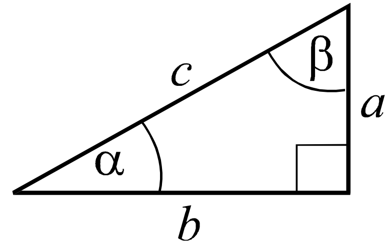
**Onlajn učenje MEHANIKA br. 1**
(ranijih godina, po starom nastavnom programu, ovaj materijal je nosio naziv Statika 1

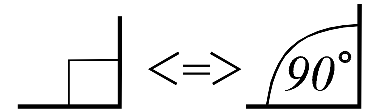
## PRAVOUGLI TROUGAO

*c* - hipotenuza

*a* i *b* - katete




$\alpha + \beta = 90^0$




Pitagorina teorema

$a^2 + b^2 = c^2$

Za ugao α: *b* je nalegla kateta, *a* je naspramna kateta.
Za ugao β: *a* je nalegla kateta, *b* je naspramna kateta.

$$\sin\alpha = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}} = \frac{a}{b}$$

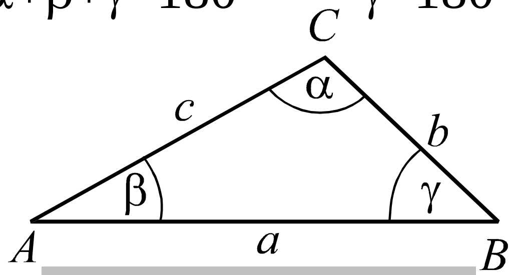
$$\cot\alpha = \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{naspramna kateta}} = \frac{b}{a}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

# NEJEDNAKOSTRANIČNI TROUGAO

$\alpha+\beta+\gamma=180^0$ $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$




## Sinusna teorema

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Tri jednačine, ali su dve nezavisne

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},\quad \frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

## Kosinusna teorema

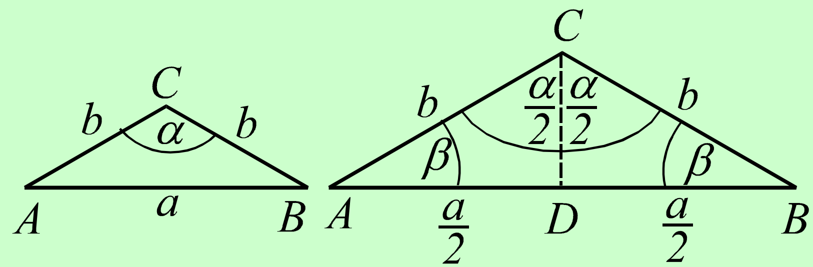
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \text{itd.}$$

# JEDNAKOKRAKI TROUGAO



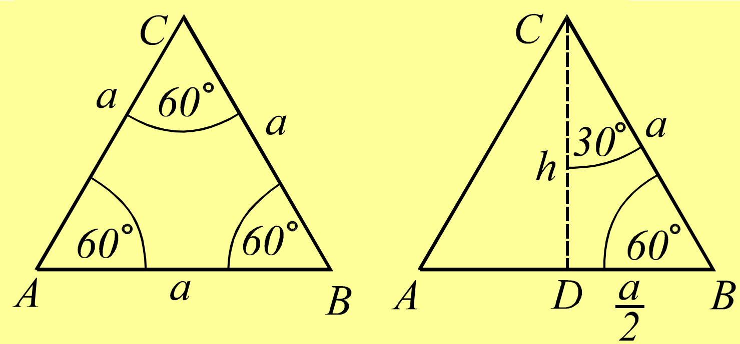

$$\overline{CD}=b\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{a}{2}=b\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{a}{2}=b\cos\beta$$

