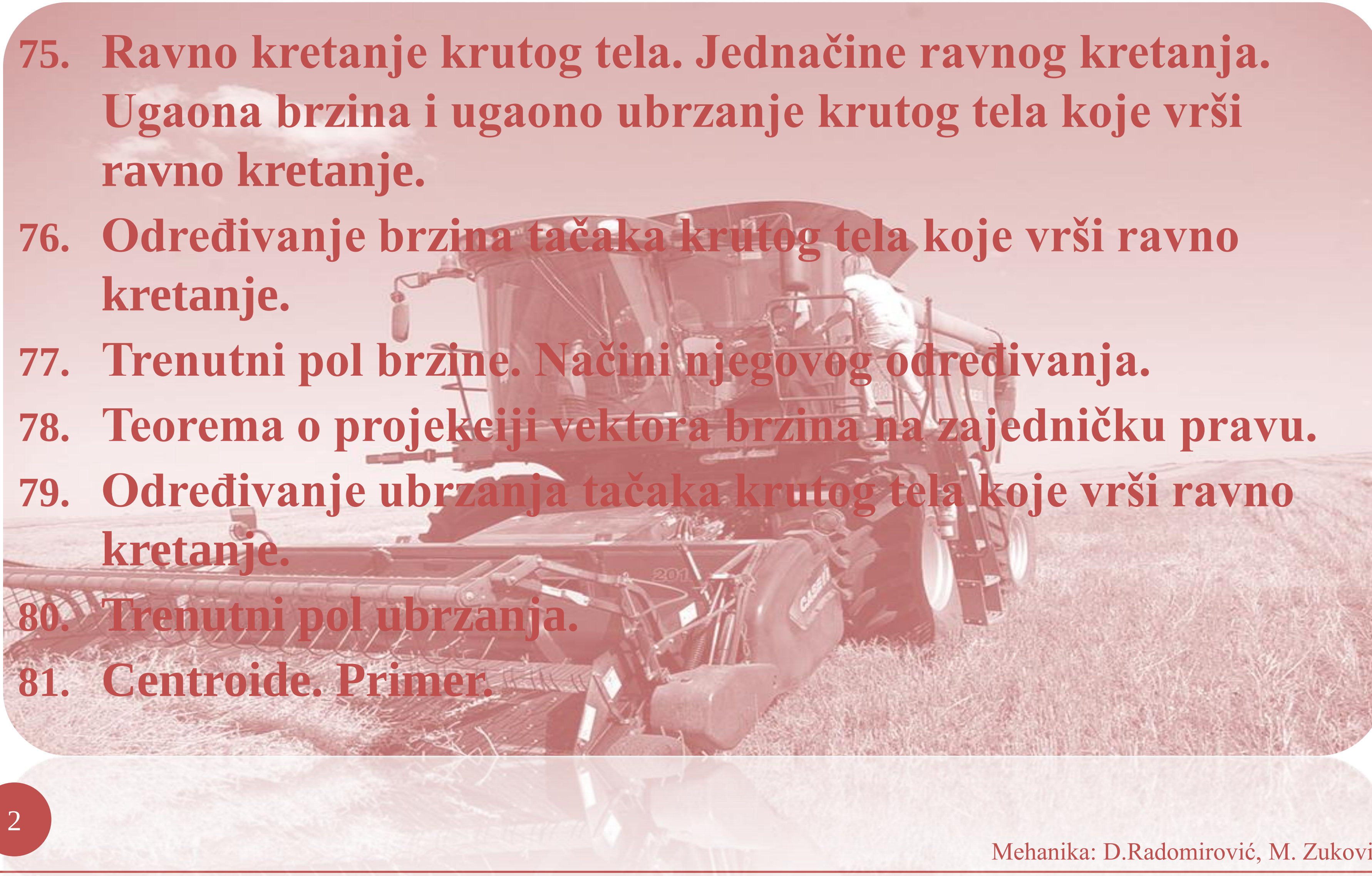
Mehanika
Predavanja 12

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.

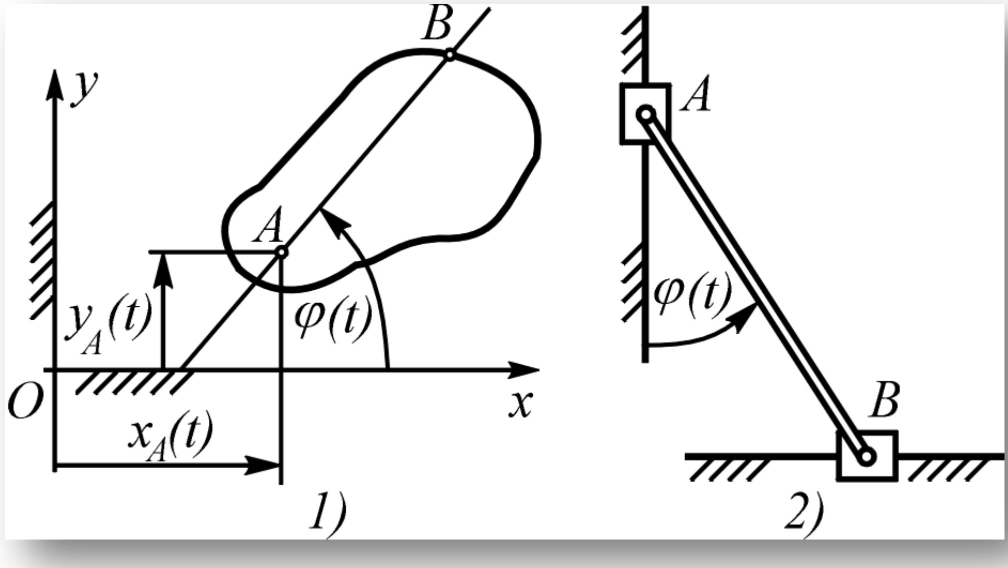
Šta ćemo naučiti?



75. Ravno kretanje krutog tela. Jednačine ravnog kretanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela koje vrši ravno kretanje.
76. Određivanje brzina tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.
77. Trenutni pol brzine. Načini njegovog određivanja.
78. Teorema o projekciji vektora brzina na zajedničku pravu.
79. Određivanje ubrzanja tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.
80. Trenutni pol ubrzanja.
81. Centroide. Primer.

75. Ravno kretanje krutog tela. Jednačine ravnog kretanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela koje vrši ravno kretanje.

Ako se telo kreće u ravni (Sl.1), a to kretanje nije obrtanje oko ose, a nije ni translatorno, onda je to kretanje takvo da istovremeno sadrži i rotaciju i translaciju i naziva se ravnim kretanjem.

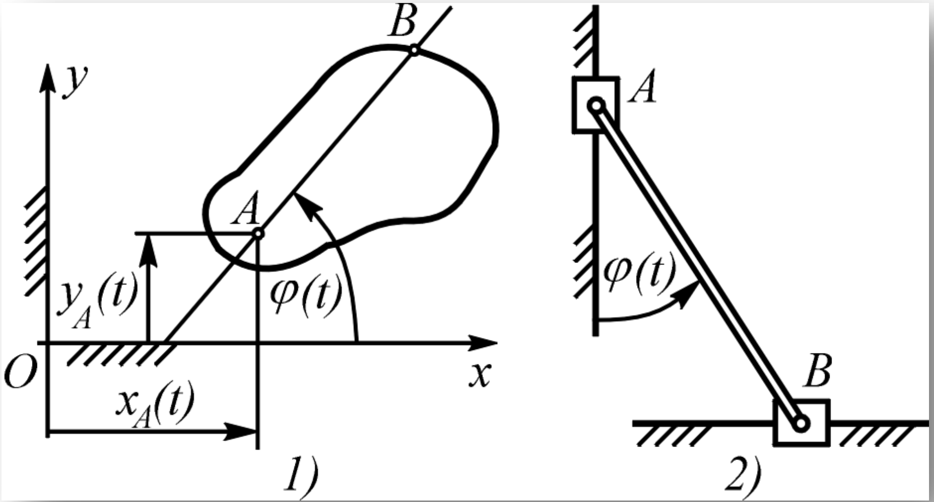


I kod ravnog kretanja, kao i kod obrtanja oko nepomične ose jedna od jednačina kretanja je zavisnost ugla rotacije φ od vremena *t*. Ugao rotacije φ se definiše kao ugao između ma koje nepokretne prave (ovde *x* ose) i ma koje prave koja pripada telu (ovde prave *AB*).

Potpuno identično, kao što važi za slučaj obrtanja oko nepomične ose, prvi izvod ugla rotacije po vremenu daje ugaonu brzinu tela ω a drugi izvod ugla rotacije po vremenu, tj. prvi izvod ugaone brzine, daje ugaono ubrzanje tela ε, dakle:

$$\boxed{\omega(t) = \dot{\varphi}(t), \quad \varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t).}$$

Za slobodno kruto telo koje vrši ravno kretanje (Sl.1), s obzirom da tri promenljive koordinate u potpunosti određuju položaj tela, postoje tri jednačine koje definišu njegovo kretanje. Osim već pomenute jednačine $\varphi(t)$, druge dve mogu, kao na Sl. 2, da budu x i y koordinata ma koje proizvoljne tačke tela.



Dakle, jednačine kretanja za slobodno kruto telo koje vrši ravno kretanje (Sl.1) su:

$$\boxed{x_A(t),\ \ y_A(t),\ \varphi(t).}$$

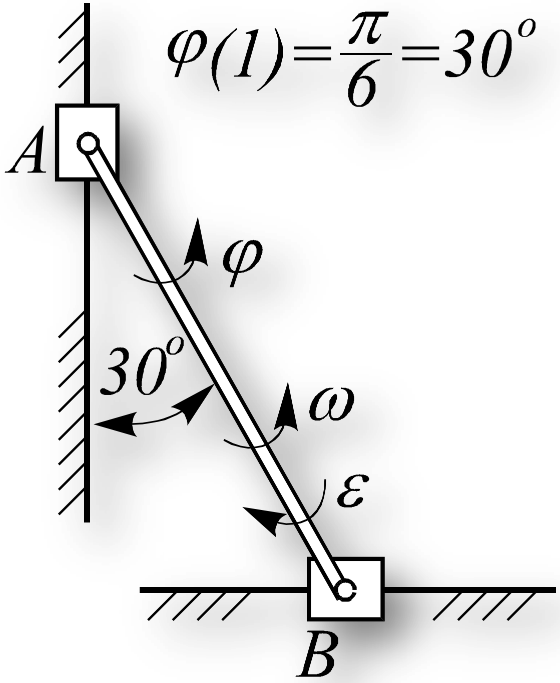
Međutim, ako je telo koje vrši ravno kretanje podvrgnuto nekim vezama (kao na primer na Sl. 2) broj jednačina kretanja (samim tim i broj stepeni slobode kretanja) se umanjuje za broj veza. Tako, za ravno kretanje štapa kao što je prikazano na Sl. 2 kretanje je definisano samo jednom jednačinom kretanja .

Tačka A štapa je primorana da se uz pomoć klizača kreće duž vertikalne prave a slično tome tačka B se kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu. Da je štap na mestu A ili mestu B bio slobodan (bez klizača koji bi na tom mestu sputavao kretanje), postojala bi samo jedna veza a samim tim dve jednačine kretanja.

