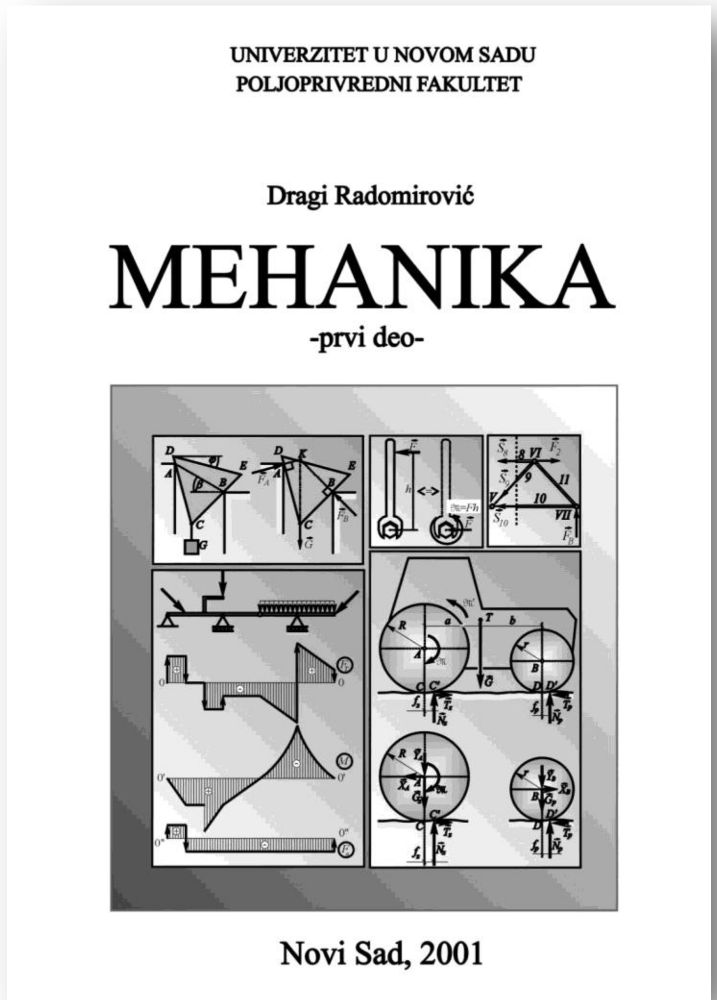
Mehanika
Predavanja 8

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.

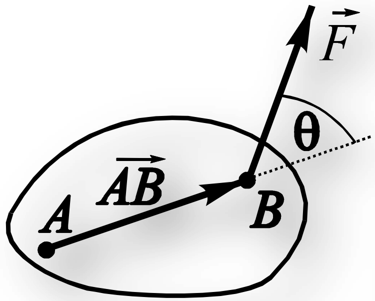
Literatura


UNIVERZITET U NOVOM SADU
POLJOPRIVREDNI FAKULTET
Dragi Radomirović
MEHANIKA
-prvi deo-
Novi Sad, 2001

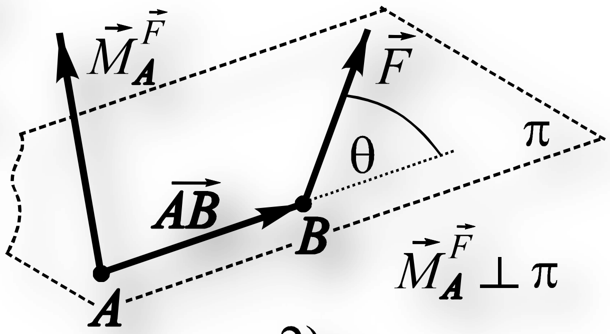
Šta ćemo naučiti?

45. **Vektor momenta sile za tačku.**
46. **Prostorni sistem spregova, vektor rezultujućeg sprega i uslovi ravnoteže.**
47. **Izražavanje sprega preko momenta sile za tačku (vektori).**
48. **Moment sile za osu.**
49. **Moment sprega za osu (prostorni problemi).**
50. **Redukcija proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na tačku koordinatnog početka. Glavni vektor i glavni moment.**
51. **Projekcije glavnog vektora i glavnog momenta proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na koordinatne ose.**
52. **Svođenje proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova (odnosno torzera) na dinamu. Centralna osa. U kojim slučajevima se proizvoljni prostorni sistem sila i spregova može svesti na rezultantu.**
53. **Reakcije sfernog i cilindričnog zgloba.**
54. **Ravnoteža proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova.**
55. **Varinjonova teorema za prostorni sistem.**

45. Vektor momenta sile za tačku



1)



2)

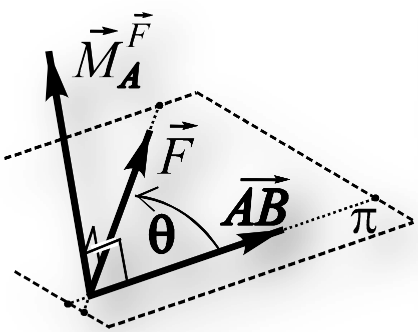
Vektor momenta sile, koja dejstvuje na neku tačku tela, za proizvoljno izabranu tačku predstavlja meru obrtnog dejstva sile u odnosu na tu proizvoljno izabranu tačku.

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

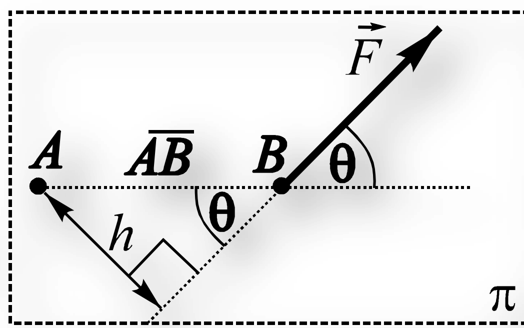
Ovde je tačka *A* momentna tačka a tačka *B* napadna tačka sile

Intenzitet vektora momenta sile za tačku iznosi:

$$\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot \overline{AB} \cdot \sin\theta = F \cdot h$$



1)



$$\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot \overline{AB} \cdot \sin\theta = F \cdot h$$

2)

Rastojanje *h*, koje leži u ravni π koju obrazuju napadna linija sile i momentna tačka, predstavlja najkraće rastojanje između napadne linije sile i momentne tačke, i naziva se krakom sile $\vec{F}$ za tačku *A*.

46. Prostorni sistem spregova, vektor rezultujućeg sprega i uslovi ravnoteže

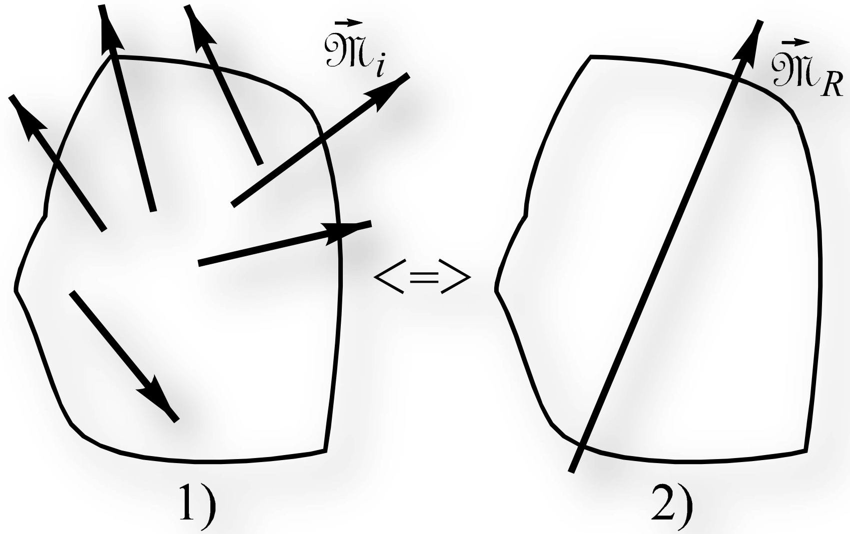
Sistem spregova može biti zamenjen jednostavnijim ekvivalentnim dejstvom koje čini rezultujući spreg.

$$\vec{\mathfrak{M}}_R = \vec{\mathfrak{M}}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_2 + \ldots \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathfrak{M}}_R = \sum \vec{\mathfrak{M}}_i$$

$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix}$$

$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy}$$

$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz}$$



Proizvoljni sistem spregova i rezultujući spreg

$$\vec{\mathfrak{M}}_i = \mathfrak{M}_{ix}\vec{i} + \mathfrak{M}_{iy}\vec{j} + \mathfrak{M}_{iz}\vec{k}$$ -vektor i-tog sprega

$$\vec{\mathfrak{M}}_R = \mathfrak{M}_{Rx}\vec{i} + \mathfrak{M}_{Ry}\vec{j} + \mathfrak{M}_{Rz}\vec{k}$$ -vektor rezultujućeg sprega

Telo na koje dejstvuje proizvoljan sistem spregova biće u ravnoteži ako je vektor rezultujućeg sprega jednak nula vektoru, tj. ako su njegove projekcije na sve tri koordinatne ose jednake nuli. To znači da analitički uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema spregova glase:

$$\sum \mathfrak{M}_{ix} = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{iy} = 0, \quad \sum \mathfrak{M}_{iz} = 0$$

Primer 5.3

Odrediti vektor rezultujućeg sprega koji zamenjuje sledeći sistem zadatih spregova: $\vec{\mathfrak{M}}_1 = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 1\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_3 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{\mathfrak{M}}_4 = 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix} = 2 - 2 + 3 + 0 = 3$$