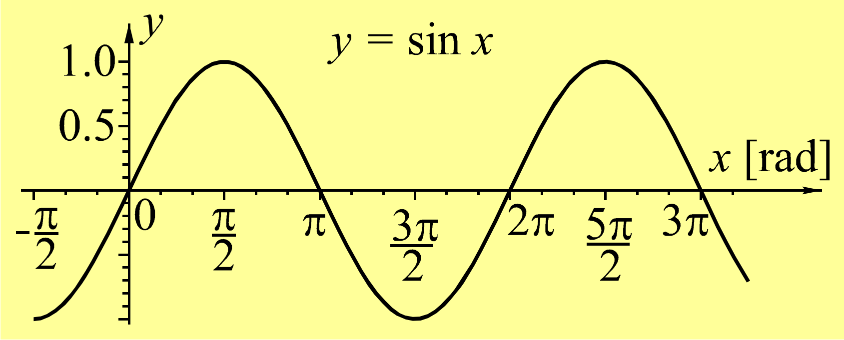
$$\overline{CD}=b\sin\beta$$

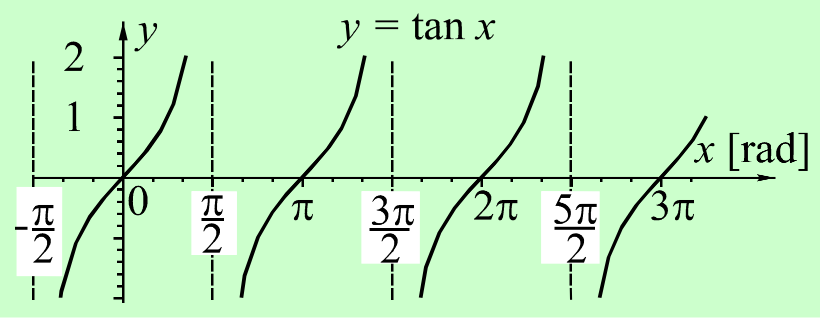
# JEDNAKOSTRANIČNI TROUGAO

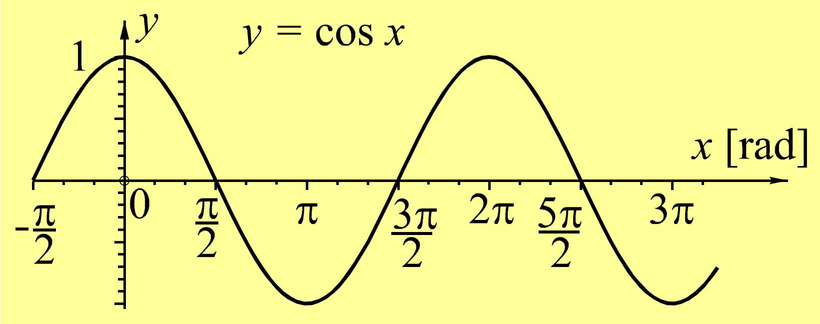


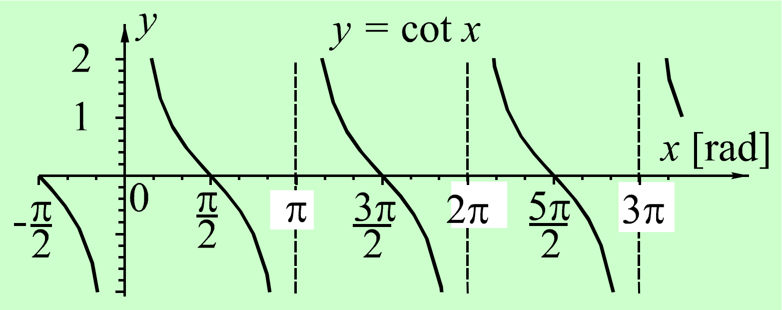

$$h=a\sin 60^0=a\cos 30^0=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

# GRAFICI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA




$\sin x = \sin(2\pi + x)$ i $\cos x = \cos(2\pi + x)$.

Periodične funkcije perioda $2\pi$

$\tan x = \tan(\pi + x)$ i $\cot x = \cot(\pi + x)$

Periodične funkcije perioda $\pi$

**ADICIONE FORMULE**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

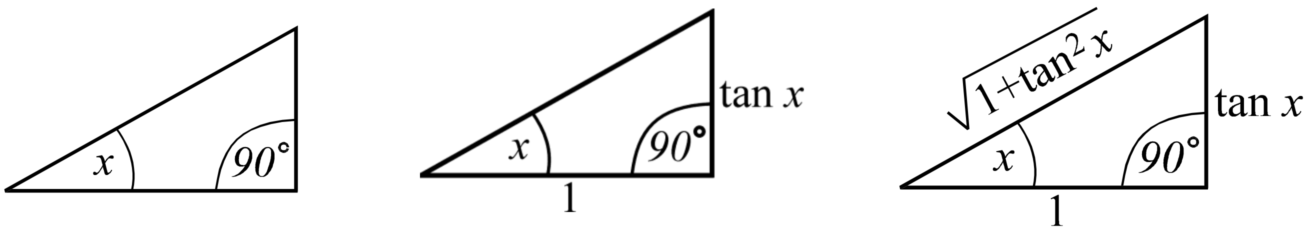
**Specijalan slučaj** za $\beta=\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

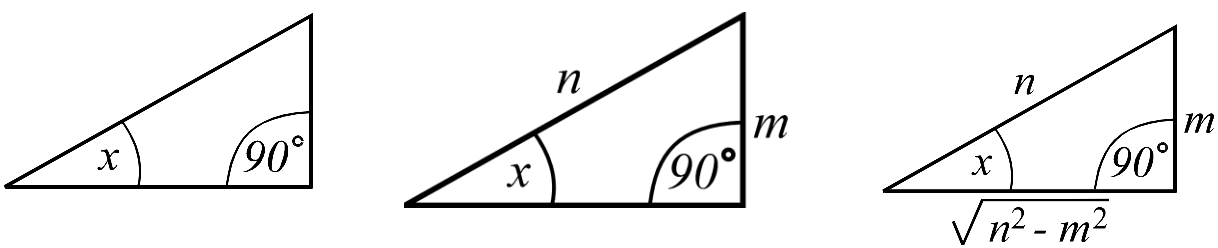
## VEZE IZMEĐU TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