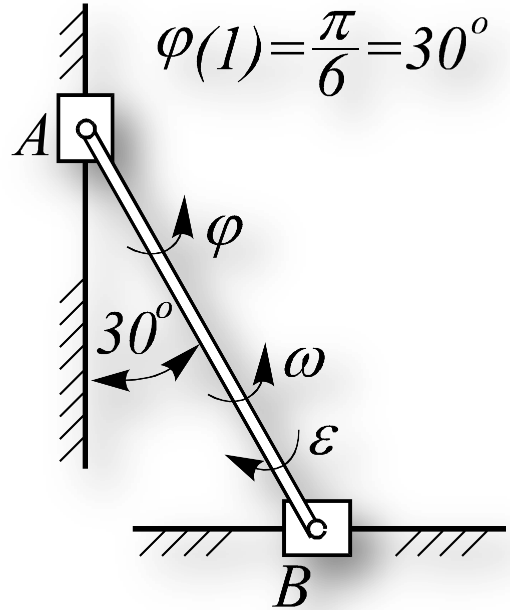
Primer 2.4

Odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa prikazanog na prethodnoj slici 2 u trenutku t = 1 s, ako se njegov ugao rotacije menja sa vremenom po zakonu

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} - 2 + 3t - t^2.$$



$$\boxed{\varphi(t)=\frac{\pi}{6}-2+3t-t^2.}$$



S obzirom da je prvi izvod ugla rotacije po vremenu

$$\boxed{\dot{\varphi}(t)=3-2t,}$$

a njegova vrednost za t = 1 s je $\dot{\varphi}(1)=1,$
imamo da je u tom trenutku ugaona brzina štapa

$$\boxed{\omega=1\,s^{-1},}$$

sa smerom koji je, zbog predznaka "plus" u izrazu za $\dot{\varphi}(1)$, isti kao i smer porasta ugla rotacije.

S obzirom da je drugi izvod ugla rotacije po vremenu:

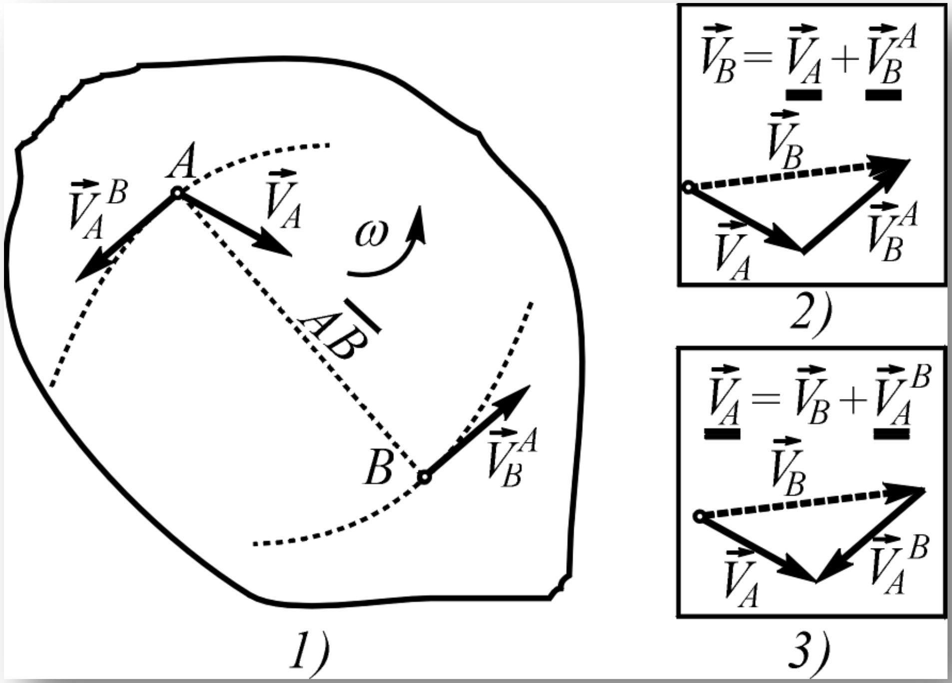
$$\boxed{\ddot{\varphi}(t)=-2,}$$

a njegova je vrednost, kako za ma koje t, tako i za t = 1 s, takođe $\ddot{\varphi}(1)=-2,$
imamo da je u tom trenutku ugaono ubrzanje štapa

$$\boxed{\varepsilon=2\,s^{-1}.}$$

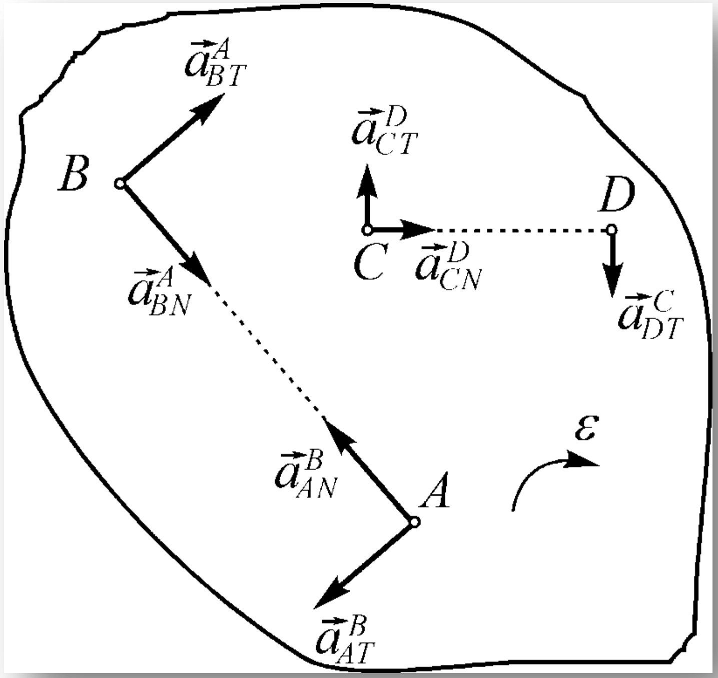
Smer ugaonog ubrzanja ε je, zbog predznaka "minus" u izrazu za $\ddot{\varphi}(1)$, suprotan u odnosu na smer porasta ugla rotacije φ.

79. Određivanje brzina tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje



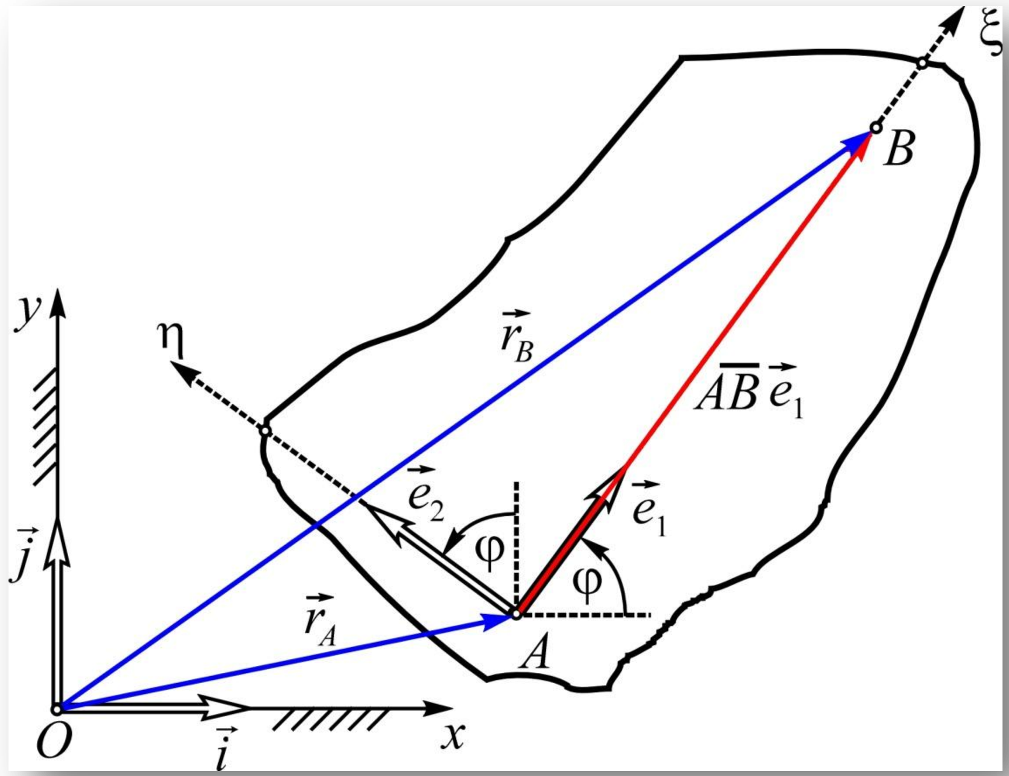
$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A}$$

76. Određivanje ubrzanja tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje



$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BN}^{A} + \vec{a}_{BT}^{A}}$$

Međusobno upravni jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $\eta A\xi$, vezanog za telo, su $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$.



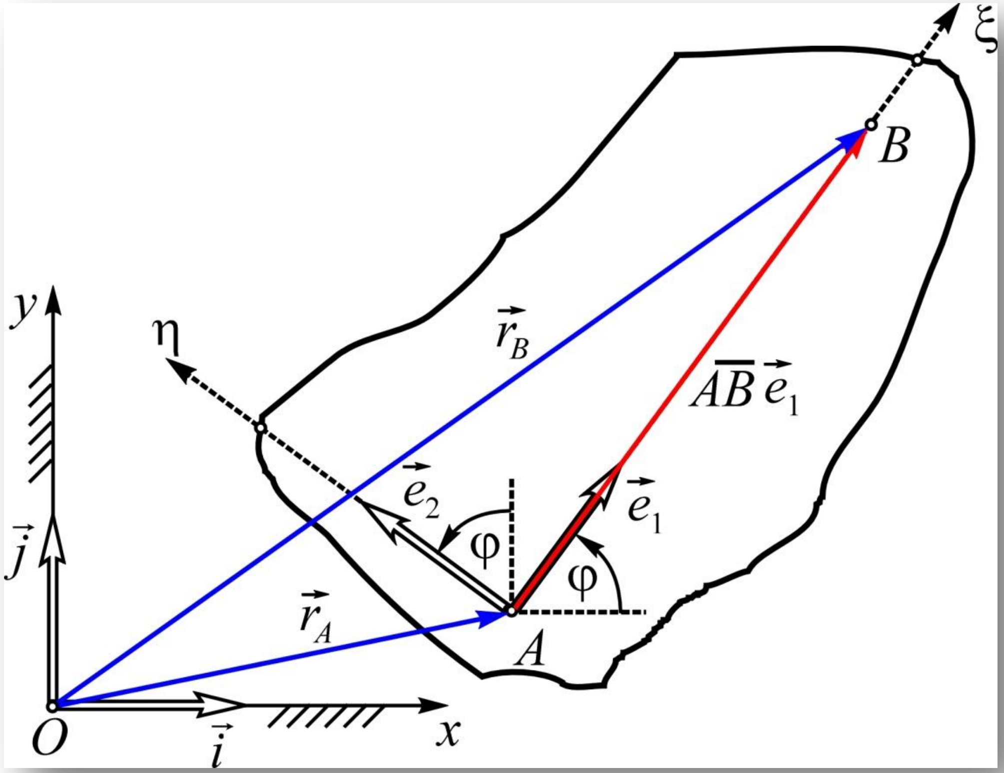
Ovi jedinični vektori su promenljivi i za nalaženje njihovih izvoda po vremenu izrazimo ih preko jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

$$\vec{e}_1 = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$
$$\vec{e}_2 = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$
$$\dot{\vec{e}}_1 = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j}$$
$$\dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_2,$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi}\vec{e}_1$$