$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy} = -1 + 3 - 2 + 2 = 2$$

$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz} = 3 + 1 - 2 - 2 = 0$$

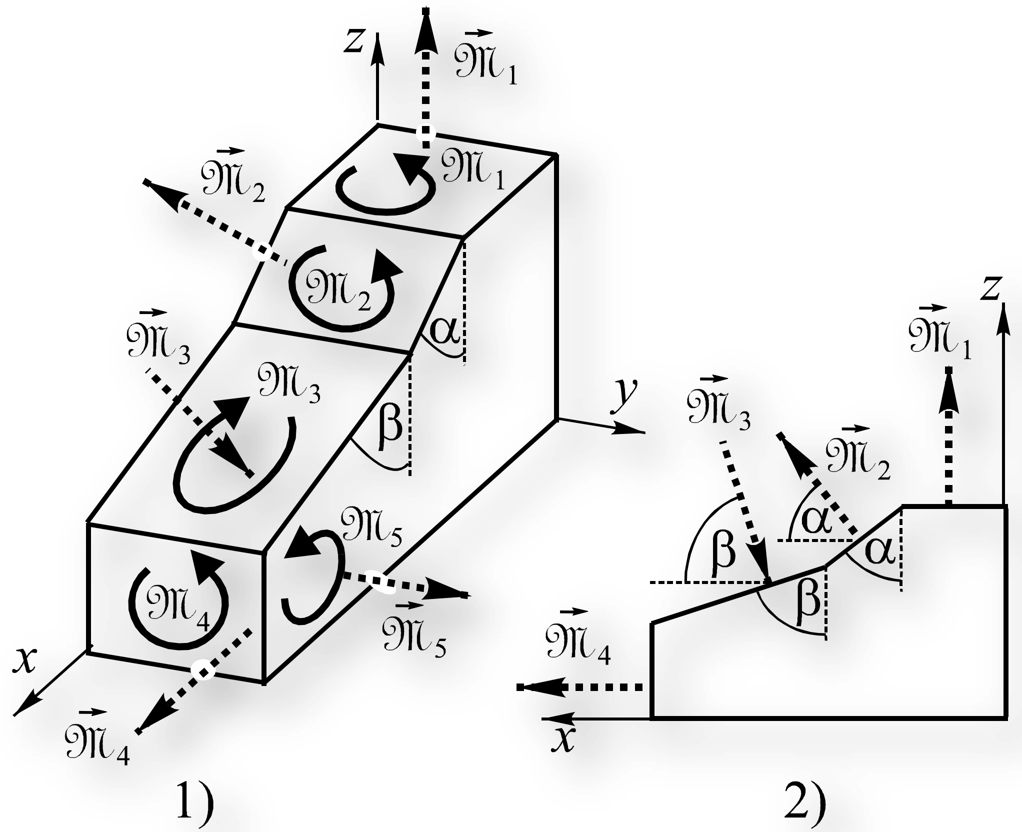
$$\Rightarrow \vec{\mathfrak{M}}_R = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}_R = \sqrt{\mathfrak{M}_{Rx}^2 + \mathfrak{M}_{Ry}^2 + \mathfrak{M}_{Rz}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Primer 5.4

Za zadat sistem spregova odrediti rezultujući spreg. Podaci su: $\mathfrak{M}_1$=1 kNm, $\mathfrak{M}_2$=2 kNm, $\mathfrak{M}_3$=2 kNm, $\mathfrak{M}_4$=1 kNm, $\mathfrak{M}_5$=2 kNm, $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$.



$$\mathfrak{M}_{1z} = \mathfrak{M}_1 = 1\,\text{kNm}, \quad \mathfrak{M}_{1x} = \mathfrak{M}_{1y} = 0,$$

$$\mathfrak{M}_{4x} = \mathfrak{M}_4 = 1\,\text{kNm}, \quad \mathfrak{M}_{4y} = \mathfrak{M}_{4z} = 0,$$

$$\mathfrak{M}_{5y} = \mathfrak{M}_5 = 2\,\text{kNm}, \quad \mathfrak{M}_{5x} = \mathfrak{M}_{5z} = 0,$$

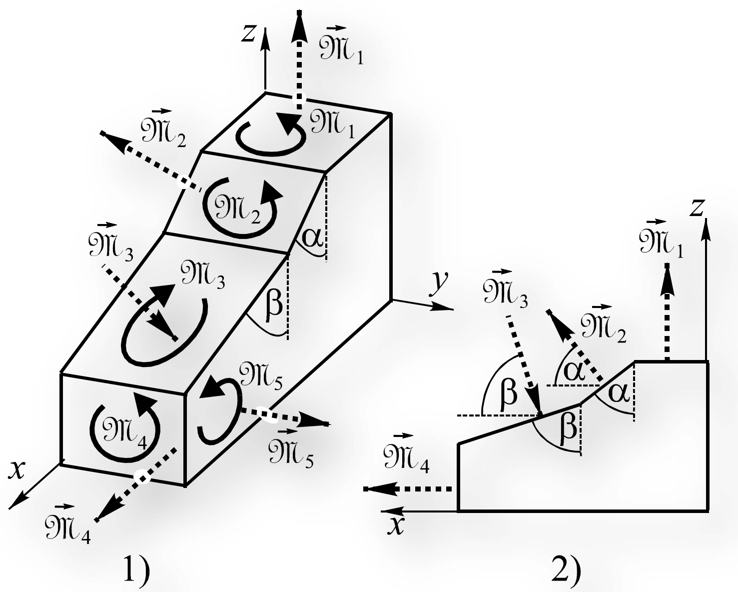
$$\mathfrak{M}_{2y} = 0, \quad \mathfrak{M}_{3y} = 0,$$

$$\mathfrak{M}_{2x} = \mathfrak{M}_2 \cos\alpha = \sqrt{2}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{2z} = \mathfrak{M}_2 \sin\alpha = \sqrt{2}\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3x} = -\mathfrak{M}_3 \cos\beta = -1\,\text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3z} = -\mathfrak{M}_3 \sin\beta = -\sqrt{3}\,\text{kNm}$$



$$\mathfrak{M}_{Rx} = \sum \mathfrak{M}_{ix} = 0 + \sqrt{2} - 1 + 1 + 0 = \sqrt{2}\ \text{kNm},$$

$$\mathfrak{M}_{Ry} = \sum \mathfrak{M}_{iy} = 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 2\,\text{kNm},$$

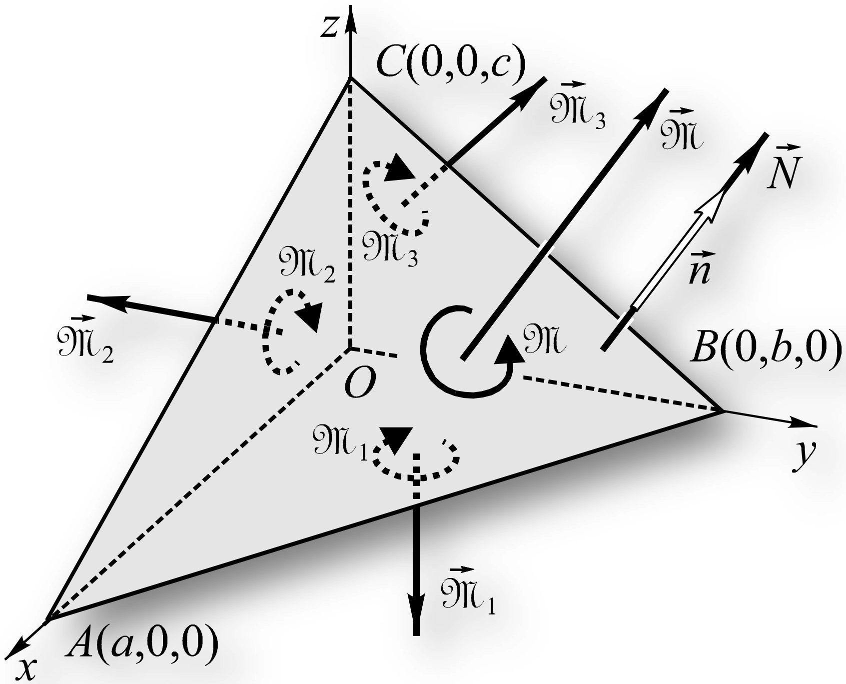
$$\mathfrak{M}_{Rz} = \sum \mathfrak{M}_{iz} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\ \text{kNm}, \ldots$$

Primer 5.5

(Primer ravnoteže spregova)

Poznate veličine: $\mathfrak{M}$, a, b i c.

Odrediti: $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ i $\mathfrak{M}_3$.



Uvodimo jedinični vektor $\vec{n}$, normalan na ravan ABC $\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\vec{n}$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc\vec{i} + ac\vec{j} + ab\vec{k} \quad \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{bc\,\vec{i} + ac\,\vec{j} + ab\,\vec{k}}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,\vec{n} = \frac{\mathfrak{M}\left(bc\,\vec{i} + ac\,\vec{j} + ab\,\vec{k}\right)}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_x\vec{i} + \mathfrak{M}_y\vec{j} + \mathfrak{M}_z\vec{k}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{bc}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{ac}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{ab}{\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}\mathfrak{M}.$$

Uslovi ravnoteže:

$$\sum \mathfrak{M}_{ix} = -\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_x = 0$$

$$\sum \mathfrak{M}_{iy} = -\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_y = 0$$

$$\sum \mathfrak{M}_{iz} = -\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_z = 0$$

....