**Primer 2.2**. tan $x$ je poznat, u zavisnosti od tan $x$, odrediti sin $x$, cos $x$ i cot $x$?




$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}.$$

**Primer 2.3** Neka je sin$x$ = $m/n$, koliki su tan $x$, cos $x$ i cot $x$, u zavisnosti od $m$ i $n$?



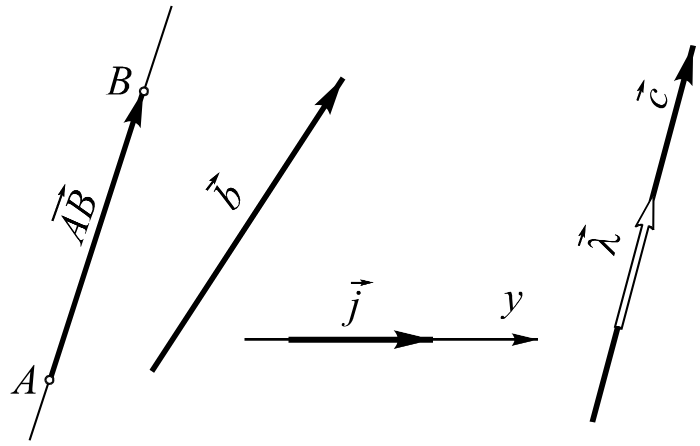

$$\tan x = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$$

# VEKTORI I SKALARI

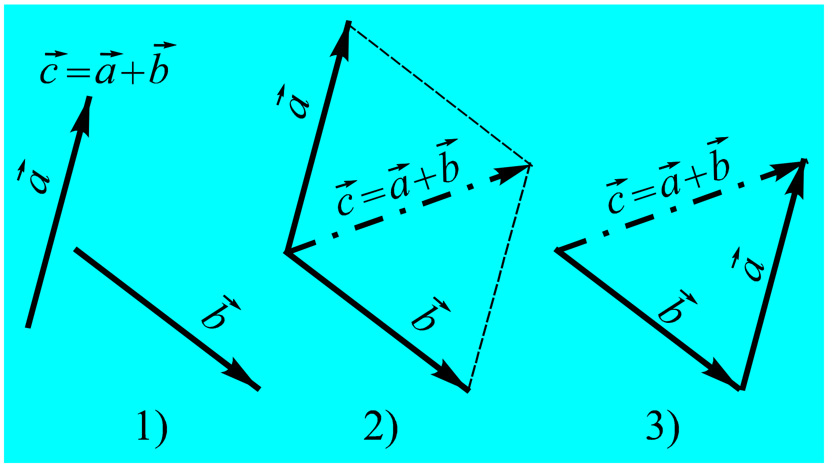
$\vec{j}$, $\vec{\lambda}$ - jedinični vektori ( $|\vec{j}| = |\vec{\lambda}| = 1$ )

$|\vec{b}| = b$ , $|\vec{c}| = c$, $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ - intenziteti vektora

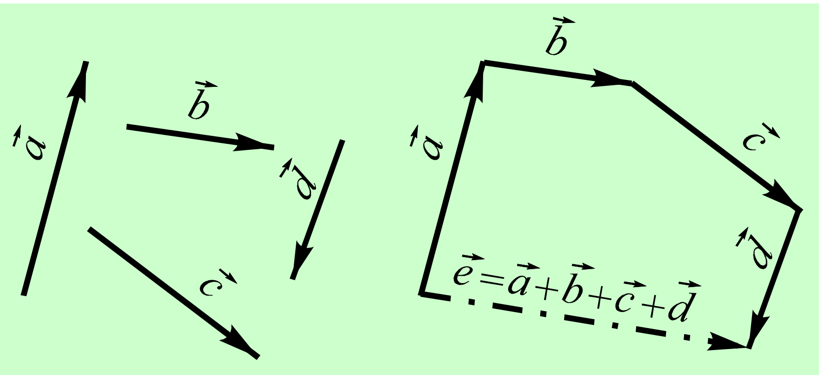
$$\vec{c} = c\vec{\lambda}$$




## GRAFIČKI PRIKAZ SABIRANJA VEKTORA

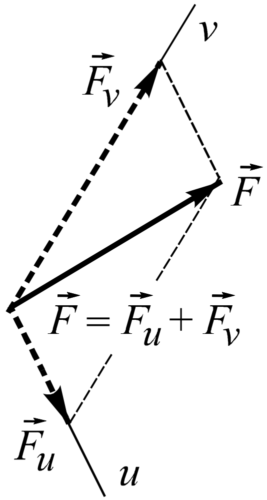



*Grafičko sabiranje dva vektora*

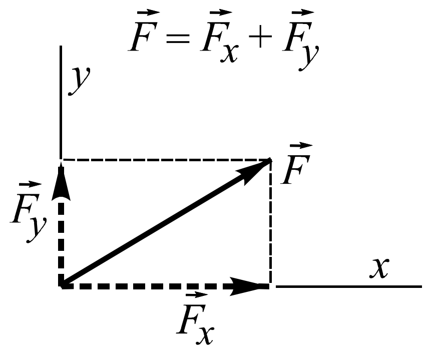



*Grafičko sabiranje više vektora*

# RAZLAGANJE VEKTORA NA DVE KOMPONENTE




1)