Jednakost koja tokom vremena povezuje vektore položaja tačaka A i B:

$$\boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}\,\vec{e}_1}$$



Prvi izvod ove jednakosti daje (prvi izvod vektora položaja je vektor brzine):

$$\frac{d}{dt}\Big|\,\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}\,\vec{e}_1 \Rightarrow$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\vec{e}}_1,$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2,\ \underline{\underline{\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A}}$$

$$\boxed{\vec{V}_B^A = \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2}$$

Prvi izvod dobijene jednakosti daje (prvi izvod vektora brzine je vektor ubrzanja):

$$\frac{d}{dt}\Big|\,\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2 + \overline{AB}\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{e}}_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2 + \left(-\overline{AB}\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1, \quad \underline{\underline{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BT}^A + \vec{a}_{BN}^A}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_{BT}^A &= \overline{AB}\,\ddot{\varphi}\vec{e}_2 \\ \vec{a}_{BN}^A &= \left(-\overline{AB}\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_1 \end{aligned}}$$

$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AT}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{A}}$$

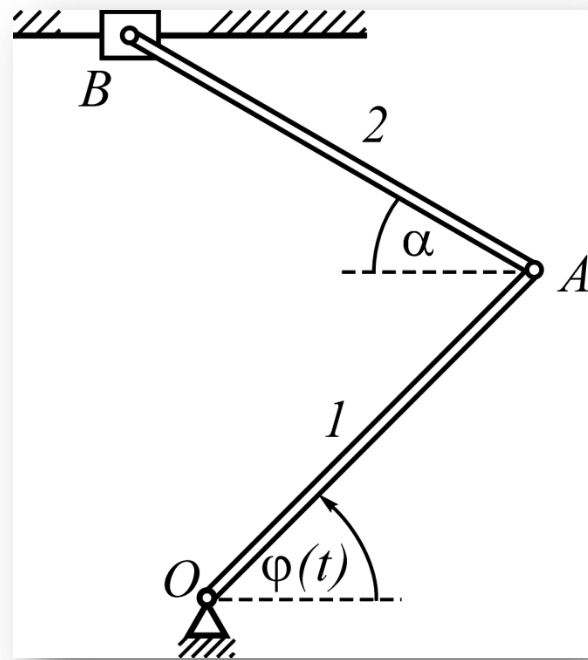
Podsetimo se da je vektor u ravni određen sa dva podatka, dve projekcije, koje određuju:

Intenzitet
Pravac
Smer

Šta znači kad pri izradi zadatka neki vektor u vektorskoj jednačini podvučemo jednom ostaje još jedna nepoznata.

Primer 2.5

Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *1* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *2* (štapa *AB*), zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *1*. Tačka *B* elementa *2* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

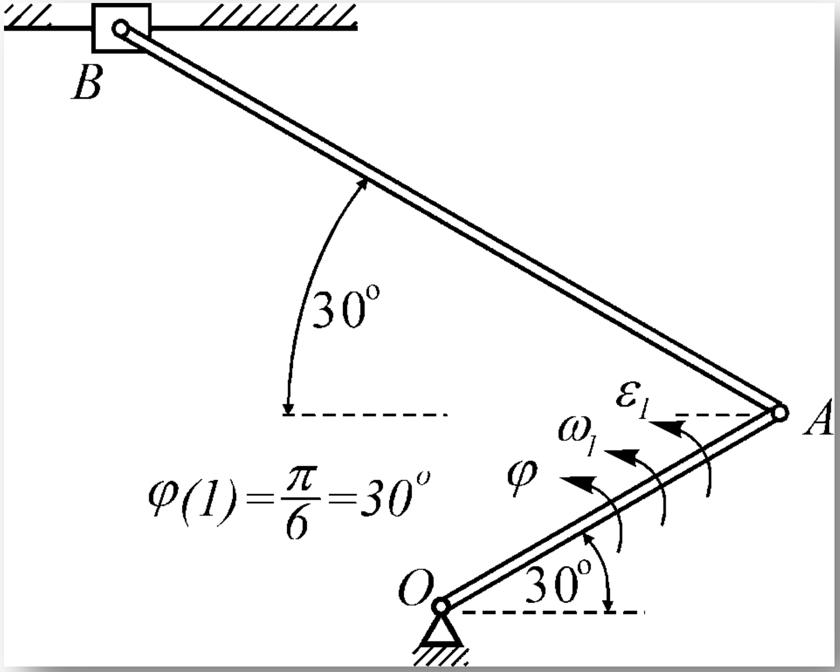


$$\varphi(t) = t^2 - t + \pi/6 \quad \varphi[rad], t[s];$$

$$\overline{OA} = 1\,m;\ \overline{AB} = 2\,m;\ \alpha = 30^0;\ \bar{t} = 1\,s.$$

Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *1* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzinu i ubrzanje tačke *B* kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *2*?

Položaj sistema u trenutku $\bar{t} = 1\,s$ za zadate podatke prikazan je na slici:



Ugaona brzina i ugaono ubrzanje elementa 1

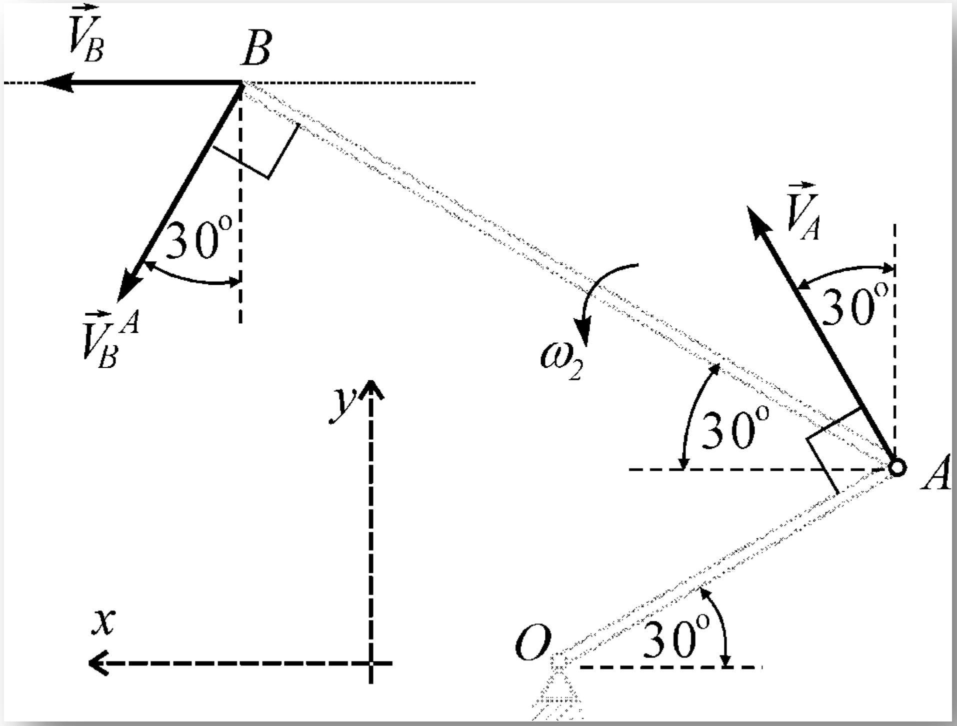
$$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1\,s^{-1},$$

$$\ddot{\varphi}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 2\,s^{-2}.$$

Analiza brzina

Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, vektor brzine te tačke, prikazan na slici, u potpunosti je poznat. Njegov intenzitet je:

$$\boxed{V_A = \overline{OA}\cdot\omega_1 = 1\frac{m}{s}.}$$



Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom vektorske formule pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 2 i intenzitet brzine tačke *B*:

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A}, \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega_2 = 2\omega_2$$

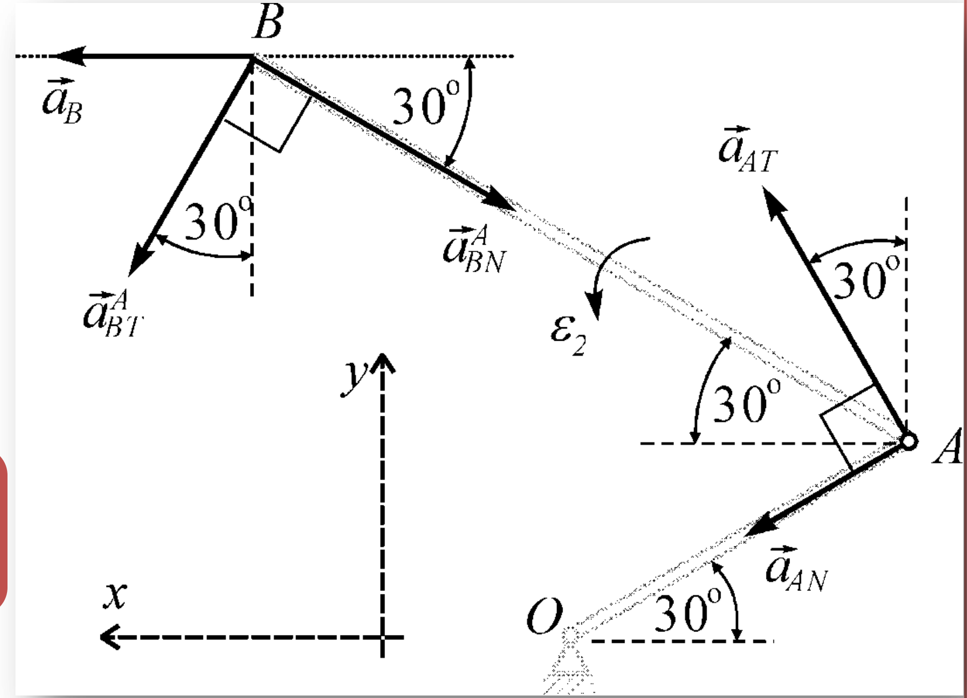
$$y:\quad 0 = 1\cdot\cos 30^0 - 2\omega_2\cdot\cos 30^0 \;\Rightarrow\; \omega_2 = \frac{1}{2}\,s^{-1}$$

$$x:\quad V_B = 1\cdot\sin 30^0 + 2\omega_2\cdot\sin 30^0 \;\Rightarrow\; V_B = 1\,\frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke *B* je horizontalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu.

Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka, samim tim i za smer ugaone brzine ω_2. Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω_2 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja



Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja, prikazane na slici, u potpunosti su poznate. Njihovi intenziteti su:

$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_1^2 = 1\,\frac{m}{s^2},\qquad a_{AT} = \overline{OA}\cdot\varepsilon_1 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

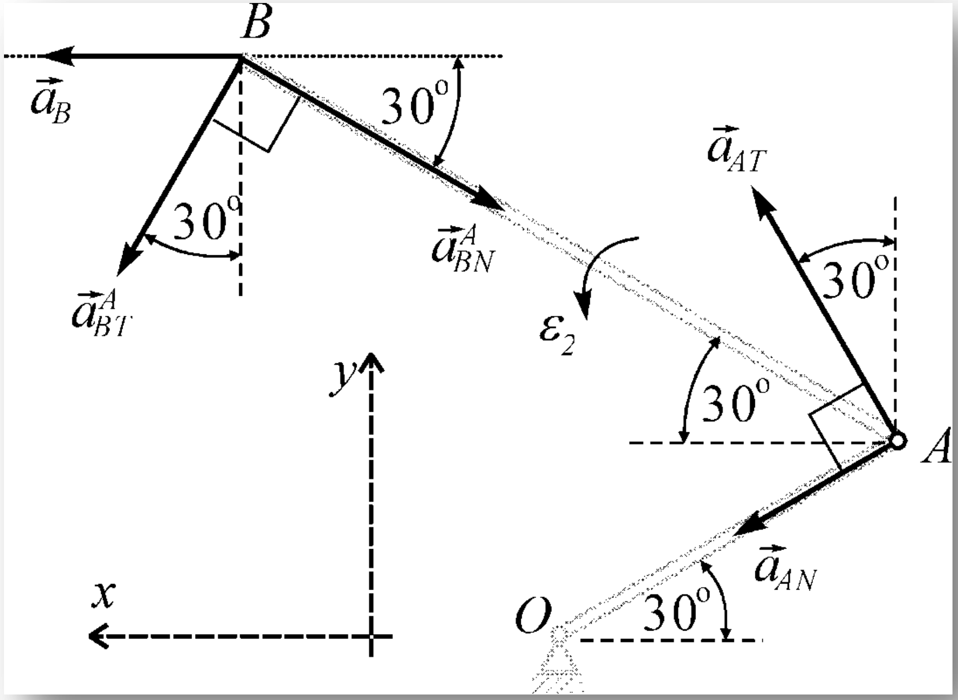
Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom vektorske formule pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje elementa 2 i intenzitet ubrzanja tačke *B*:

$$\underline{\vec a_B} = \underline{\underline{\vec a_{AN}}} + \underline{\underline{\vec a_{AT}}} + \underline{\underline{\vec a_{BN}^A}} + \underline{\vec a_{BT}^A}\qquad a_{BT}^A = \overline{AB}\cdot\varepsilon_2 = 2\varepsilon_2,\quad a_{BN}^A = \overline{AB}\cdot\omega_2^2 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$y:\ 0 = -1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 2\varepsilon_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,s^{-1}$$

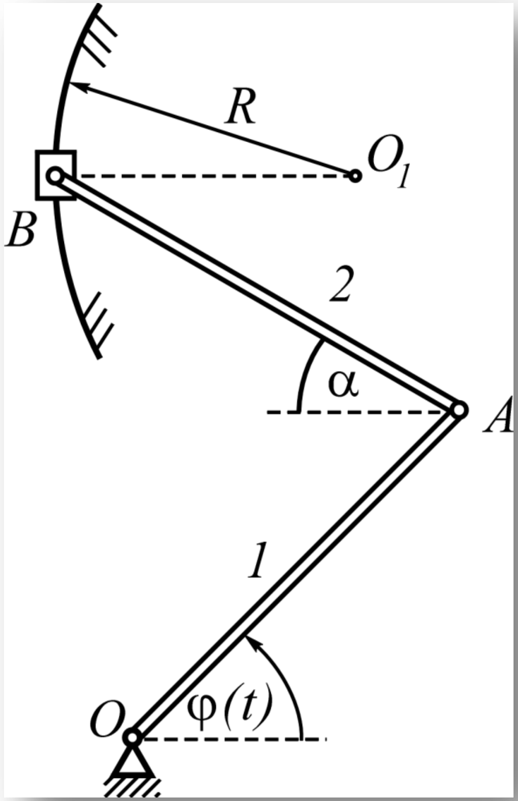
$$x:\ a_B = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\ \Rightarrow a_B = 2-\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke B je horizontalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε_2). Zbog činjenice da su rešenja za a_B i ε_2 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 30^o$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\cos 30^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.



Primer 2.6

Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *1* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *2* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *1*. Tačka *B* elementa *2* se kreće po kružnoj putanji poluprečnika $R = 1\,m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su:



$$\varphi(t) = t^2 - t + \pi/4 \quad \varphi[rad],$$

$$t[s];\ \overline{OA} = 2\,m;\ \overline{AB} = 2\,m;\ \alpha = 45^0;\ \bar{t} = 1\,s.$$

Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *1* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzinu i ubrzanje tačke *B* kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje elementa *2*?

Položaj sistema u trenutku $\bar{t} = 1\,s$ za zadate podatke:

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje elementa 1

$$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1,\ \dot{\varphi}(1) = 1,\ \omega_1 = 1\ s^{-1}, \qquad \ddot{\varphi}(t) = 2,\ \ddot{\varphi}(1) = 2,\ \varepsilon_1 = 2\ s^{-2}$$

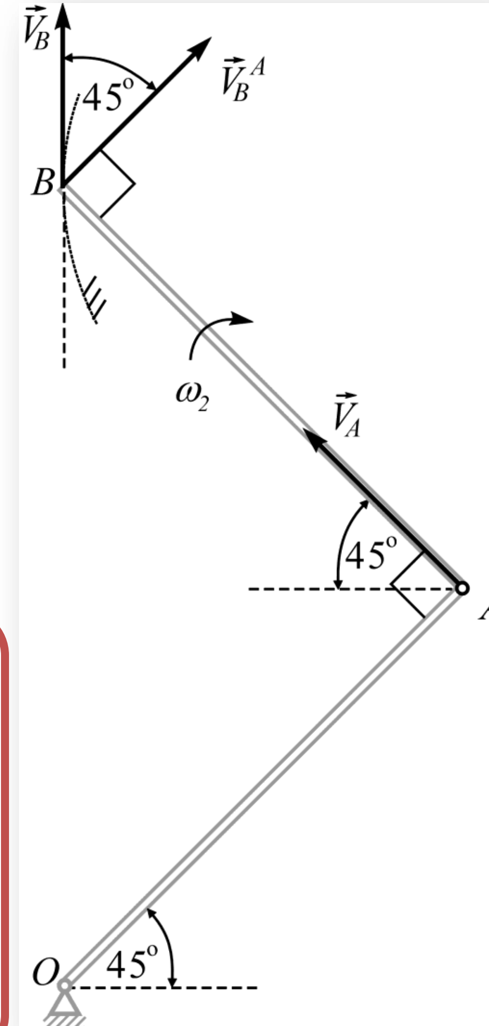
Analiza brzina

Zbog pripadnosti tačke A elementu 1 koji se obrće oko nepomične ose, vektor brzine te tačke u potpunosti je poznat. Intenzitet je:

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_1 = 2\frac{m}{s} \qquad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_B^A, \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 2\omega_2$$

$$x: \quad 0 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\omega_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 1\,s^{-1}$$

$$y: \quad V_B = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = 2\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke B je vertikalan, tačka B kreće po kružnoj putanji čija je tangenta u tom trenutku vertikalna, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše. I za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_2). Zbog činjenice da su rešenja za ω_2 i V_B pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Pošto element 2 vrši ravno kretanje primenom ve-ktorke formule, pa njenim projektovanjem na ko-ordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje elementa 2 i intenzitet tangencijane komponente ubrzanja tačke V:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{AT}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{A}}$$

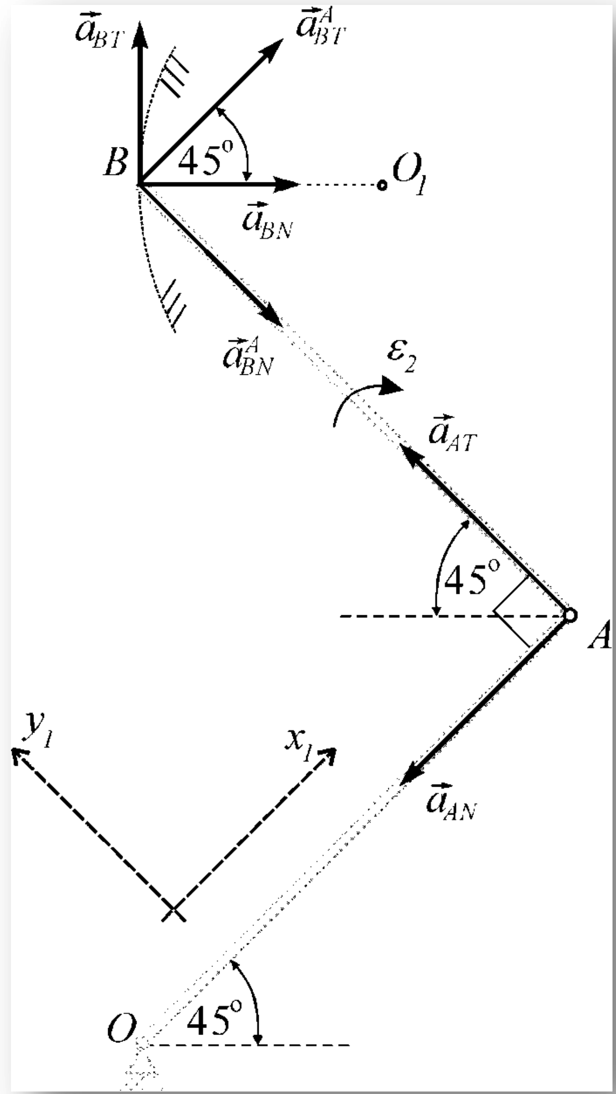
$$a_{BN}^{A} = \overline{AB} \cdot \omega_2^{\,2} = 2\,\frac{m}{s^2} \quad a_{BT}^{A} = \overline{AB} \cdot \varepsilon_2 = 2\varepsilon_2$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^{\,2}}{R} = 8\,\frac{m}{s^2}$$

$$y_1 : -8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a_{BT}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 + 4 - 2 + 0 \;\Rightarrow a_{BT} = 8 + 2\sqrt{2}\,\frac{m}{s^2}$$

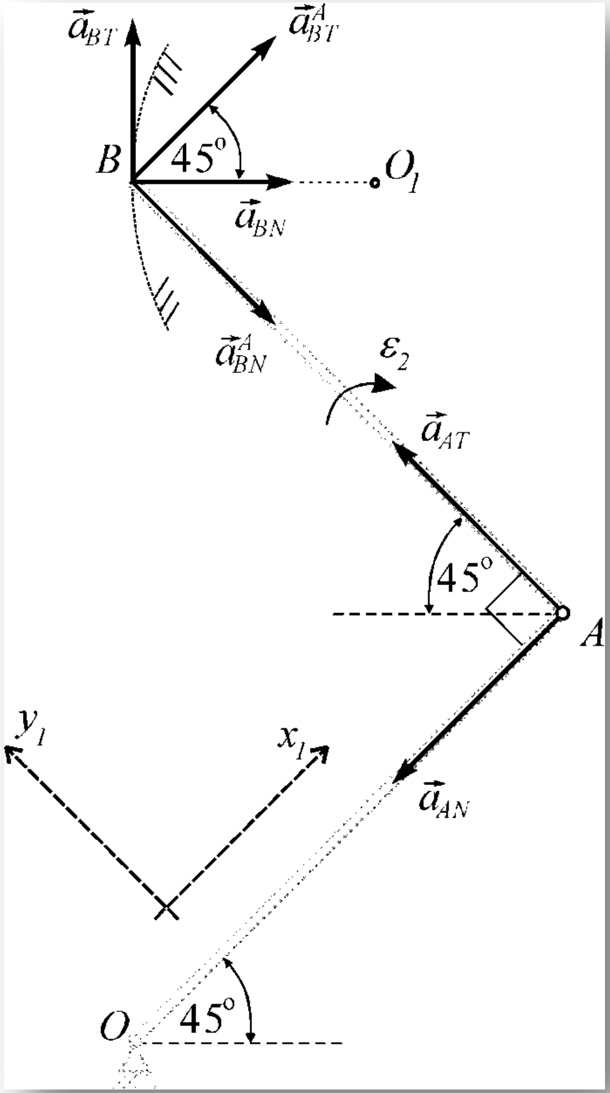
$$x_1 : 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(8 + 2\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + 0 + 0 + 2\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 2 + 4\sqrt{2}\;s^{-1}$$



Vektor ubrzanja tačke B se morao razložiti na normalnu i tangencijalnu komponentu, pošto se tačka B kreće po kružnoj putanji.