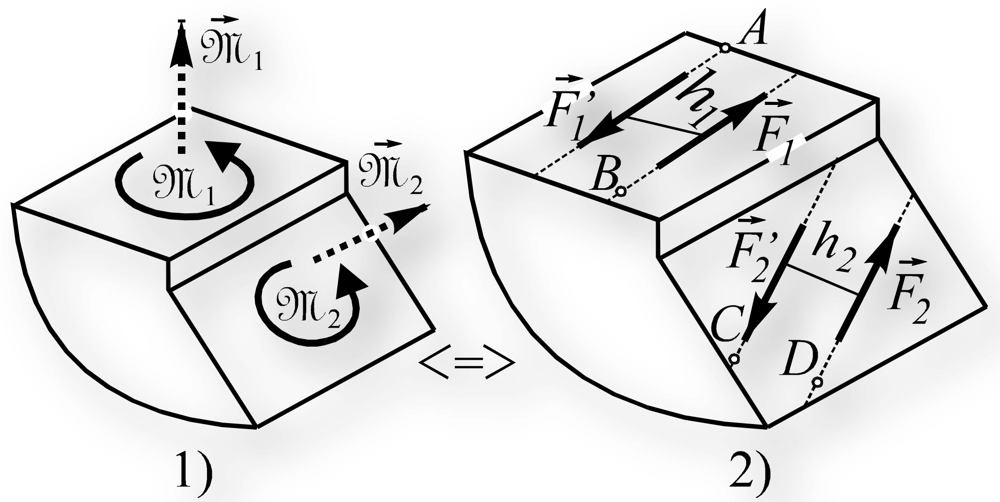
47. Izražavanje sprega preko momenta sile za tačku (vektori)

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_A^{\vec{F}_1}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1' = \vec{M}_B^{\vec{F}_1'}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_2 = \overrightarrow{CD} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_C^{\vec{F}_2}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_2 = \overrightarrow{DC} \times \vec{F}_2' = \vec{M}_D^{\vec{F}_2'}$$



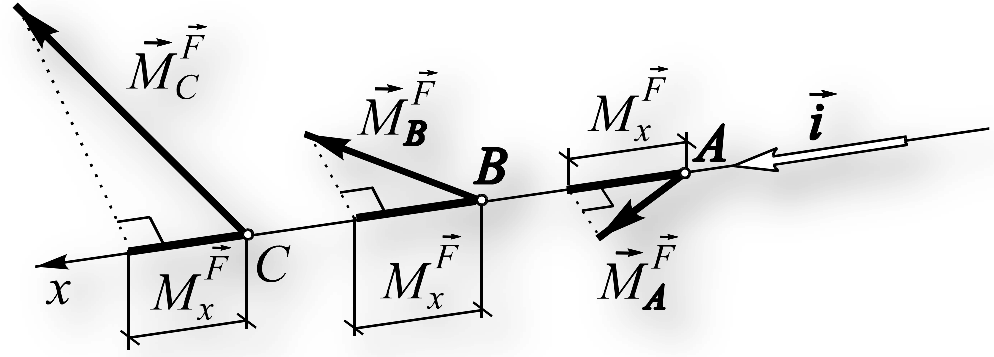
Vektor sprega se može odrediti preko vektora momenta sile za tačku

Jedini uslov koji moraju da zadovolje tačke *A*, *B*, *C* i *D* je da se nalaze na proizvoljnim mestima napadnih linija sila:

$$\vec{F}_1',\ \vec{F}_1,\ \vec{F}_2',\ \vec{F}_2.$$

48. Moment sile za osu

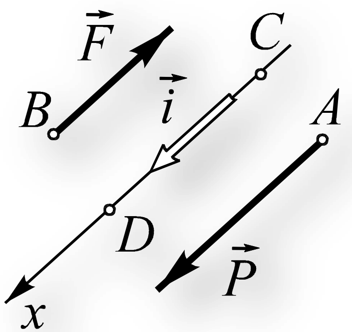
Moment sile za osu je skalarna veličina koja predstavlja meru obrtnog dejstva sile za tu osu. Može se dobiti projektovanjem na osu vektora momenta sile za proizvoljnu tačku na toj osi.



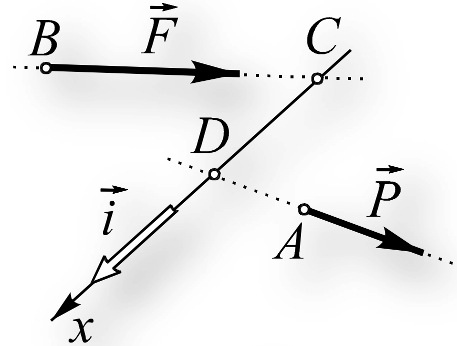
Moment sile $\vec{F}$ za x osu određuje ma koji od narednih skalarnih proizvoda:

$$\boxed{M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_A^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \vec{M}_B^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \vec{M}_C^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \ldots}$$

Sile koje su paralelne sa osom i sile čije napadne linije presecaju osu nemaju obrtno dejstvo oko te ose, tj. momenti takvih sila za osu jednaki su nuli:



1)



2)

$1) \Rightarrow$

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_D^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{DB} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{i} = 0$$

$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_C^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{CA} \times \vec{P}\right) \cdot \vec{i} = 0$$

$2) \Rightarrow$

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_C^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{CB} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{i} = \vec{0} \cdot \vec{i} = 0$$

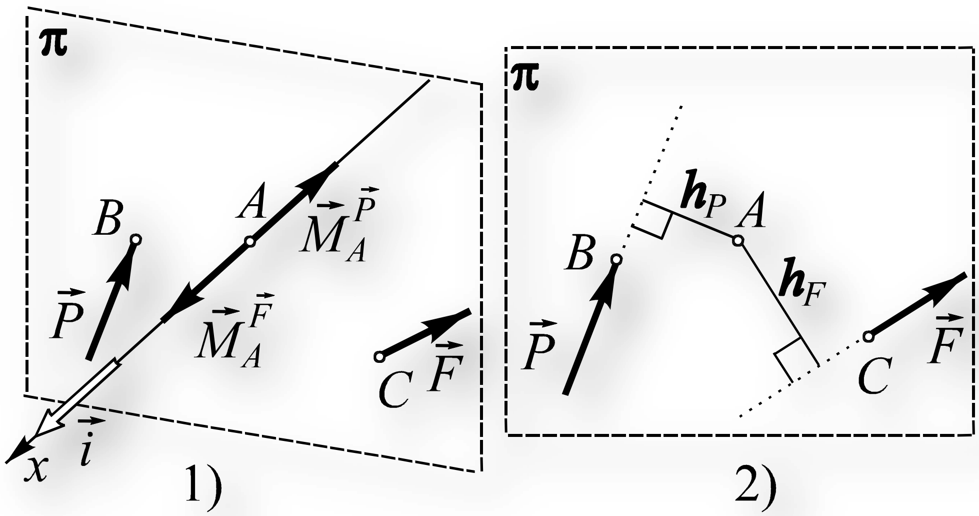
$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_D^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = \left(\overrightarrow{DA} \times \vec{P}\right) \cdot \vec{i} = \vec{0} \cdot \vec{i} = 0$$

Slučaj kada sila leži u ravni upravnoj na osu

$$\left|\vec{M}_A^{\vec{F}}\right| = F \cdot h_F, \quad \left|\vec{M}_A^{\vec{P}}\right| = P \cdot h_P$$

$$M_x^{\vec{F}} = \vec{M}_A^{\vec{F}} \cdot \vec{i} = +F \cdot h_F$$

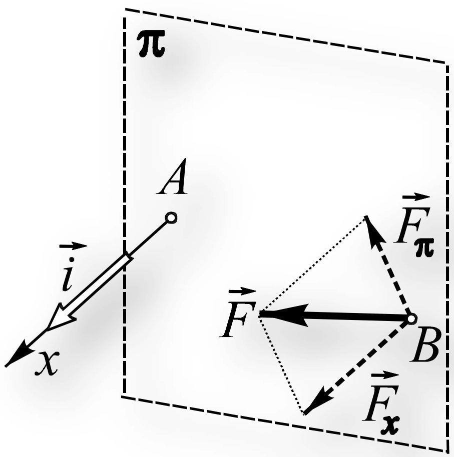
$$M_x^{\vec{P}} = \vec{M}_A^{\vec{P}} \cdot \vec{i} = -P \cdot h_P$$



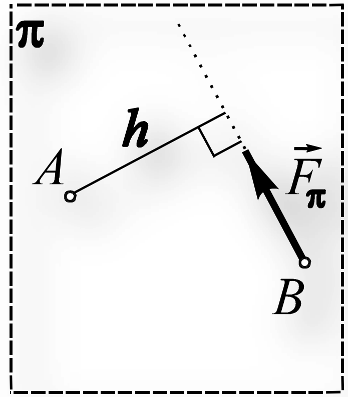
Praktično se mement sile za osu, kada sila leži u ravni upravnoj na osu, određuje prikazom te ravni u pravoj veličini tako što se posmatra sa strane u koju je usmerena osa

U takvom pogledu osa se vidi kao tačka a sila, njena napadna linija i najkraće rastojanje između napadne linije sile i ose vide se u pravoj veličini. Predznak momenta za osu je “+” ako, tako gledano, sila teži da obrne oko ose u pozitivnom matematičkom smeru (suprotno od smera kazaljke na satu), dok je predznak “-” ako sila teži da obrne oko ose u smeru kazaljke na satu. Sama vrednost koja sledi iza predznaka jednaka je proizvodu intenziteta sile i kraka sile. Krak sile predstavlja najkraće rastojanje između napadne linije sile i ose.

Slučaj kada sila zauzima proizvoljan položaj u odnosu na osu



1)



2)

$$M_x^{\vec{F}} = M_x^{\vec{F}_\pi} + M_x^{\vec{F}_x}$$

$$M_x^{\vec{F}} = M_x^{\vec{F}_\pi} = F_\pi \cdot h$$

Moment proizvoljne sile $\vec{F}$ određene svojim projekcijama X, Y i Z i koordinatama x, y i z njene napadne tačke:

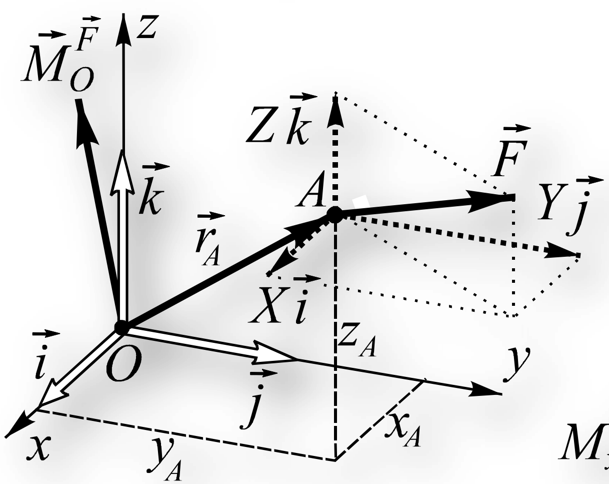
$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (yZ - zY)\vec{i} +$$

$$+(zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$$

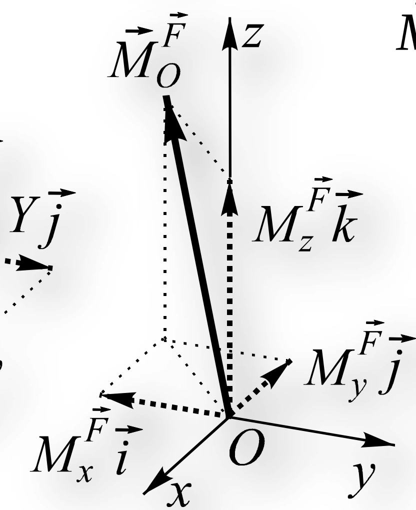
$$M_x^{\vec{F}} = yZ - zY$$

$$M_y^{\vec{F}} = zX - xZ$$

$$M_z^{\vec{F}} = xY - yX$$



1)



2)

49. Moment sprega za osu (prostorni problemi)

Pod pojmom “moment sprega za neku osu” podrazumevaće se mera obrtnog dejstva sprega u odnosu na tu osu.