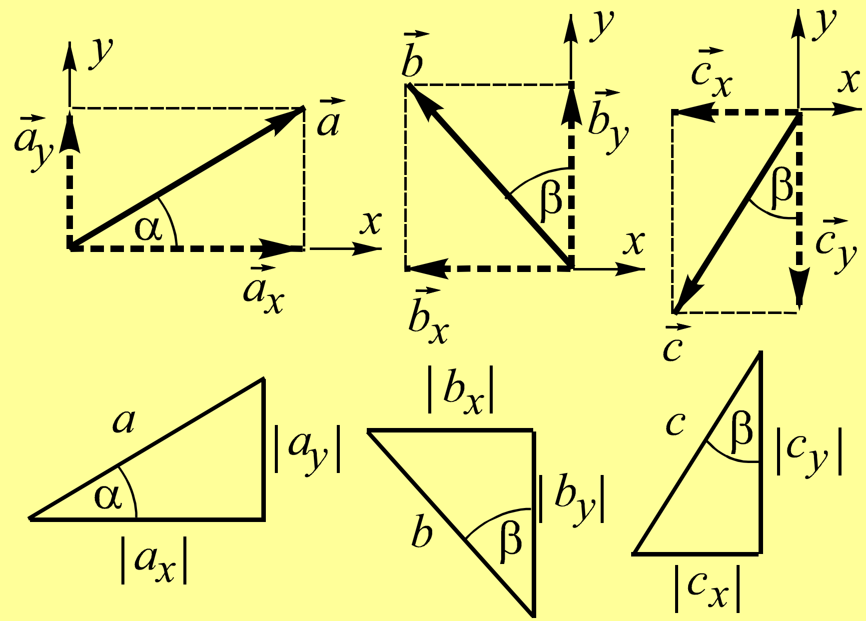



2)

$\vec{F}_x$ , $\vec{F}_y$ - Komponente vektora $\vec{F}$
u $x$ i $y$ pravcu

Vektor se razlaže preko pravila paralelograma

# PROJEKCIJA VEKTORA NA OSU

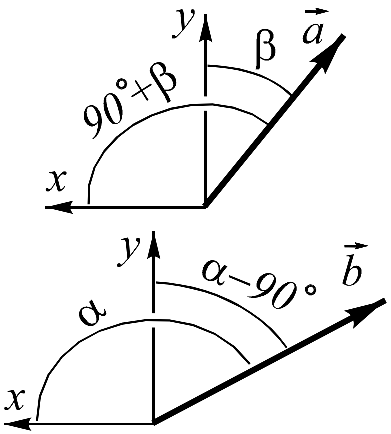


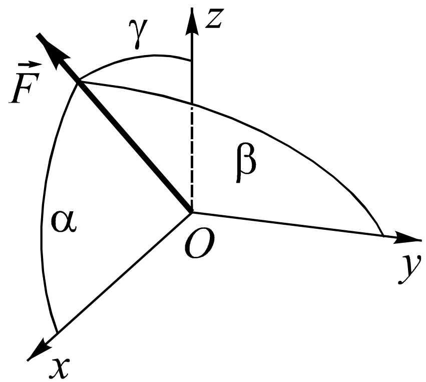

$$a_x = +|a_x| = a\cos\alpha,\ \ a_y = +|a_y| = a\sin\alpha$$

$$b_x = -|b_x| = -b\sin\beta,\ \ b_y = +|b_y| = b\cos\beta$$

$$c_x = -|c_x| = -c\sin\beta,\ \ c_y = -|c_y| = -c\cos\beta$$

Projekcija vektora na osu je SKALAR




$$a_x = a\cos\left(90^0+\beta\right),\quad a_y = a\cos\beta$$

$$b_x = b\cos\alpha,\quad b_y = b\cos\left(\alpha-90^0\right)$$

$$F_x = F\cos\alpha,\quad F_y = F\cos\beta,\quad F_z = F\cos\gamma$$

**VEKTORI IZRAŽENI PREKO ORTOGONALNIH JEDINIČNIH VEKTORA**

*Projekcija vektora na osu za zadat ugao između vektora i pozitivnog dela ose*

$$\vec{a}+\vec{b} = \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)+\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=\left(a_x+b_x\right)\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\vec{j}+\left(a_z+b_z\right)\vec{k},$$

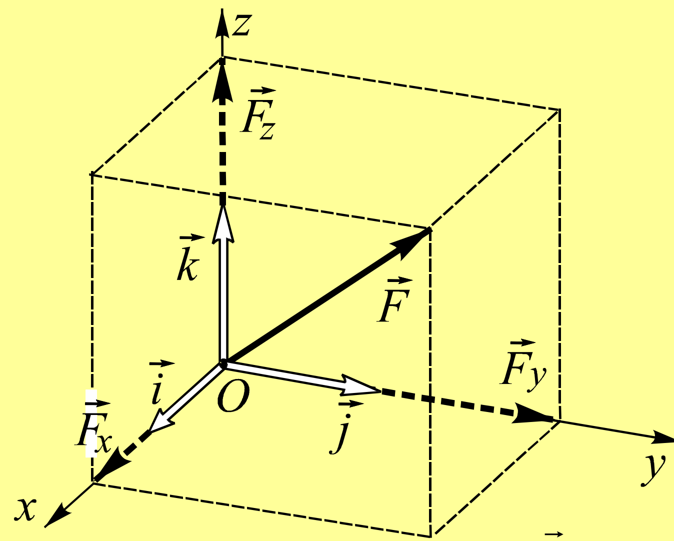
$$\vec{a}_R = \sum\vec{a}_i = \sum\left(a_{ix}\vec{i}+a_{iy}\vec{j}+a_{iz}\vec{k}\right)=$$

$$=\left(\sum a_{ix}\right)\vec{i}+\left(\sum a_{iy}\right)\vec{j}+\left(\sum a_{iz}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow a_{Rx} = \sum a_{ix},\ a_{Ry} = \sum a_{iy},\ a_{Rz} = \sum a_{iz},$$

$$\vec{a}-\vec{b} = \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)-\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=\left(a_x-b_x\right)\vec{i}+\left(a_y-b_y\right)\vec{j}+\left(a_z-b_z\right)\vec{k}.$$




