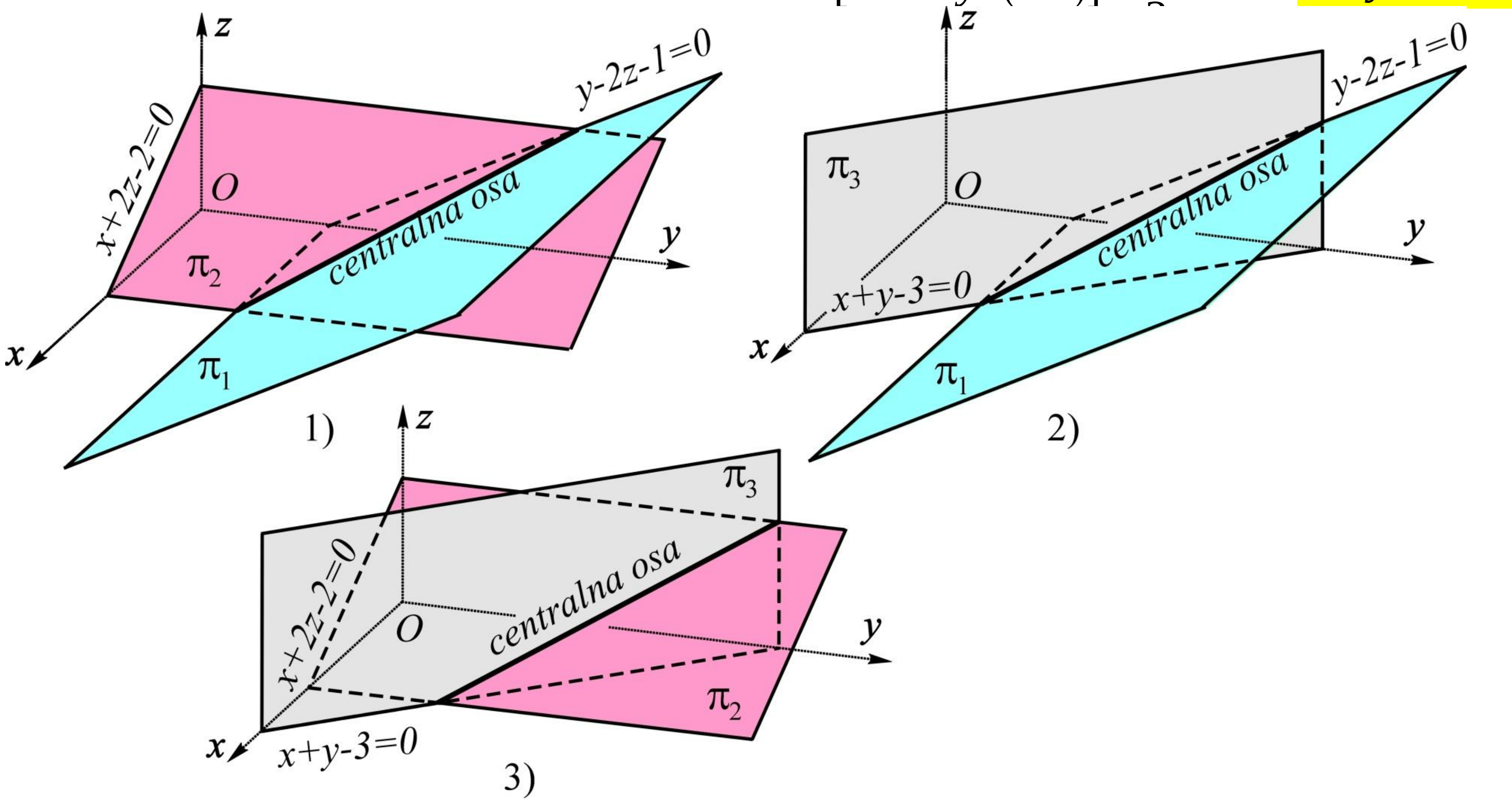
$$p = \frac{\mathrm{M}_C}{F_g} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}\ \text{m}$$

Jednačine centralne ose su:

$$0-(y\cdot 1 - z\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot(-2) \Rightarrow \quad y-2z-1=0$$

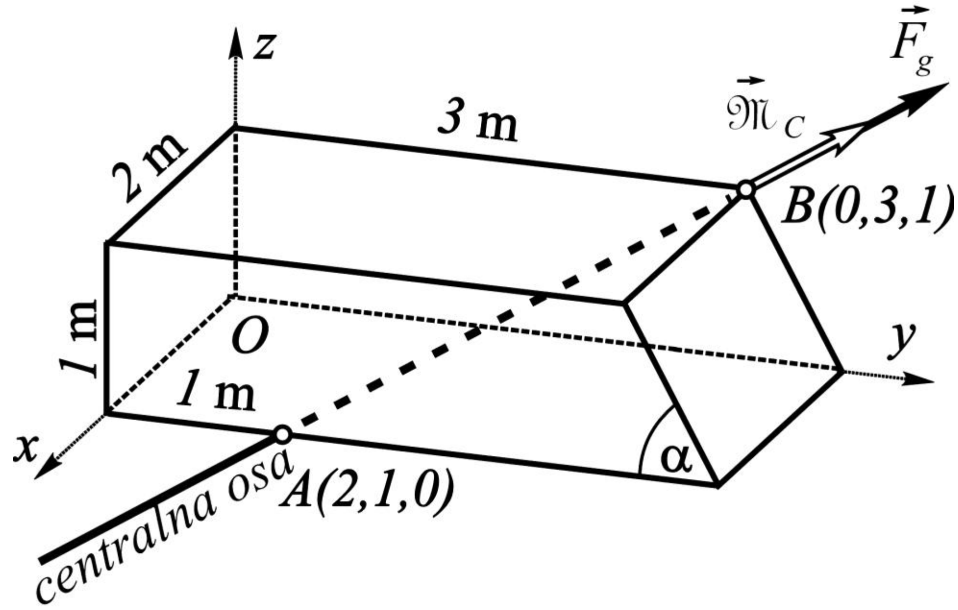
$$-1-[z\cdot(-2) - x\cdot 1] = \frac{1}{2}\cdot 2 \Rightarrow \quad x+2z-2=0$$

$$6.5-[x\cdot 2 - y\cdot(-2)] = \frac{1}{2}\cdot 1 \Rightarrow \quad x+y-3=0$$



Odredimo sada sve koordinate tačke *A*, u kojoj centralna osa prodire *xOy* ravan.

$F_g = 3$ kN $\quad \mathfrak{M}_C = \frac{3}{2}$ kNm



Pošto tačka *A* pripada *xOy* ravni njena *z* koordinata jednaka je nuli, dakle, $z_A = 0$.

Za $z_A = 0$, iz $y - 2z - 1 = 0$

$\Rightarrow y_A = 1\,\text{m}$

Za $z_A = 0$, iz $x + 2z - 2 = 0$

$\Rightarrow x_A = 2\,\text{m}$

A(2,1,0)

Pošto tačka *B* pripada *zOy* ravni njena *x* koordinata jednaka je nuli, dakle, $x_B = 0$.

Za $x_B = 0$, iz $x + 2z - 2 = 0$

$\Rightarrow z_B = 1\,\text{m}$

Za $x_B = 0$, iz $x + y - 3 = 0$

$\Rightarrow y_B = 3\,\text{m}$

B(0,3,1)