Normalna komponenta $\vec{a}_{BN}$ mora biti usmerena ka centru kruga O_1 kružne putanje tačke B, dok tangencijalna komponenta $\vec{a}_{BT}$ mora imati pravac tangente kod koje je, po pretpostavci, usvojen smer naviše. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε_2). Zbog činjenice da su rešenja za ubrzanja ε_2 i $\vec{a}_{BT}$ pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\cos 45^0$ i $\sin 45^0$ pisano je $\sqrt{2}/2$. Na kraju, pošto se znaju intenziteti međusobno upravnih komponenata ubrzanja $\vec{a}_B$, njegov intenzitet je:



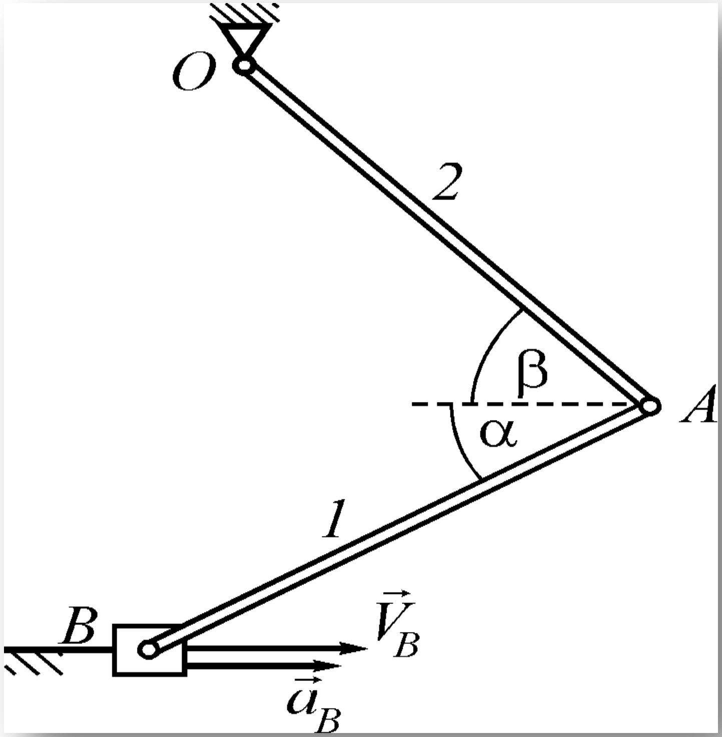
$$a_B = \sqrt{a_{BN}{}^2 + a_{BT}{}^2} = \sqrt{8^2 + \left(8 + 2\sqrt{2}\right)^2}\ \frac{m}{s^2}$$

Primer 2.7

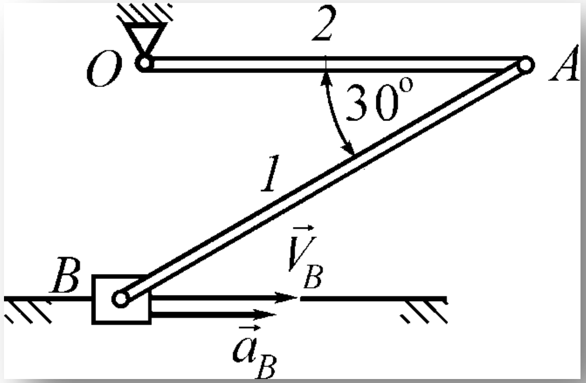
Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *2* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *1* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *2*. Tačka *B* elementa *1* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski. Podaci su:

$$V_B = 2\frac{m}{s},\ a_B = 1\frac{m}{s^2},\ \overline{OA} = 1\,m,$$
$$\overline{AB} = 1\,m,\ \alpha = 30^0,\ \beta = 0.$$

Nacrtati sistem u razmeri, poštujući zadate dužine i uglove i odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja elemenata *1* i *2*?

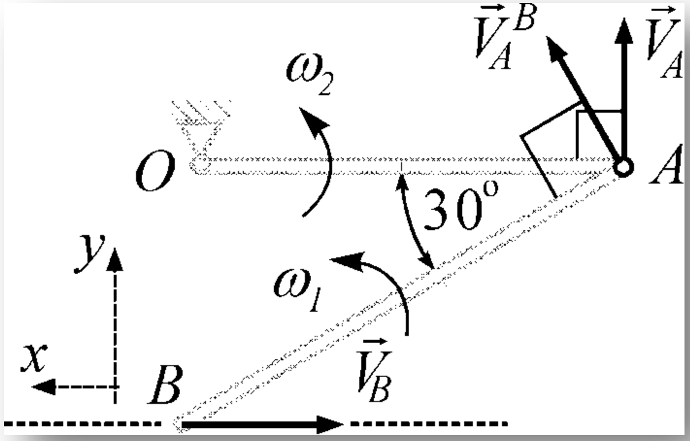


Položaj sistema za zadate podatke prikazan je na slici:



Analiza brzina

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorske formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 1 i intenzitet brzine tačke A:



$$\underline{\vec{V}_A} = \underline{\underline{\vec{V}_B}} + \underline{\vec{V}_A^B} \qquad V_A^B = \overline{AB}\cdot\omega_1 = 1\cdot\omega_1$$

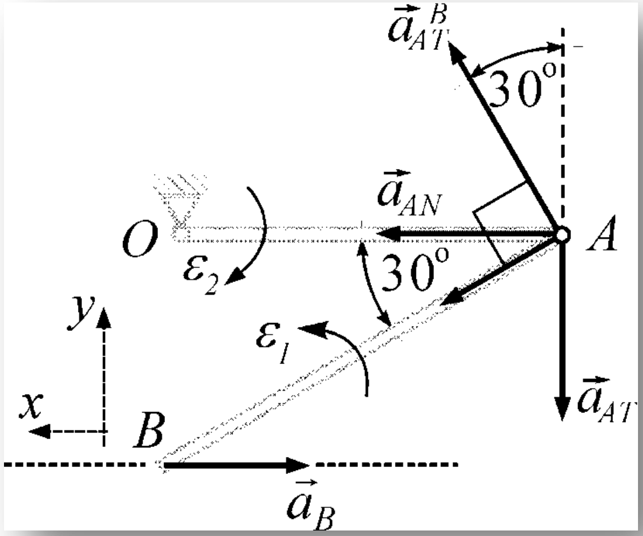
$$x: \quad 0 = -2 + 1\cdot\omega_1\cdot 0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \omega_1 = 4\ s^{-1}$$

$$y: \quad V_A = 0 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow \omega_2 = \frac{V_A}{\overline{OA}} = 2\sqrt{3}\ s^{-1}$$

Zbog pripadnosti tačke A elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, vektoru brzine te tačke, prikazanom na slici, poznat je pravac, smer je pretpostavljen, dok mu je intenzitet nepoznat, pošto ga određuje formula $V_A = \overline{OA}\cdot\omega_2$, u kojoj je ugaona brzina ω_2 nepoznata. Za smer vektora $\vec{V}_A^B$ učinjena je pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_1). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω_1 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorske formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona ubrzanja elemenata 1 i 2:



$$\underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\vec{a}_{AT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{B}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{B}_{AN}}} + \underline{\vec{a}^{B}_{AT}}$$

$$x: 12+0=-1+16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\varepsilon_1\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \varepsilon_1 = 26-16\sqrt{3}\ s^{-1}$$

$$y: 0-\overline{OA}\cdot\varepsilon_2 = 0-16\cdot\frac{1}{2}+\left(26-16\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 32-13\sqrt{3}\ s^{-2}$$

$$a^{B}_{AT} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_1 = 1\cdot\varepsilon_1$$

$$a^{B}_{AN} = \overline{AB}\cdot\omega_1^{\,2} = 16\ \frac{m}{s^2}$$

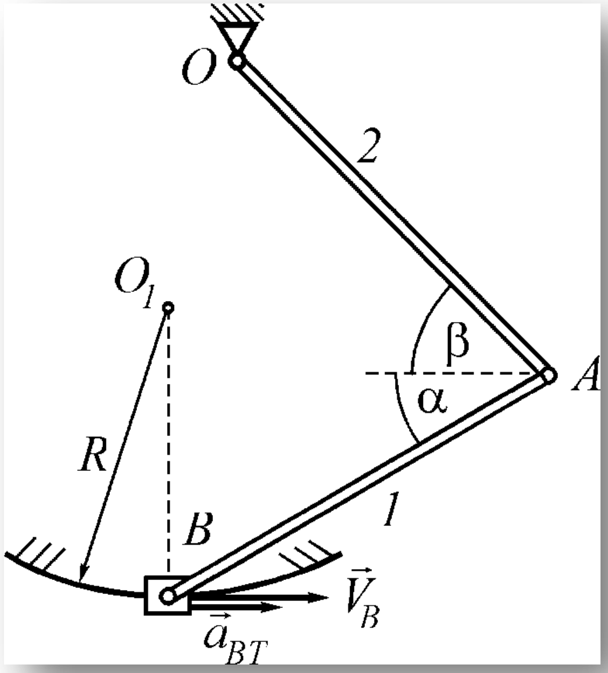
$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_2^{\,2} = 12\ \frac{m}{s^2}$$

Zbog pripadnosti tačke *A* elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke, prikazane na slici, su $\vec{a}_{AN}$ i $\underline{\vec{a}_{AT}}$. Intenzitet komponente $\vec{a}_{AT}$ je nepoznat, s obzirom da ga određuje formula $a_{AT} = OA\cdot\varepsilon_2$ koja sadrži nepoznatu ε_2. Za smerove vektora $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}^{B}_{AT}$ učinjene su pretpostavke. Zbog činjenice da su rešenja za ε_2 i ε_1 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 30^0$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\cos 30^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.