$$\vec{F} = \vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z$$

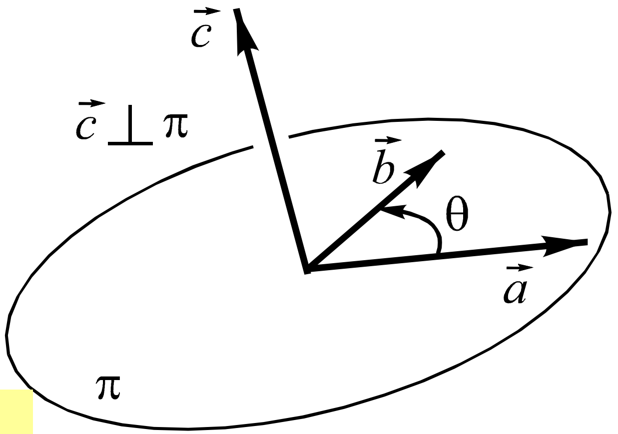
$$\vec{F} = F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\vec{F}_x = F_x\vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F_y\vec{j}$$

$$\vec{F}_z = F_z\vec{k}$$

# SKALARNI I VEKTORSKI PROIZVOD




$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$ skalarni proizvod

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
$c = ab\sin\theta$

vektorski proizvod

Ravan $\pi$ obrazuju vektori koji se vektorski množe

Vektor $\vec{c}$ je upravan na ravan $\pi$, a smer mu je određen pravilom desne ruke

**Primeri**

ovde je
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + \ldots =$$
$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\vec{j} +$$
$$\left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + \ldots = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \left|\vec{i} \times \vec{i}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0^0 = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \left|\vec{i} \times \vec{k}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^0 = 1$$

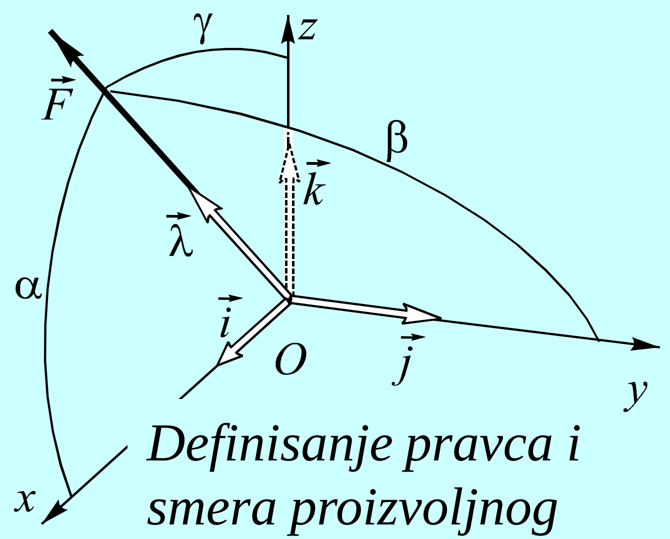
$$2\vec{k} \times 3\vec{i} = 6\vec{j} \qquad \left|2\vec{k} \times 3\vec{i}\right| = 2 \cdot 3 \cdot \sin 90^0 = 6$$

## Jednostavnije određivanje vektorskog proizvoda $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\vec{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$




*Definisanje pravca i smera proizvoljnog vektora u prostoru*

$$\vec{\lambda}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda}=\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}\right)\quad\Rightarrow$$

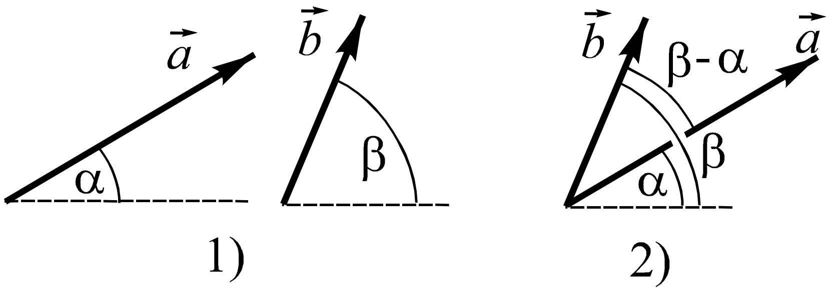
$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

$$\vec{F}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}+Z\,\vec{k}$$

$$F^2=X^2+Y^2+Z^2\quad\Rightarrow\qquad F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

**Primer 2.7** Da li je projekcija ma kog vektora na neku osu jednaka skalarnom proizvodu tog vektora i jediničnog vektora te ose?

**Primer 2.8**




Ako su poznati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ preko svojih intenziteta i uglova α i β, primenom skalarnog proizvoda odrediti intenzitet vektora $\vec{c}$ koji predstavlja zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow c^2=a^2+b^2+2ab\cos(\beta-\alpha)$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\beta-\alpha)}$$

**Primer 2.9**

Dokazati da se vektorskim množenjem paralelnih vektora dobija nula vektor?