Moment sprega za neku osu jednak je projekciji vektora tog sprega na tu osu.

Dakle, za spreg čiji je vektor

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_x \vec{i} + \mathfrak{M}_y \vec{j} + \mathfrak{M}_z \vec{k}}$$

veličine $\boxed{\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y \text{ i } \mathfrak{M}_z}$

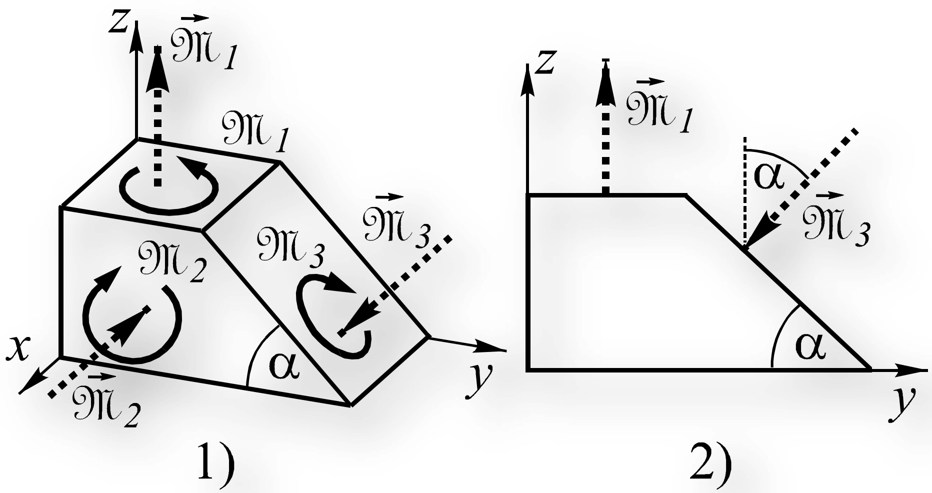
istovremeno predstavljaju, kako njegove projekcije na koordinatne ose, tako i momente tog sprega za iste ose.

Primer 5.9

Podaci su: $\mathfrak{M}_1 = 1\,kNm,\ \mathfrak{M}_2 = 2\,kNm,$

$\mathfrak{M}_3 = 2\,kNm,\ \alpha = 45^0.$

Odrediti momente spregova
za koordinatne ose?



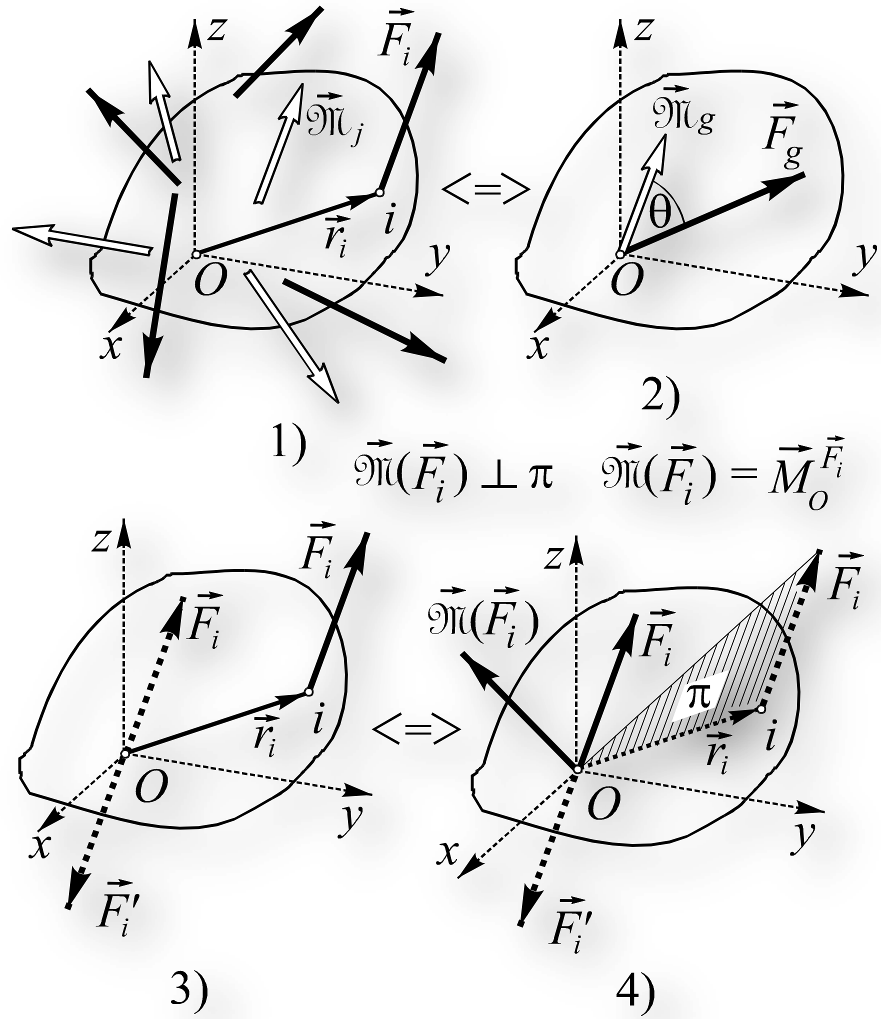
$$\mathfrak{M}_{3y} = -\mathfrak{M}_3 \sin\alpha = -\sqrt{2}\ \mathrm{kNm}$$

$$\mathfrak{M}_{3z} = -\mathfrak{M}_3 \cos\alpha = -\sqrt{2}\ \mathrm{kNm}$$

....

50. Redukcija proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na tačku koordinatnog početka. Glavni vektor i glavni moment

U opštem slučaju, svaki proizvoljni prostorni sistem sila i spregova (slika 1) može da se svede na torzer (slika 2) sačinjen od dva vektora. Jedan od ta dva vektora je sila $\vec{F}_g$ (glavni vektor), a drugi je spreg (glavni moment) $\vec{\mathfrak{M}}_g$.



To se postiže redukcijom svake od sila na tačku koordinatnog početka O. (slike 3 i 4)

Glavni vektor

$$\boxed{\vec{F}_g = X_g\vec{i} + Y_g\vec{j} + Z_g\vec{k}}$$

Glavni moment

$$\boxed{\vec{\mathfrak{M}}_g = \mathfrak{M}_{gx}\,\vec{i} + \mathfrak{M}_{gy}\,\vec{j} + \mathfrak{M}_{gz}\,\vec{k}}$$

Ugao između ta dva vektora određuje kosinusna teorema:

$$\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = \mathfrak{M}_g F_g \cos\theta \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g}{\mathfrak{M}_g F_g} \quad \vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = \mathfrak{M}_{gx}\,X_g + \mathfrak{M}_{gy}\,Y_g + \mathfrak{M}_{gz}\,Z_g$$

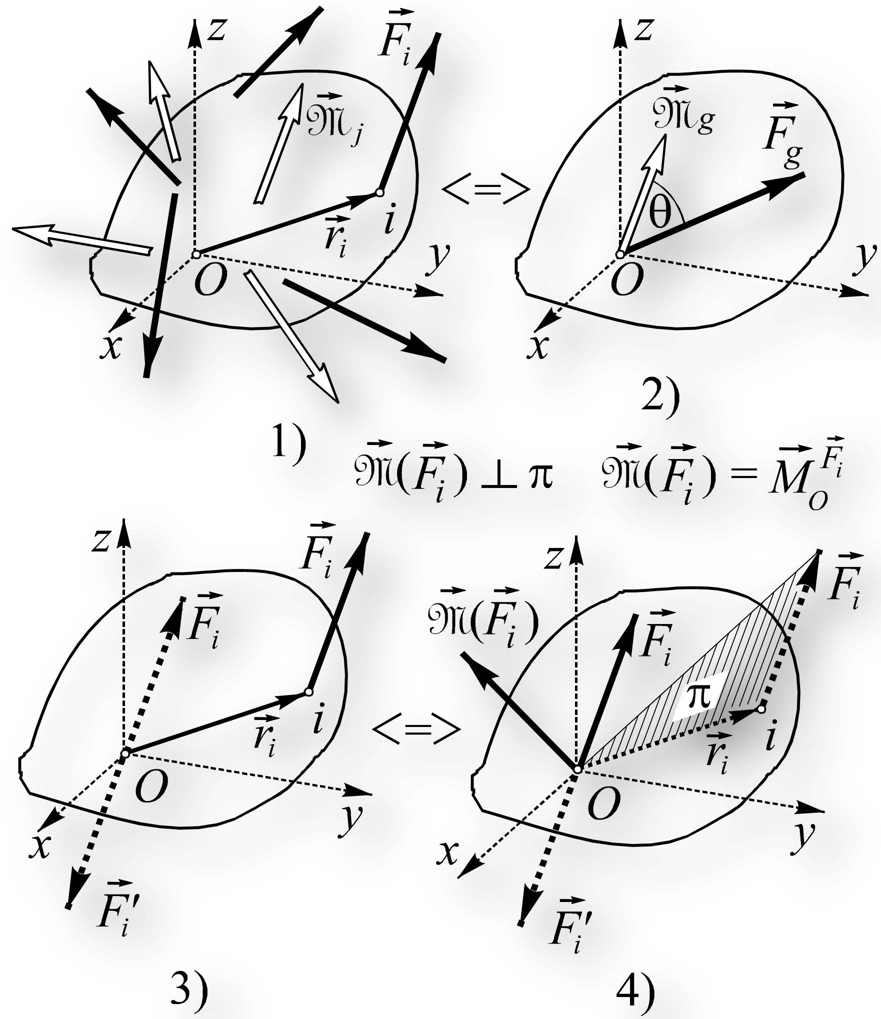
51. Projekcije glavnog vektora i glavnog momenta proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na koordinatne ose