Primer 2.8

Mehanički sistem, prikazan na slici, sačinjen je od elementa *2* (štapa *OA*), koji vrši obrtanje oko zgloba *O*, i elementa *1* (štapa *AB*) zglobno vezanog u tački *A* sa elementom *2*. Tačka *B* elementa *1* se kreće po kružnoj putanji poluprečnika $R=1m$. Podaci su:

$$V_B = 1\frac{m}{s},\ a_{BT} = 2\frac{m}{s^2},\ \overline{OA} = 2\ m,$$
$$\overline{AB} = 2\ m,\ \alpha = 30^0,\ \beta = 60^0.$$



Nacrtati sistem u razmeri, poštujući zadate dužine i uglove i odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja elemenata *1* i *2*?

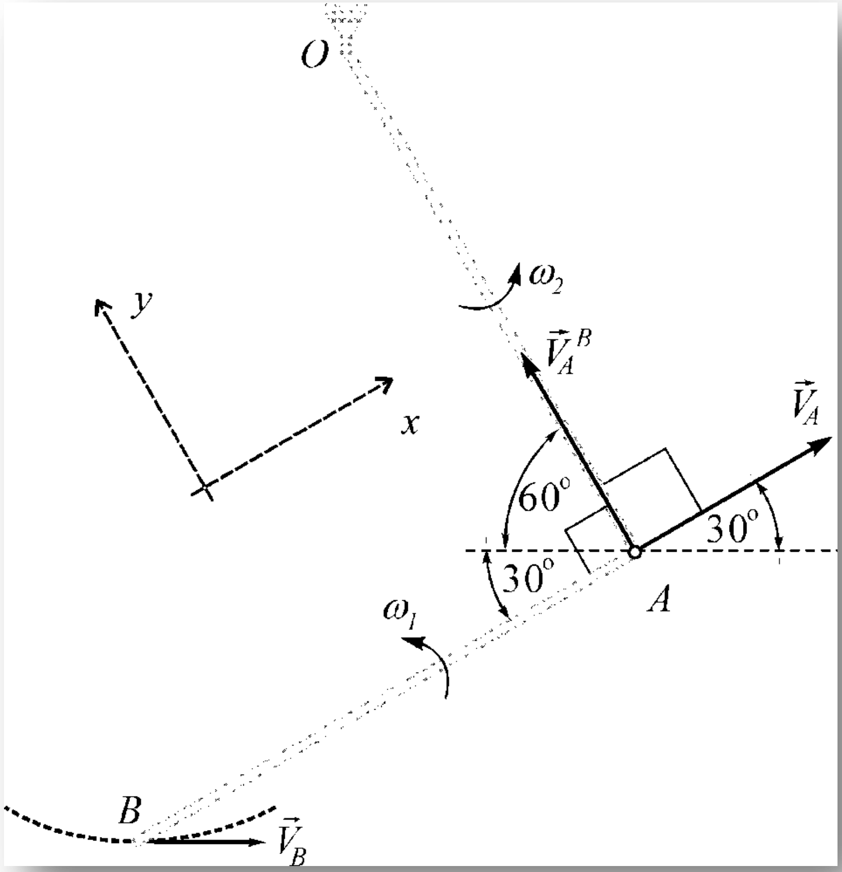
Analiza brzina

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorke formule, pa njenim projektovanjem na kordinatne ose dobiće se ugaona brzina elementa 1 i intenzitet brzine tačke *A*:

$$\underline{\vec{V}_A} = \underline{\underline{\vec{V}_B}} + \underline{\vec{V}_A^B} \qquad V_A^B = \overline{AB}\cdot\omega_1 = 2\cdot\omega_1$$

$$x: \quad V_A = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \qquad \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_A}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, s^{-1}$$

$$y: \quad 0 = -1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\omega_1 \qquad \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{4}\, s^{-1}$$

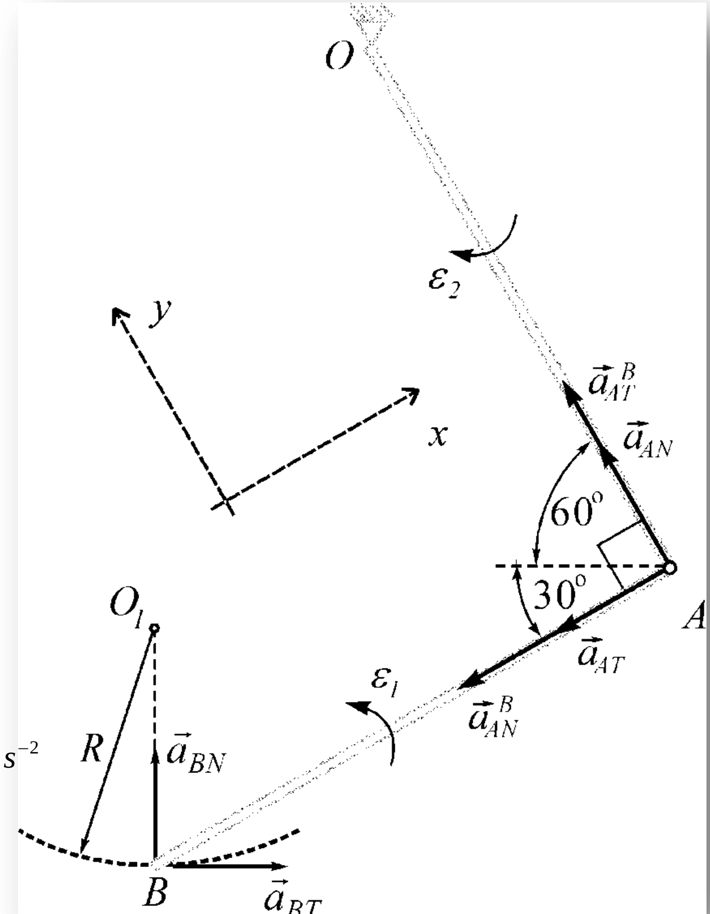


Zbog pripadnosti tačke *A* elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, vektoru brzine te tačke, prikazanom na slici, poznat je pravac, smer je pretpostavljen, dok mu je intenzitet nepoznat, pošto ga određuje formula, $V_A = \overline{OA}\cdot\omega_2$ u kojoj je ugaona brzina ω_2 nepoznata.

Za smer vektora $\vec{V}_A^B$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω_1). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω_1 pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Analiza ubrzanja

Pošto element 1 vrši ravno kretanje primenom vektorske formule, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaona ubrzanja elemenata 1 i 2:



$$\underline{\underline{\vec{a}_{AN}}} + \underline{\vec{a}_{AT}} = \underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}}} + \underline{\underline{\vec{a}^{B}_{AN}}} + \underline{\vec{a}^{B}_{AT}}$$

$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega_2^{\,2} = \frac{3}{8}\,\frac{m}{s^2} \qquad a^{B}_{AT} = \overline{AB}\cdot\varepsilon_1 = 2\cdot\varepsilon_1$$

$$a_{BN} = \frac{V_B^{\,2}}{R} = 1\,\frac{m}{s^2} \qquad a^{B}_{AN} = \overline{AB}\cdot\omega_1^{\,2} = \frac{1}{8}\,\frac{m}{s^2}$$

$$x:\quad 0 - a_{AT} = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} + 0 \qquad \Rightarrow a_{AT} = -\left(\frac{3}{8} + \sqrt{3}\right)\frac{m}{s^2},$$

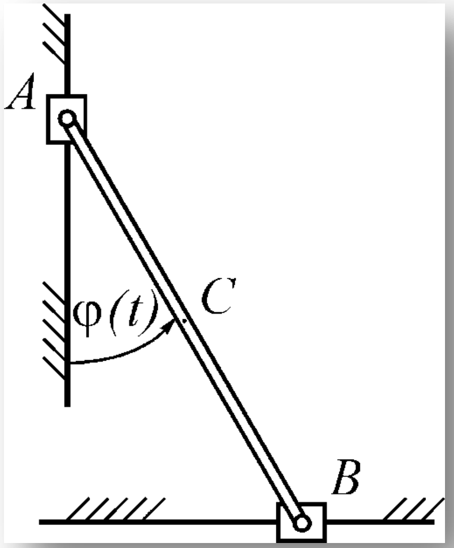
$$y:\quad \frac{3}{8} + 0 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 0 + 2\varepsilon_1 \qquad \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{11}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}\,s^{-2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_{AT}}{\overline{OA}} = -\left(\frac{3}{16} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s^{-2}$$

Zbog pripadnosti tačke A elementu 2 koji se obrće oko nepomične ose, komponente vektora ubrzanja te tačke su $\vec{a}_{AN}$ i $\vec{a}_{AT}$. Intenzitet komponente $\vec{a}_{AT}$ je nepoznat, s obzirom da ga određuje formula $a_{AT} = \overline{OA}\cdot\varepsilon_2$ koja sadrži nepoznatu ε_2. Za smerove vektora $\vec{a}^{B}_{AT}$ i ε_2 učinjene su pretpostavke. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_{AT}$ i ε_1 pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Primer 2.9

Štap *AB*, prikazan na slici vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

$$\varphi(t)=t^2-3t+2 \quad \varphi[rad],t[s];\ \overline{AB}=2\,m;\ \bar{t}=1\,s.$$



Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A*, *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) u tom položaju?

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje:

$$\dot{\varphi}(t) = 2t - 3 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega = 1\, s^{-1}, \quad \ddot{\varphi}(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 2\, s^{-2}.$$

U datom trenutku štap se nalazi u vertikalnom položaju.

Ugaona brzina je, zbog predznaka -, smera suprotnog od porasta ugla rotacije a ugaono ubrzanje je, zbog predznaka +, istog smera kao što je porast ugla rotacije.

Analiza brzina

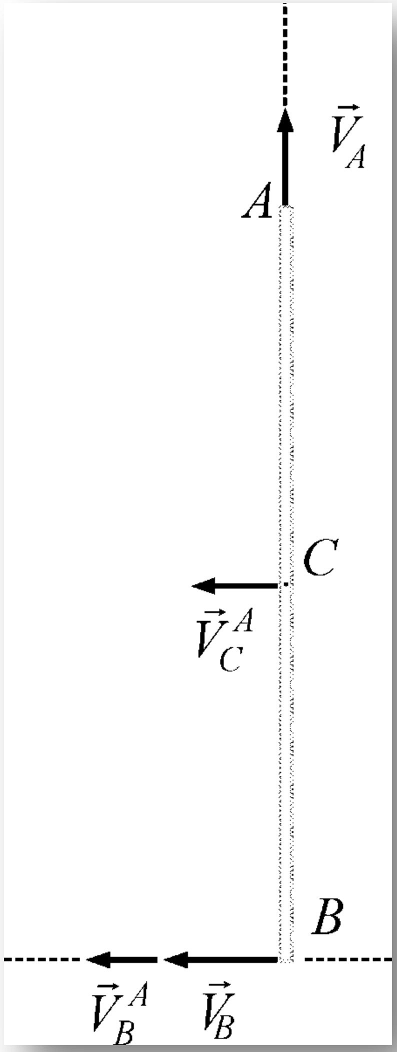
Vektor brzine tačke *B* je horizontalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu.

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\underline{\vec{V}_B^A}} \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2$$

$$y: \quad 0 = V_A + 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 0$$

$$x: \quad -V_B = 0 - 2 \quad \Rightarrow \quad V_B = 2\,\frac{m}{s}$$

Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše. Zbog činjenice da je rešenja za V_B pozitivnog predznaka, tačna je pretpostavka o smeru tog vektora.



Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - 1 = -1$$

$$y: \quad V_{Cy} = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\;2} + V_{Cy}^{\;2}} = 1\,\frac{m}{s}$$

Ovde je zbog $V_A = 0$, vektor $\vec{V}_C$ isti kao i vektor $\vec{V}_C^A$.

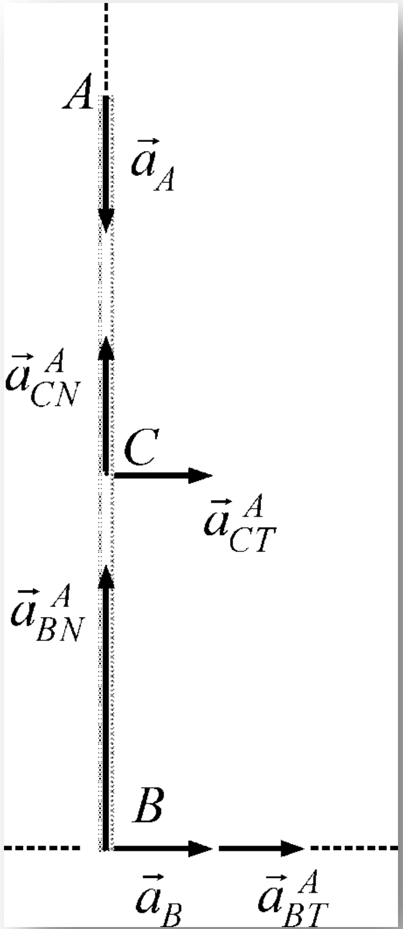
Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorske formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se intenziteti ubrzanja tačaka A i B:

$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}^A}}, \quad a_{BT}^A = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 4\,\frac{m}{s^2},\ a_{BN}^A = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}.$$

$$x: \quad a_B = 0+0+4 \quad \Rightarrow a_B = 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$y: \quad 0 = -a_A + 2 + 0 \quad \Rightarrow a_A = 2\,\frac{m}{s^2}$$



Vektor ubrzanja tačke B je horizontalnog pravca, pošto se tačka B kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu.

Vektor ubrzanja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_B$ i $\vec{a}_A$ pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

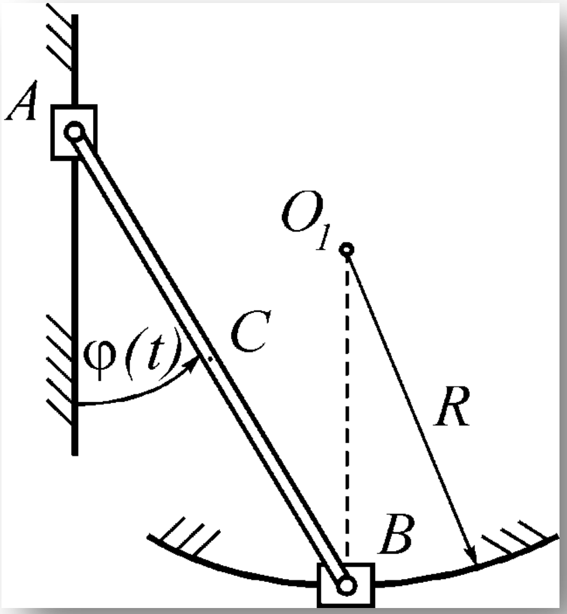
$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^A}} \qquad a_{CN}^A = \overline{AC}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$\begin{aligned} x: &\quad a_{Cx} = 0+0+2 = 2 \\ y: &\quad a_{Cy} = -2+1+0 = -1 \end{aligned} \Rightarrow a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{5}\,\frac{m}{s^2} \qquad a_{CT}^A = \overline{AC}\cdot\varepsilon = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Primer 2.10

Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se, posredstvom klizača, kreće po kružnoj putanji poluprečnika $R = 1\ m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su:

$$\varphi(t) = t^2 - t + \pi/6 \quad \varphi[rad], t[s]; \ \overline{AB} = 2\ m; \ \bar{t} = 1\ s.$$



Na osnovu zadatog ugla rotacije $\varphi(t)$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A*, *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) u tom položaju?

Ugaona brzina:

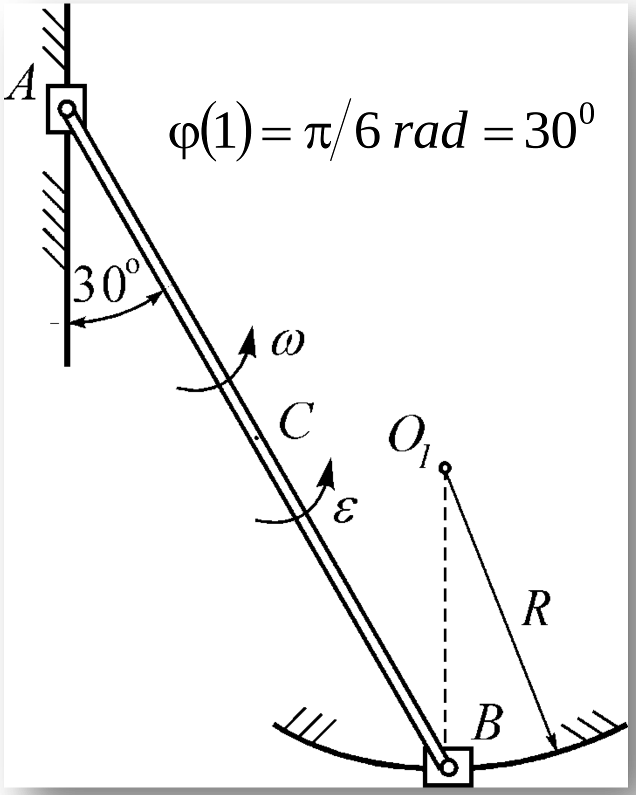
$$\dot{\varphi}(t) = 2t - 1 \Rightarrow \dot{\varphi}(1) = 1$$
$$\Rightarrow \quad \omega = 1\, s^{-1}$$

Ugaono ubrzanje:

$$\ddot{\varphi}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{\varphi}(1) = 2 \Rightarrow \varepsilon = 2\, s^{-2}.$$

Zbog $\dot{\varphi}(1) > 0$, ugaona brzina štapa ima isti smer kao što je porast ugla rotacije

Zbog $\ddot{\varphi}(1) > 0$, ugaono ubrzanje štapa ima isti smer kao što je porast ugla rotacije

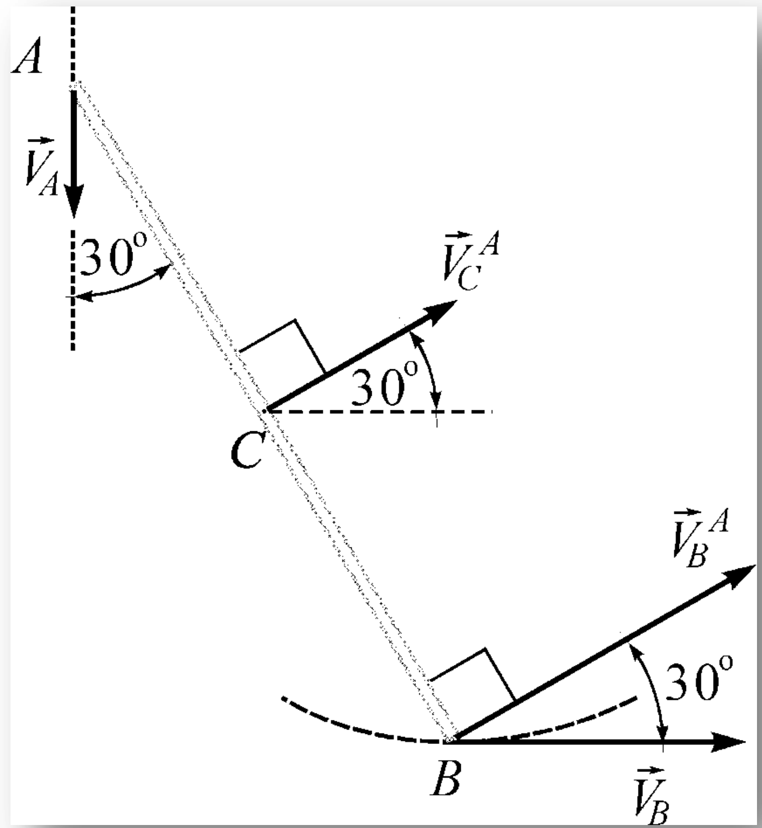


Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\underline{\vec{V}_B^A}} \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2$$

$$y: \quad 0 = -V_A + 2\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_B = 0 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke *B* je horizontalnog pravca, pošto on mora biti u pravcu tangente na putanju, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu. Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže.

Zbog činjenice da su rešenja za V_A i V_B pozitivnog predznaka, tačne su pretpostavke o smerovima tih vektora.

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC}\cdot\omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y: \quad V_{Cy} = -1 + 1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\,2} + V_{Cy}^{\,2}} = 1\,\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

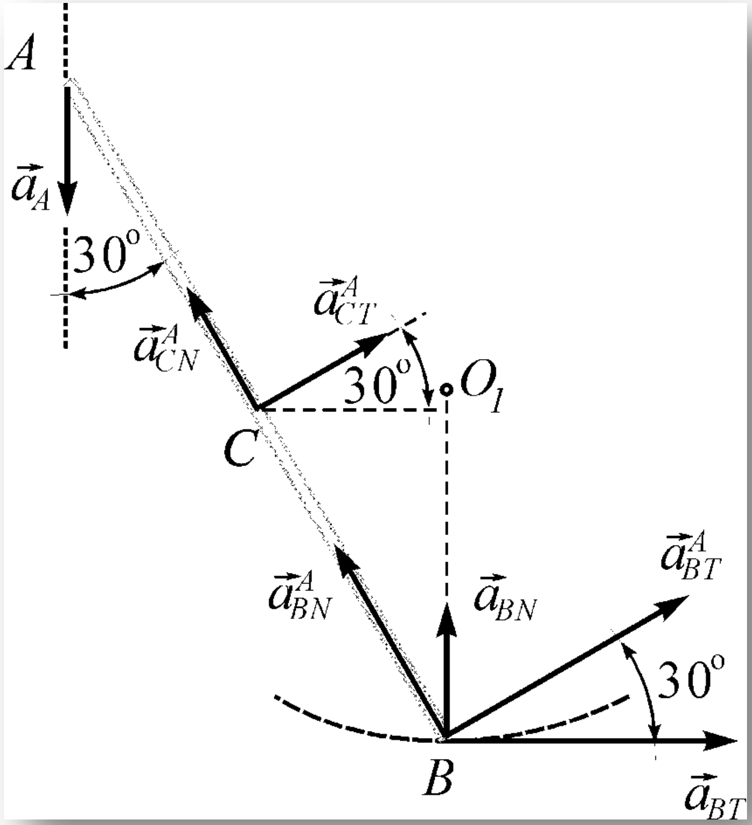
$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}^A}} \qquad a_{BN} = \frac{V_B^{\ 2}}{R} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BN}^A = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2} \qquad a_{BT}^A = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: 0 + a_{BT} = 0 - 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_{BT} = 2\sqrt{3} - 1\,\frac{m}{s^2}$$