**Primer 2.10**

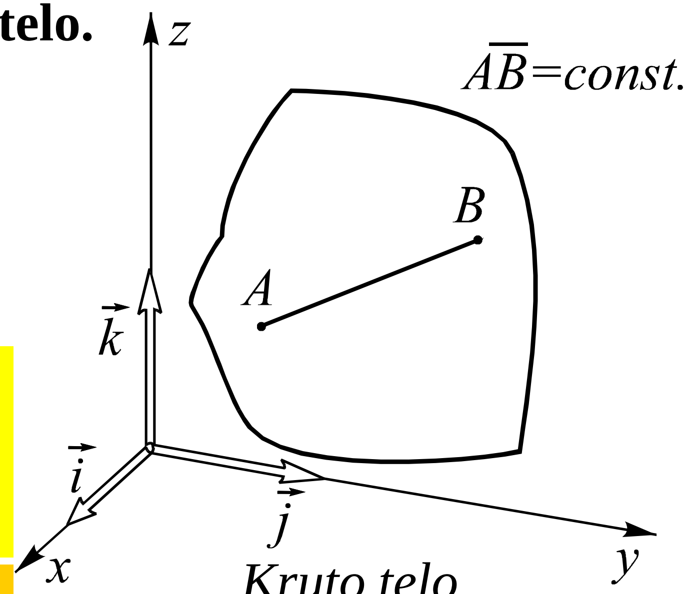
Dokazati da je mešoviti proizvod $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ jednak nuli ako je vektor $\vec{c}$ istog pravca kao vektor $\vec{a}$ ili vektor $\vec{b}$ ?

## 1. Objekti posmatranja u mehanici. Kruto telo. Tačka

Pod materijalnim telom se podrazumeva deo prostora koji je neprekidno ispunjen materijom u čvrstom agregatnom stanju.

Telo sa dve dimenzije zanemarljive je štap. Ploča je telo sa jednom dimenzijom zanemarljivom.

Tačka u mehanici, obično je materijalna tačka, koja predstavlja telo nezanemarljive mase a zanemarljivih dimenzija i oblika.



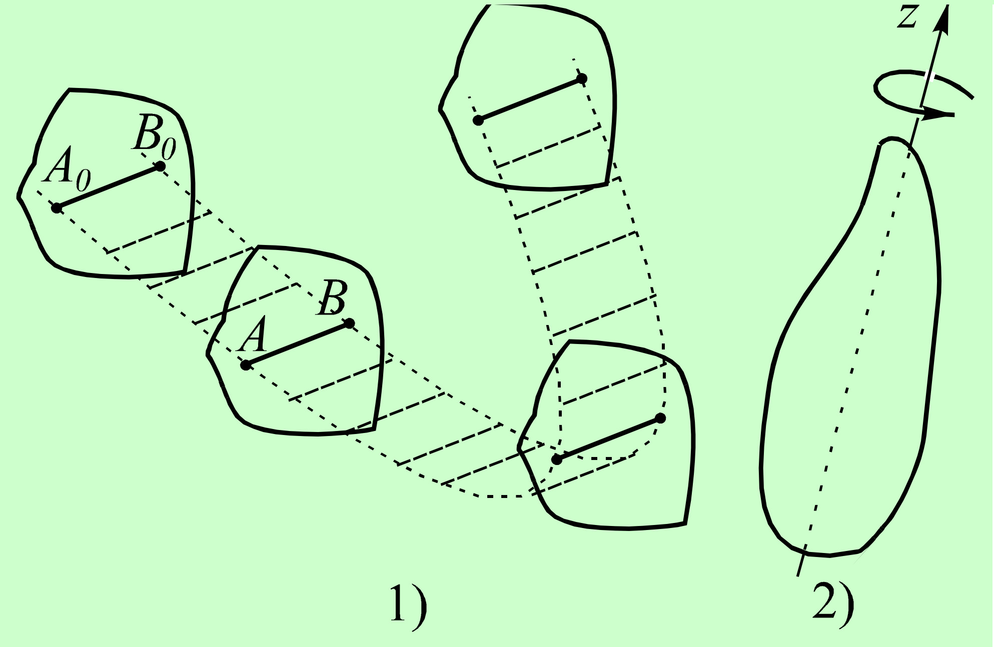

*Kruto telo*

Za kruto telo je $\overline{AB} = const.$
Za deformabilno je $\overline{AB} \neq const.$

Prema jednoj veoma važnoj klasifikaciji tela u mehanici, tela su slobodna ili neslobodna (vezana). Telo koje nema fizički kontakt sa drugim telima je slobodno, i njemu ništa ne sužava mogućnosti za kretanjem. Nasuprot ovome, štap koji je naslonjen na zid a ima kontakt i sa podom je neslobodan. Pod i zid su za štap veze koje sužavaju mogućnosti njegovog kretanja.

U mehanici se proučavaju tela (najčešće materijalna), tačke i sistemi koji mogu da sadrže i tela i tačke.

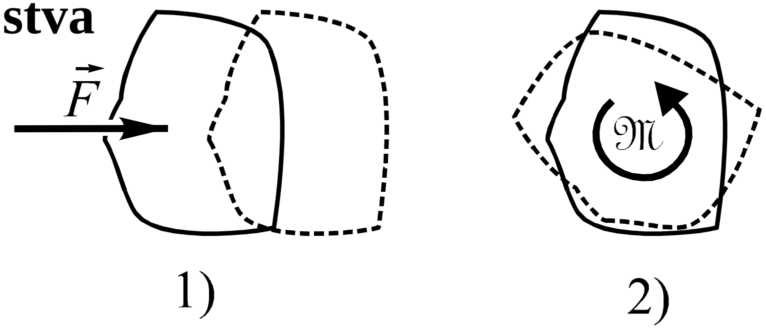
## 2. Osnovna kretanja tela u trodimenzijskom prostoru. Translacija. Rotacija.