Projekcije glavnog vektora se dobijaju projektovanjem vektorske jednakosti

$$\vec{F}_g = \sum \vec{F}_i$$

na koordinatne ose

$$X_g = \sum X_i,\;\; Y_g = \sum Y_i,\;\; Z_g = \sum Z_i$$



Glavni moment čine spregovi koji su rezultat redukcije sila $\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i)$ i zadati spregovi $\vec{\mathfrak{M}}_j$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \sum \vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) + \sum \vec{\mathfrak{M}}_j$$

$$\vec{\mathfrak{M}}(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

Projekcije glavnog momenta

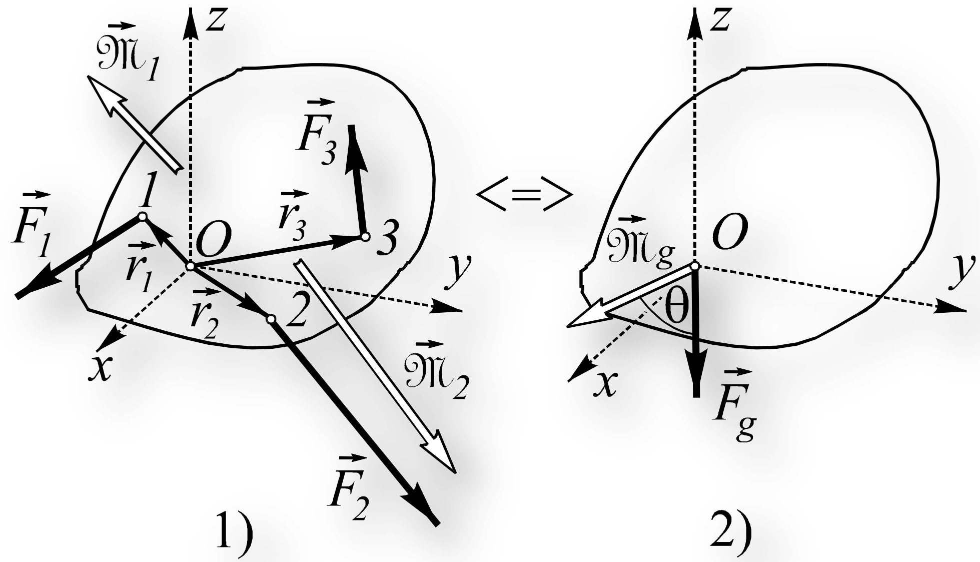
$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \sum \vec{M}_O$$

su:

$$\mathfrak{M}_{gx} = \sum M_x^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jx} = \sum M_{xi}$$

$$\mathfrak{M}_{gy} = \sum M_y^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jy} = \sum M_{yi} \qquad \mathfrak{M}_{gz} = \sum M_z^{\vec{F}_i} + \sum \mathfrak{M}_{jz} = \sum M_{zi}$$

Primer 10.1



Za zadat proizvoljan prostorni sistem sila i spregova (Sl.1) sile su definisane vektorima:

$$\vec{F}_1 = 1\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{r}_1 = -1\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = \sqrt{2}\vec{i} + 4\vec{j} - 1\vec{k},\ \vec{r}_2 = 1\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = -1\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{r}_3 = 3\vec{j} + 1\vec{k}$$

Projekcije sila su u kilonjutnima ([kN]) a koordinate napadnih tačaka sila u metrima ([m]).Vektori spregova koji pripadaju zadatom sistemu su:

$$\vec{\mathfrak{M}}_1 = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{k},\ \vec{\mathfrak{M}}_2 = -9\vec{i} - 1\vec{j} - 7\vec{k}$$

Projekcije spregova u kilonjutnmetrima ([kNm]).

Odrediti: glavni vektor, glavni moment tačku za koordinatnog početka *O* i ugao između glavnog vektora i glavnog momenta?

$$X_g = \sum X_i = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}\ \text{kN}$$
$$Y_g = \sum Y_i = -2 + 4 - 1 = 1\ \text{kN}$$
$$Z_g = \sum Z_i = -2 - 1 + 2 = -1\ \text{kN}$$

$$\vec{F}_g = \sqrt{2}\,\vec{i} + 1\,\vec{j} - 1\vec{k}$$
$$F_g = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2\ \text{kN}$$

$$\mathfrak{M}_{gx} = \sum\left(y_i Z_i - z_i Y_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jx} = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 +$$
$$+ y_2 Z_2 - z_2 Y_2 + y_3 Z_3 - z_3 Y_3 + \mathfrak{M}_{1x} + \mathfrak{M}_{2x} =$$
$$= -1\cdot(-2) - 1\cdot(-2) + 2\cdot(-1) - 0\cdot 4 + 3\cdot 2 - 1\cdot(-1) + 2\sqrt{2} - 9 = 2\sqrt{2}\ \text{kN}$$

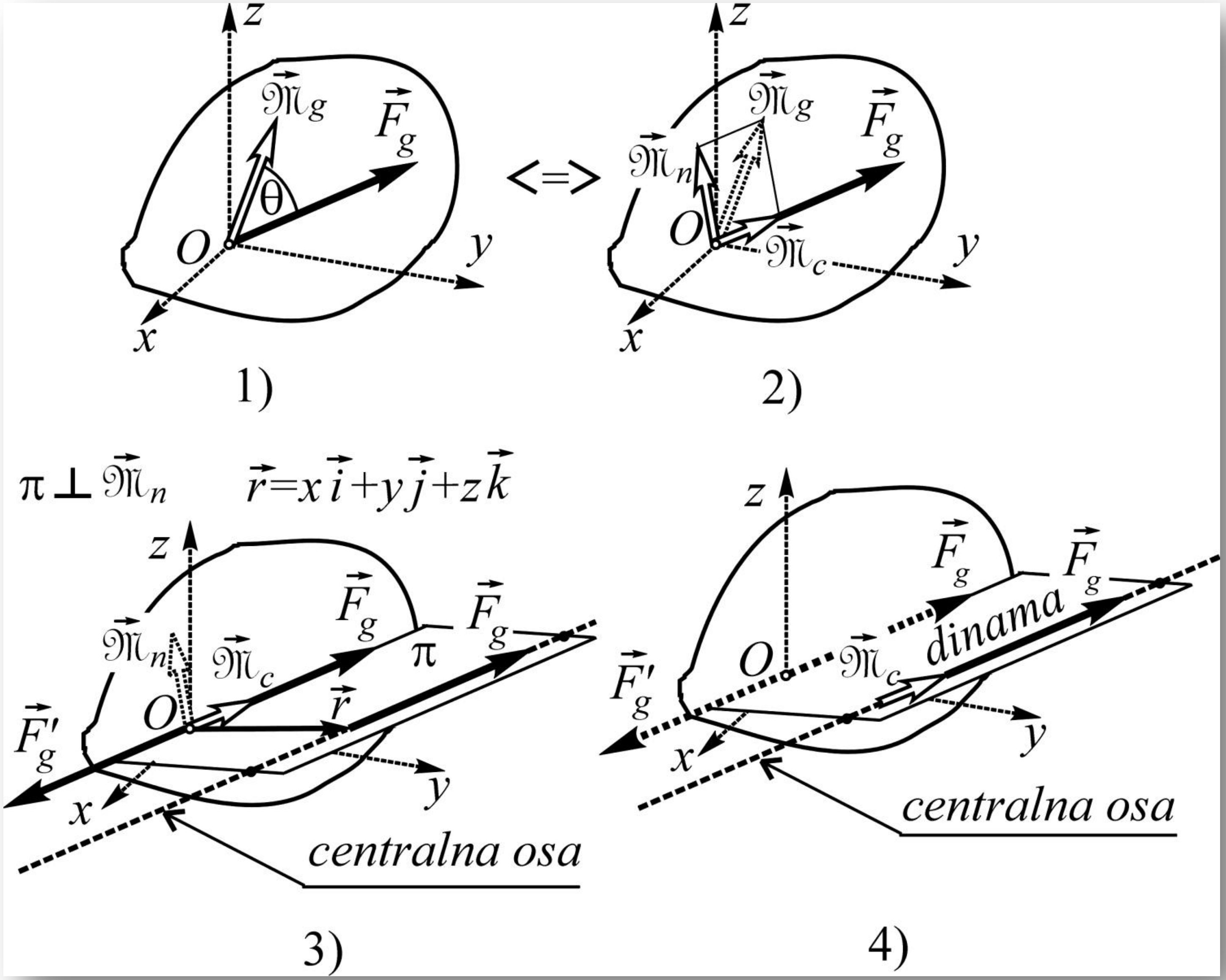
$$\mathfrak{M}_{gy} = \sum\left(z_i X_i - x_i Z_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jy} = z_1 X_1 - x_1 Z_1 +$$
$$+ z_2 X_2 - x_2 Z_2 + z_3 X_3 - x_3 Z_3 + \mathfrak{M}_{1y} + \mathfrak{M}_{2y} =$$
$$= 1\cdot 1 - 0\cdot(-2) + 0\cdot\sqrt{2} - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) - 0\cdot 2 + 0 - 1 = 0$$

$$\mathfrak{M}_{gz} = \sum\left(x_i Y_i - y_i X_i\right) + \sum \mathfrak{M}_{jz} = x_1 Y_1 - y_1 X_1 +$$
$$+ x_2 Y_2 - y_2 X_2 + x_3 Y_3 - y_3 X_3 + \mathfrak{M}_{1z} + \mathfrak{M}_{2z} =$$
$$= 0\cdot(-2) - (-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\sqrt{2} + 0\cdot(-1) - 3\cdot(-1) + 2\sqrt{2} - 7 = 1\ \text{kN}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + 1\vec{k} \qquad \mathfrak{M}_g = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = 3\ \text{kNm}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_g \cdot \vec{F}_g = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 3\,(\text{kN})^2\text{m}$$

52. Svođenje proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova (odnosno torzera) na dinamu. Centralna osa. U kojim slučajevima se proizvoljni prostorni sistem sila i spregova može svesti na rezultantu