1) *Translatorno kretanje (translacija)*

2) *Obrtanje oko ose (rotacija)*

## 3. Sila i spreg kao mere mehaničkog dejstva

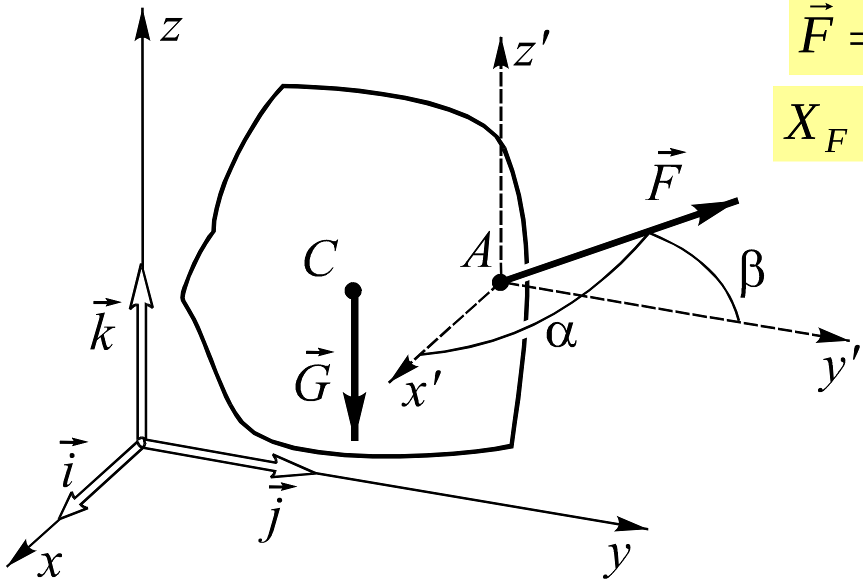



1) *Sila* 2) *Spreg*

Dva tela mogu da dejstvuju jedno na drugo bilo da su u direktnom kontaktu ili bez njega. Mere mehaničkog dejstva su sila, koja izaziva translatorno kretanje, i spreg, koji izaziva obrtanje

**Sila** je vektor koji je određen sa četiri podatka i to: pravac, smer, intenzitet i napadna tačka.

Napadna linija sile je prava na kojoj leži vektor sile i koja očigledno sadrži napadnu tačku te sile.




$$\vec{F} = X_F\vec{i} + Y_F\vec{j} + Z_F\vec{k}$$

$$X_F = F\cos\alpha, \quad Y_F = F\cos\beta, \quad Z_F = F\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

$$\vec{G} = X_G\vec{i} + Y_G\vec{j} + Z_G\vec{k}$$

$$X_G = 0, \quad Y_G = 0, \quad Z_G = -G$$

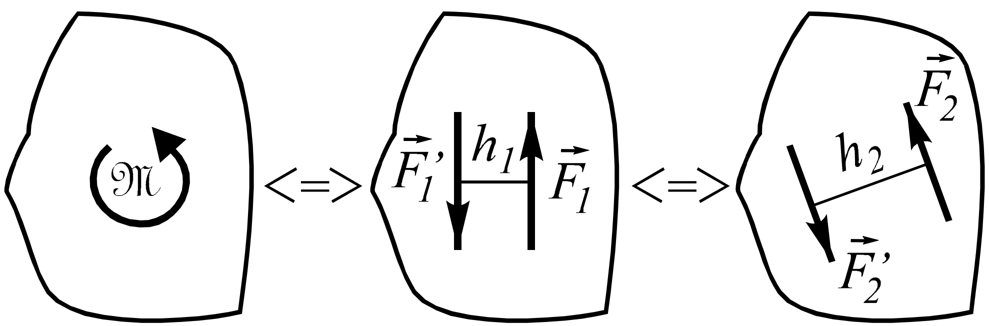
Silu, čije se dejstvo na telo prenosi u jednoj tački nazivamo koncentrisanom silom. Za mehaničko dejstvo koje se na telo prenosi u neprekidnom nizu tačaka koristi se naziv neprekidno raspoređene sile (kontinualno opterećenje).

Prema jednoj klasifikaciji sila i spregova u mehanici, mehanička dejstva (sile i spregovi) mogu biti aktivna i pasivna, a prema drugoj spoljašnja i unutrašnja.

Aktivna dejstva mogu da izazovu kretanje dok pasivna to ne mogu. Reakcije veza spadaju u pasivna dejstva i one upravo sprečevaju neka kretanja telu. Spoljašnja sila koja dejstvuje na telo potiče izvan tog tela. Dejstva jednog dela tela na drugi njegov deo nose naziv unutrašnja dejstva.

**Spreg** je određen svojom vrednošću $\mathfrak{M}$ (moment sprega), ravni dejstva i smerom. Ravan dejstva sprega je ravan u kojoj leži spreg i oznaka ↻ ili ↺

Strelica na oznaci određuje smer dejstva sprega, odnosno, smer u kome taj spreg teži da okrene telo na koje dejstvuje.