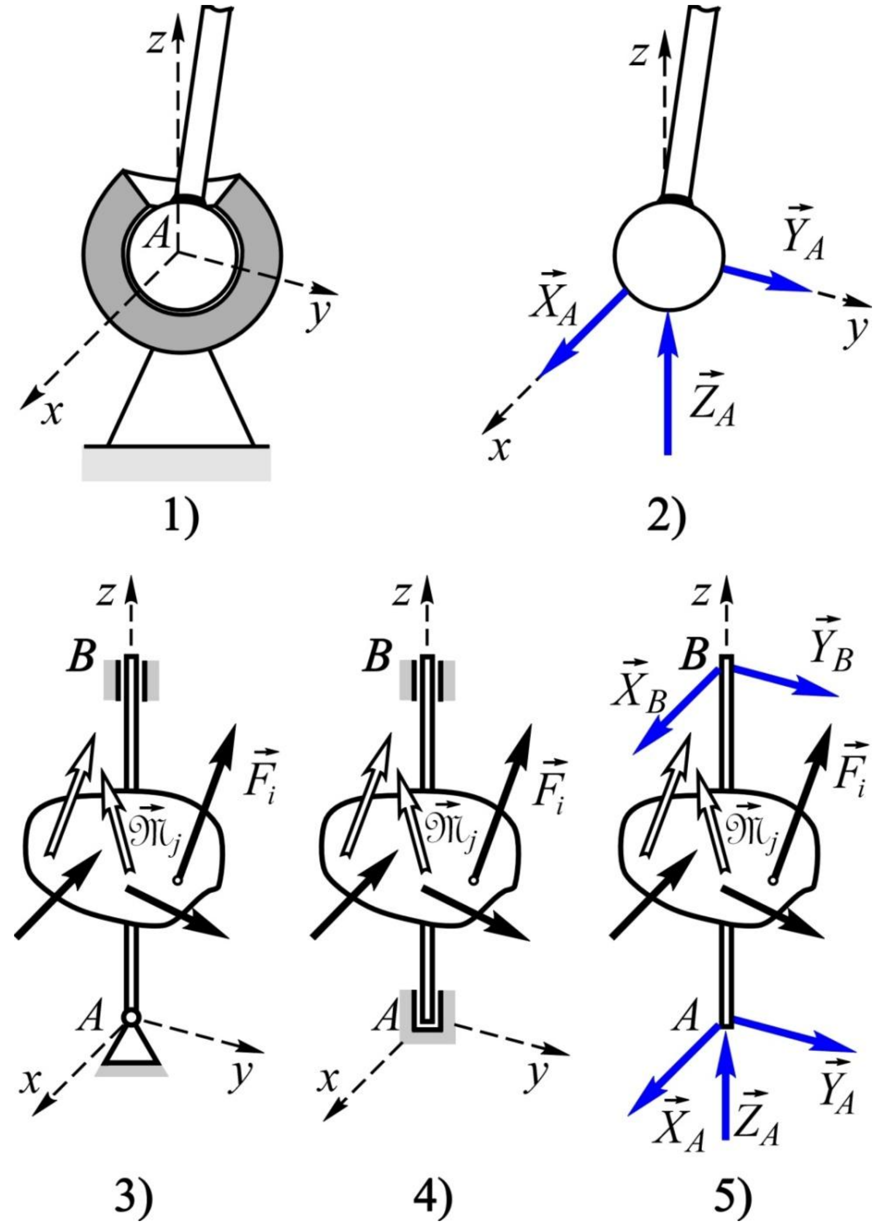

$\vec{\mathfrak{M}}_g$
$\vec{F}_g$
θ
O
z
y
x
1)
<=>
$\vec{\mathfrak{M}}_n$
$\vec{\mathfrak{M}}_c$
2)
$\pi \perp \vec{\mathfrak{M}}_n$
$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$
$\vec{F}'_g$
$\vec{r}$
π
centralna osa
3)
dinama
4)

53. Reakcije sfernog i cilindričnog zgloba

Sferni zglob (Sl.1) je veza koja dozvoljava elementu obrtanje oko zgloba ali mu sprečava kretanje u bilo kom pravcu.

U praksi se veoma često sferni zglob *A* i cilindrični *B* koriste u paru kako je prikazano na slici 3 (odnosno, 4).

Tako postavljen cilindrični zglob dopušta obrtanje oko jedne ose (ovde je to osa *z*) i kretanje bez otpora u pravcu te ose. Iz navedenih razloga, za prikazan cilindrični zglob *B*, ne postoji reakcija u *z* pravcu već postoje reakcije u pravcima *x* i *y*.



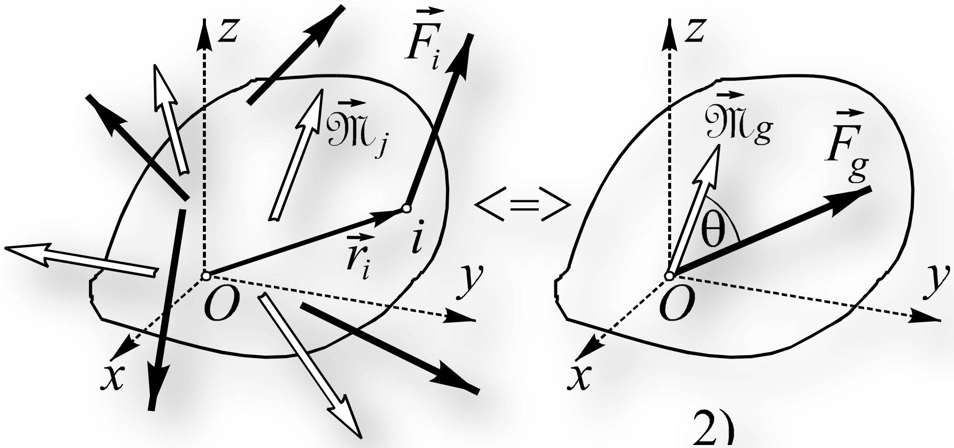
54. Ravnoteža proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova

U slučaju kada su i glavni vektor i glavni moment jednaki nula vektoru, telo na koje dejstvuje proizvoljan prostorni sistem sila i spregova se nalazi u ravnoteži. Dakle, za ravnotežu sistema moraju biti zadovoljene sledeće vektorske jednakosti:

$$\boxed{\vec{F}_g = \vec{0}, \quad \vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{0}.}$$

Projektovanjem ovih vektorskih jednakosti na koordinatne ose, dobijaju se sledeći nezavisni ***uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova***:

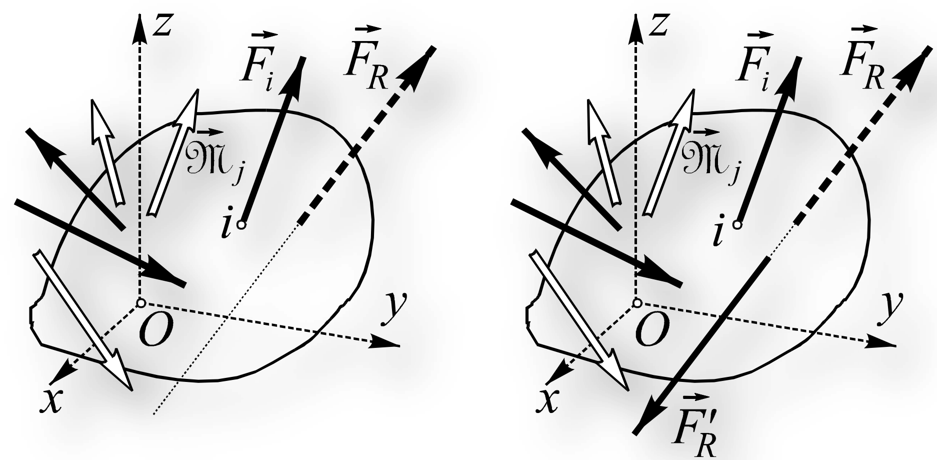
$$\boxed{\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \\ \sum M_{xi} &= 0 \\ \sum M_{yi} &= 0 \\ \sum M_{zi} &= 0 \end{aligned}}$$



55. Varinjonova teorema za prostorni sistem

Neka proizvoljan prostorni sistem sila i spregova ima rezultantu (slika 1)

Dodavanjem tom sistemu sile $\vec{F}_g'$, koja ima isu napadnu liniju i intenzitet kao i sila $\vec{F}_g$, a suprotan smer, dobija se uravnotežen sistem sila za koji mora da važe sve jednačine ravnoteže (pa, naravno i momentne)



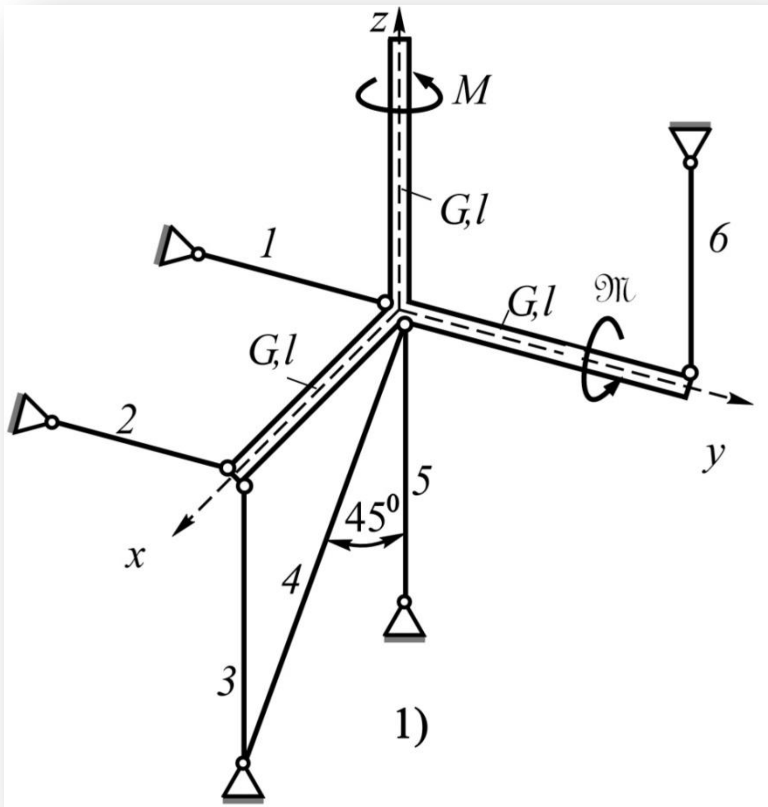
1) 2)

$$\sum M_{x\,i} + M_x^{\vec{F}_R'} = 0 \qquad \text{zbog} \qquad M_x^{\vec{F}_R'} = -M_x^{\vec{F}_R} \qquad \Rightarrow M_x^{\vec{F}_R} = \sum M_{x\,i}$$

Suma momenata, prostornog sistema sila i spregova, koji ima rezultantu, za neku osu, jednaka je momentu njegove rezultante za istu osu. (Varinjonova teorema)

Primer 10.3

Kruto telo sačinjeno od tri kruto spojena međusobno upravna istovetna homogena štapa, težina *G*, dužina *l*, održava u ravnoteži šest lakih štapova kao što je na slici 1 prikazano. Na teški vertikalni štap dejstvuje spreg momenta *M*, koji leži u ravni upravnoj na taj štap, smera datog na slici. Na teški štap, koji ima pravac ose *y*, dejstvuje spreg momenta $\mathfrak{M}$ koji leži u ravni upravnoj na taj štap, smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina *G*, *M*, $\mathfrak{M}$ i *l*, odrediti reakcije lakih štapova.



1)

$$\sum X_i = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \quad S_4 = 0$$

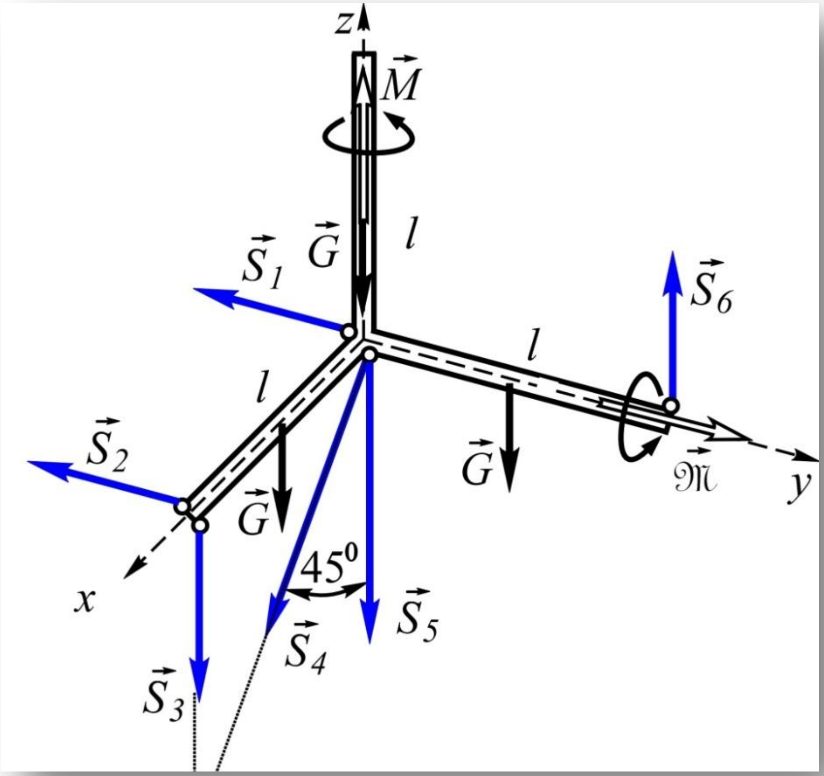
$$\sum Y_i = -S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow \quad S_1 = -\frac{M}{l}$$

$$\sum Z_i = -S_3 - S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_5 + S_6 - 3G = 0 \quad \Rightarrow S_5 = \frac{\mathfrak{M}}{l} - 2G$$

$$\sum M_{xi} = -G \cdot \frac{l}{2} + S_6 \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{G}{2}$$

$$\sum M_{yi} = G \cdot \frac{l}{2} + S_3 \cdot l + \mathfrak{M} = 0$$

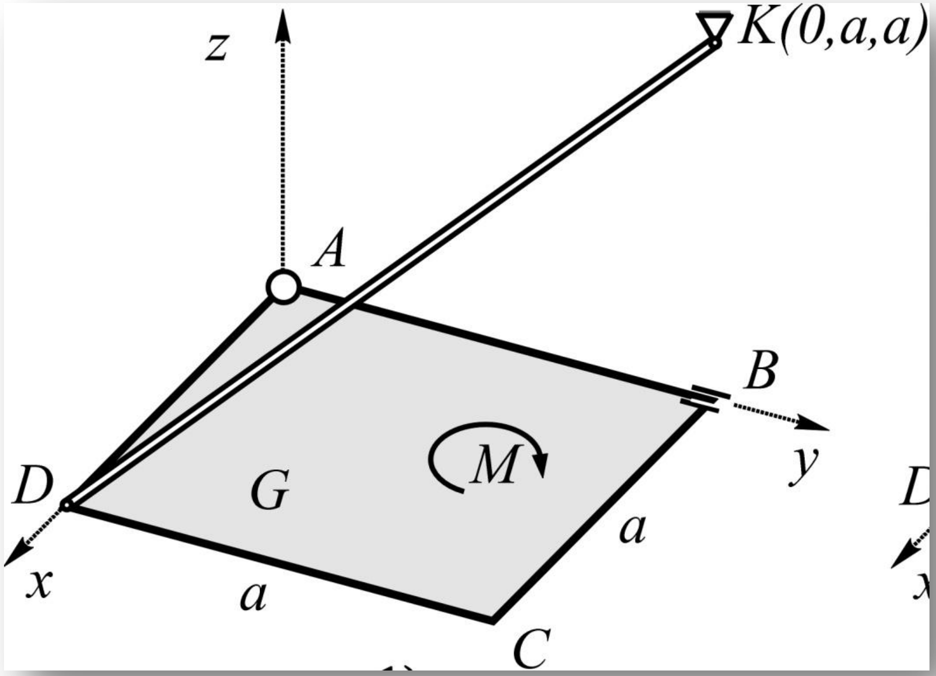
$$\Rightarrow \quad S_3 = -\frac{\mathfrak{M}}{l} - \frac{G}{2}$$



$$\sum M_{zi} = -S_2 \cdot l + M = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{M}{l}$$

Primer 10.4

Horizontalna homogena kvadratna ploča *ABCD*, težine *G*, stranice *a*, vezana je u tački *A* sfernim zglobom a u tački *B* cilindričnim (Sl.1). Za tačku *D* ploče vezan je laki štap *KD*, gde su zadate koordinate *K(0,a,a)*. Na ploču dejstvuje spreg momenta *M* koji leži u ravni ploče smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina *G*, *M* i *a*, odrediti reakcije veza u tačkama *A* i *B* kao i silu u lakom štapu *KD*.



$$D(a,0,0),\quad K(0,a,a)\quad \Rightarrow \overrightarrow{DK}=-a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}\qquad \overline{DK}=\sqrt{(-a)^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$$

$$x_D=a,\qquad \vec{S}=\frac{S}{\overline{DK}}\overrightarrow{DK}=\frac{S}{a\sqrt{3}}\left(-a\vec{i}+a\vec{j}+a\vec{k}\right)\quad \vec{S}=-\frac{S}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{S}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{S}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

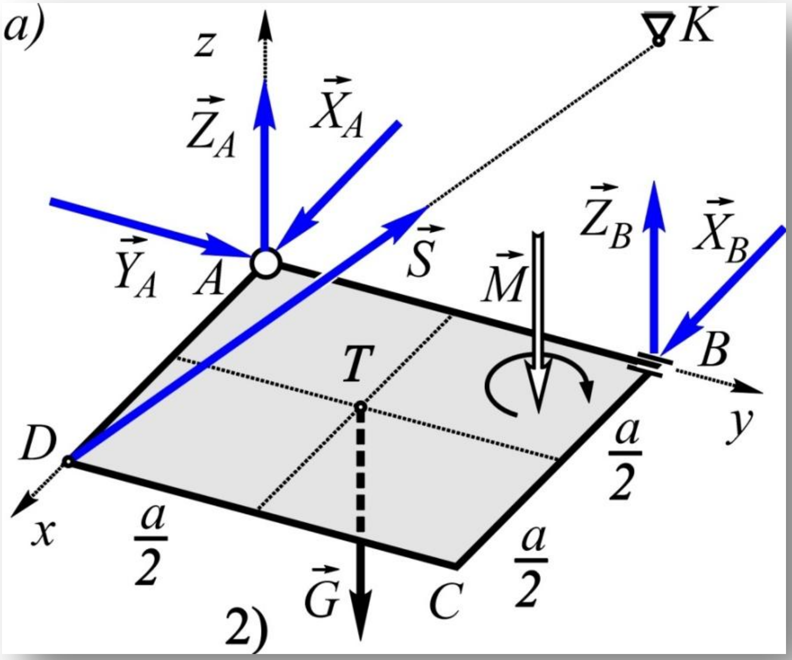
$$y_D=z_D=0$$

$$X_S=-\frac{S}{\sqrt{3}},\ Y_S=\frac{S}{\sqrt{3}},\ Z_S=\frac{S}{\sqrt{3}}$$

$$M_x^{\vec{S}}=y_D Z_S-z_D Y_S=0$$

$$M_y^{\vec{S}}=z_D X_S-x_D Z_S=-a\frac{S}{\sqrt{3}}$$

$$M_z^{\vec{S}}=x_D Y_S-y_D X_S=a\frac{S}{\sqrt{3}}$$



Jednačine ravnoteže:

$$\sum X_i = X_A + X_B - \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \quad X_A = \frac{M}{a}$$