1) 2) 3)

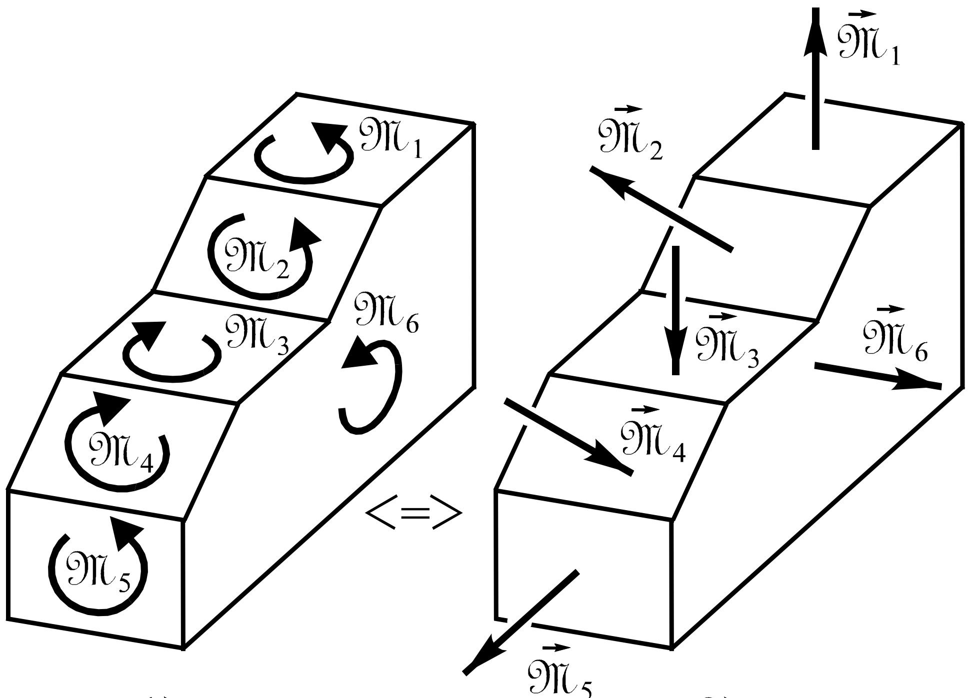
Ekvivalentan spregu je **spreg sila**, sačinjen od dve sile istog intenziteta i pravca a suprotnog smera.

$$\mathfrak{M} = F_1h_1 = F_2h_2$$

Najkraće rastojanje napadnih linija tih sila nosi naziv krak sprega sila. Pri zameni sprega spregom sila, pravac sila može biti proizvoljno izabran, njihov intenzitet takođe ali proizvod odabrane sile i kraka sprega sila mora biti isti kao moment sprega $\mathfrak{M}$.

**PREDSTAVLJANJE SPREGA KAO VEKTORA**

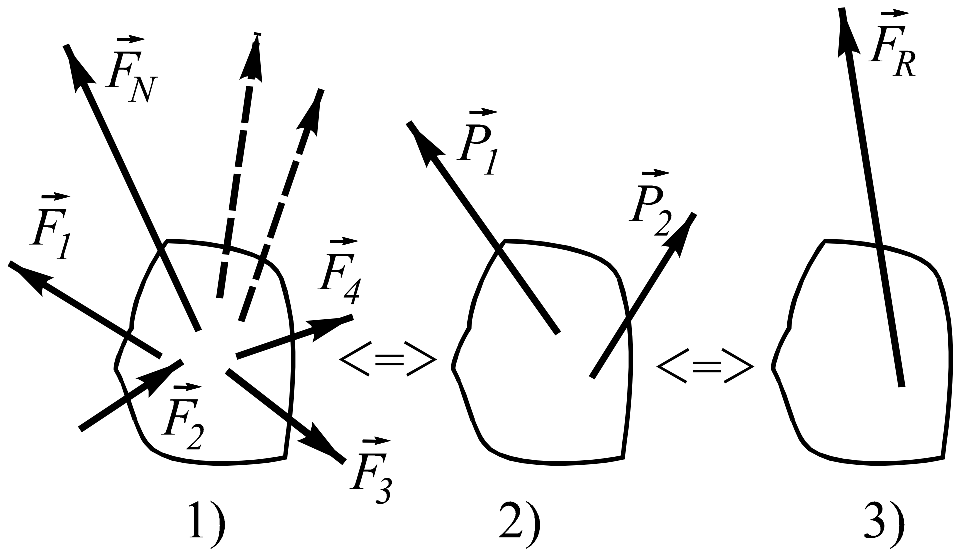
Pravac vektora sprega je upravan na njegovu ravan dejstva. Smer se može odrediti i pomoću pravila desne ruke prema kojem će palac odrediti smer vektora sprega ako se prsti desne ruke postave u smeru njegovog dejstva.




1) 2)

Intenzitet vektora nekog sprega, jednak je momentu tog sprega

# 4. Ekvivalentni sistemi sila i rezultanta




1) Zadat (originalni) sistem sila

2) Ekvivalentni sistem sila zadatom

3) Rezultanta

Ako je stanje tela (misli se na ravnotežu ili kretanje) na koje dejstvuje neki zadat sistem sila potpuno isto sa njegovim stanjem kada na njega dejstvuje drugi, jednostavniji sistem sila, onda se taj drugi sistem naziva jednostavnijim ekvivalentnim dejstvom zadatom sistemu. Ako je najjednostavnije ekvivalentno dejstvo nekom sistemu sila samo jedna onda se ta sila naziva rezultantom zadatom sistemu sila.