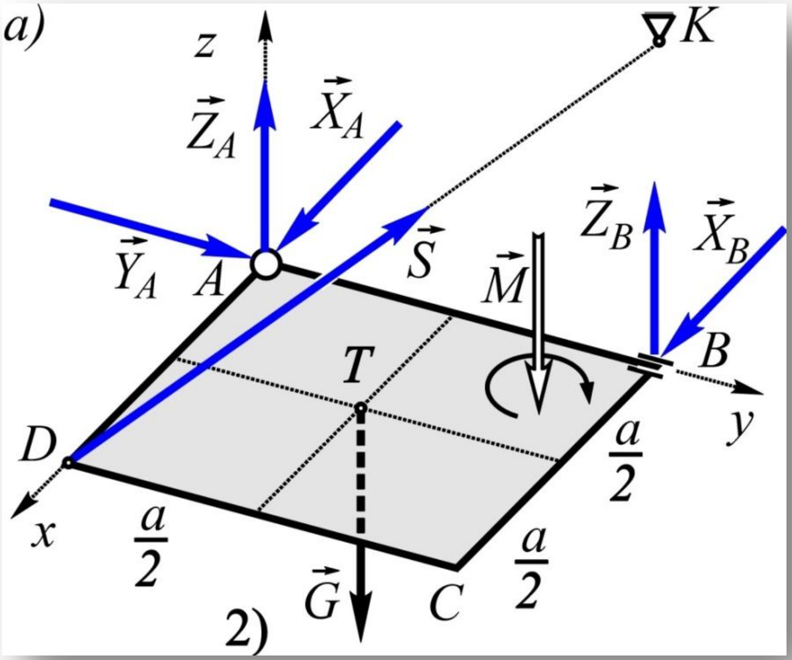
$$\sum Y_i = Y_A + \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = -\frac{G}{2}$$

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - G + \frac{S}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_{x\,i} = Z_B \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_B = \frac{G}{2}$$

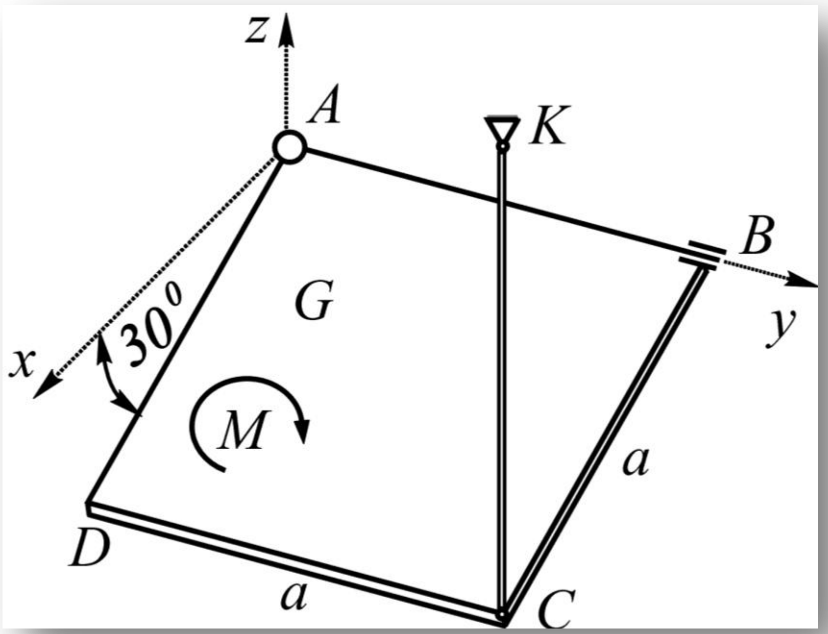
$$\sum M_{y\,i} = G \cdot \frac{a}{2} - \frac{S}{\sqrt{3}} \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\sqrt{3}}{2} G$$

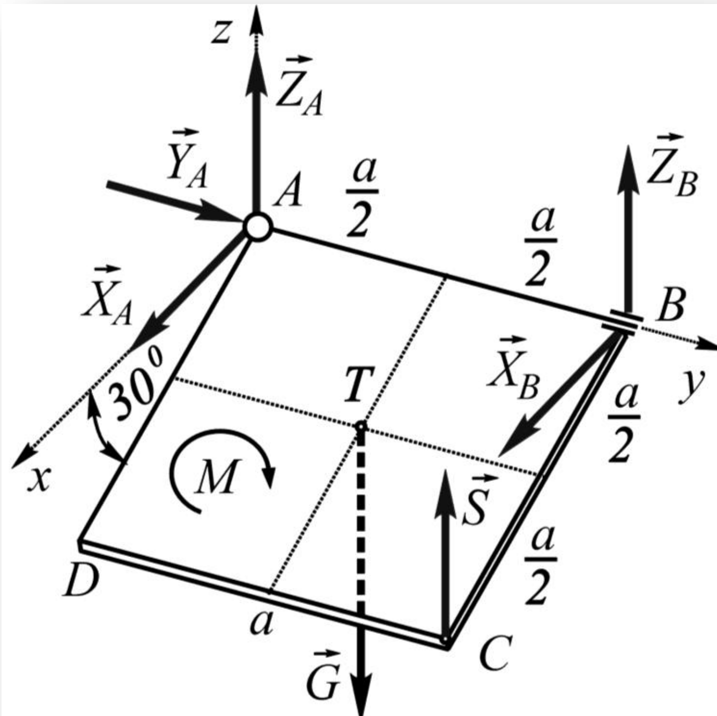
$$\sum M_{z\,i} = -X_B \cdot a + \frac{S}{\sqrt{3}} \cdot a - M = 0 \;\Rightarrow\; X_B = \frac{G}{2} - \frac{M}{a}$$

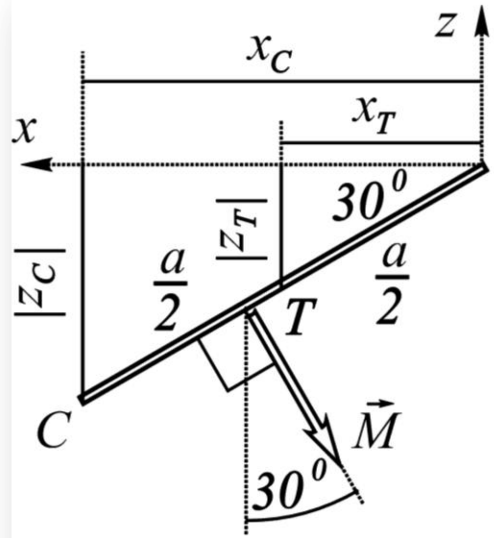


Primer 10.5

Homogena kvadratna ploča *ABCD* (Sl.1), težine *G*, stranice *a*, koja sa horizontalnom *xAy* ravni gradi ugao od 30^0, vezana je u tački *A* sfernim zglobom a u tački *B* cilindričnim. Za tačku *C* ploče vezan je vertikalni laki štap *KC*. Na ploču dejstvuje spreg momenta M koji leži u ravni ploče smera datog na slici. Za prikazan ravnotežni položaj, u zavisnosti od poznatih veličina *G*, *M* i *a* , odrediti reakcije veza u zglobovima *A* i *B* kao i silu u lakom štapu.







$$x_T = \frac{a}{2}\cos 30^0$$

$$z_T = -\frac{a}{2}\sin 30^0$$

$$x_C = a\cos 30^0$$

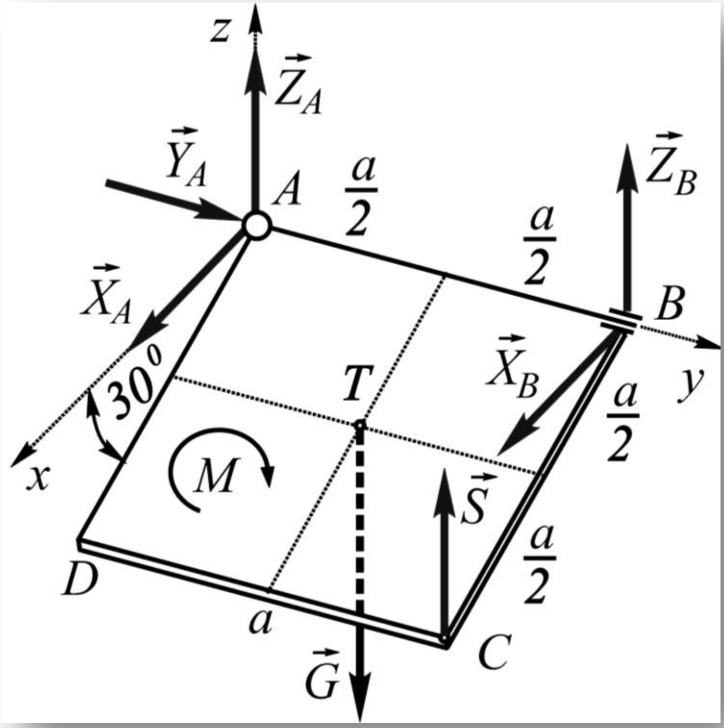
$$z_C = -a\sin 30^0$$

$$M_x = -M\sin 30^0$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = -M\cos 30^0$$

Jednačine ravnoteže:



$$\sum X_i = X_A + X_B = 0 \Rightarrow \quad X_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{a}$$

$$\sum Y_i = Y_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = 0$$

$$\sum Z_i = Z_A + Z_B - G + S = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = \frac{G}{2} - \frac{M}{2a}$$

$$\sum M_{xi} = Z_B \cdot a + S \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} - M \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow Z_B = \frac{M}{2a}$$

$$\sum M_{yi} = G \cdot \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - S \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{G}{2}$$

$$\sum M_{zi} = -X_B \cdot a - M\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{a}$$

Šta smo naučili?

45. **Vektor momenta sile za tačku.**
46. **Prostorni sistem spregova, vektor rezultujućeg sprega i uslovi ravnoteže.**
47. **Izražavanje sprega preko momenta sile za tačku (vektori).**
48. **Moment sile za osu.**
49. **Moment sprega za osu (prostorni problemi).**
50. **Redukcija proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na tačku koordinatnog početka. Glavni vektor i glavni moment.**
51. **Projekcije glavnog vektora i glavnog momenta proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova na koordinatne ose.**
52. **Svođenje proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova (odnosno torzera) na dinamu. Centralna osa. U kojim slučajevima se proizvoljni prostorni sistem sila i spregova može svesti na rezultantu.**
53. **Reakcije sfernog i cilindričnog zgloba.**
54. **Ravnoteža proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova.**
55. **Varinjonova teorema za prostorni sistem.**

Mehanika
Predavanja 8

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.