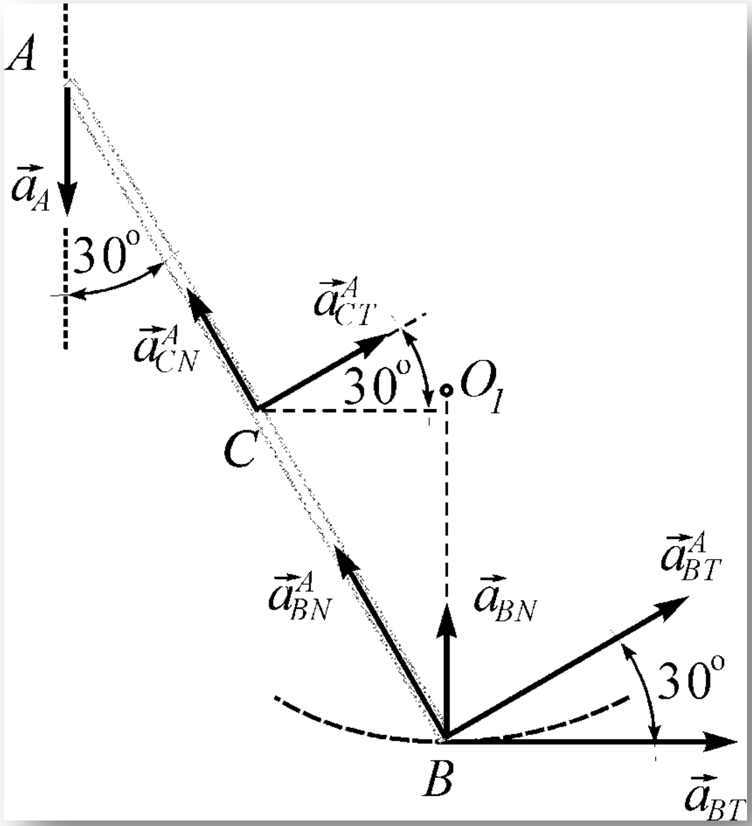
$$y: 3 + 0 = -a_A + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow a_A = \sqrt{3} - 1\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_B = \sqrt{a_{BN}^{\ 2} + a_{BT}^{\ 2}}$$



Pošto je putanja tačke *B* kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Smer tangencijalne komponente ubrzanja tačke *B* je, po pretpostavci, u desnu stranu. Vektor ubrzanja tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Zbog činjenice da su rešenja za $\vec{a}_{BT}$ i $\vec{a}_A$ predznaka +, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C



$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}^A_{CN}}} + \underline{\underline{\vec{a}^A_{CT}}}$$

$$a^A_{CN} = \overline{AC}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2},\ a^A_{CT} = \overline{AC}\cdot\varepsilon = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$x : a_{Cx} = 0 - 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

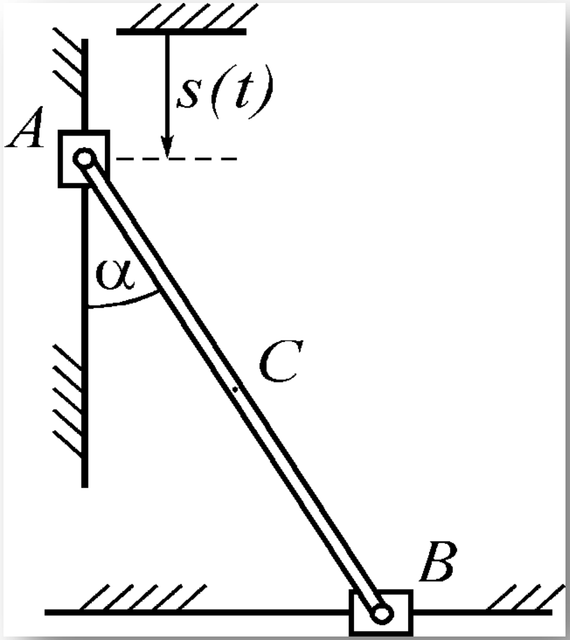
$$y : a_{Cy} = -\left(\sqrt{3}-1\right) + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2}$$

Primer 2.11

Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B*, posredstvom klizača, kreće se pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

$$s(t) = 2t^2 - 3t \quad s[m], t[s]; \overline{AB} = 2\,m; \alpha = 45^0; \bar{t} = 1\,s.$$

Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke *A* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju.



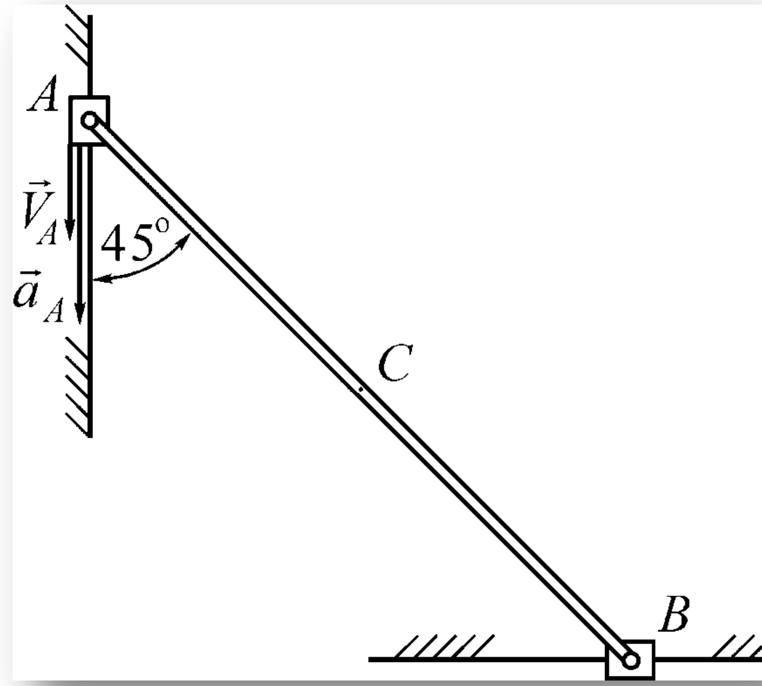
Brzina i ubrzanje tačke A

$$\dot{s}(t) = 4t - 3 \Rightarrow \dot{s}(1) = 1 \Rightarrow V_A = 1\frac{m}{s}$$

$$\ddot{s}(t) = 4 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 4 \Rightarrow a_A = 4\frac{m}{s^2}$$

Smerovi vektora brzine i ubrzanja tačke *A* su naniže, u smeru porasta koordinate s, jer je:

$$\dot{s}(1) > 0 \quad \text{i} \quad \ddot{s}(1) > 0$$

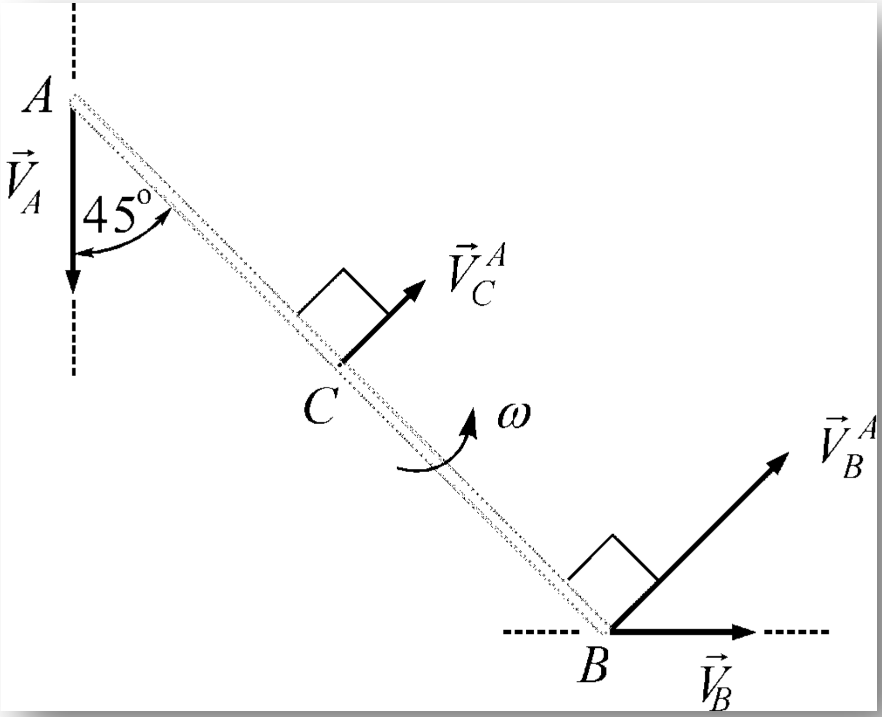


Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad V_B^A = \overline{AB}\cdot\omega = 2\omega$$

$$y:\quad 0 = -1 + 2\omega\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\, s^{-1}$$

$$x:\quad V_B = 0 + \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad V_B = 1\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke *B* je horizontalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu.

Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC}\cdot\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{s}$$

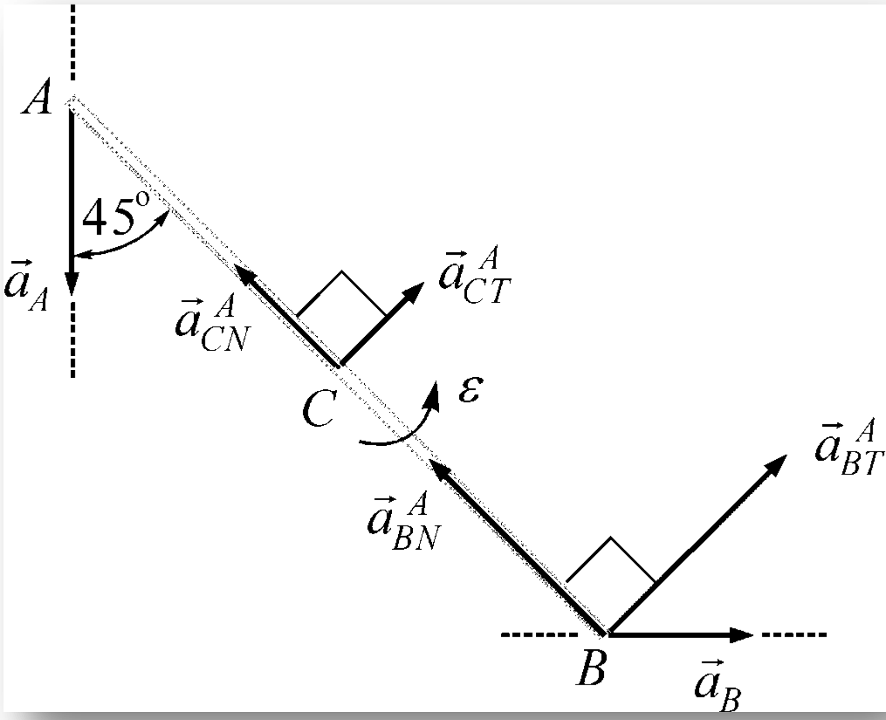
$$x:\quad V_{Cx} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y:\quad V_{Cy} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\ 2} + V_{Cy}^{\ 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

Štap vrši ravno kretanje. Primenom vektorske formule za tačke *A* i *B*, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se ugaono ubrzanje štapa i intenzitet ubrzanja tačke *B* :



$$a_{BT}^A = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\underline{\vec{a}_B} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\vec{a}_{BT}^A}$$

$$a_{BN}^A = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2}$$

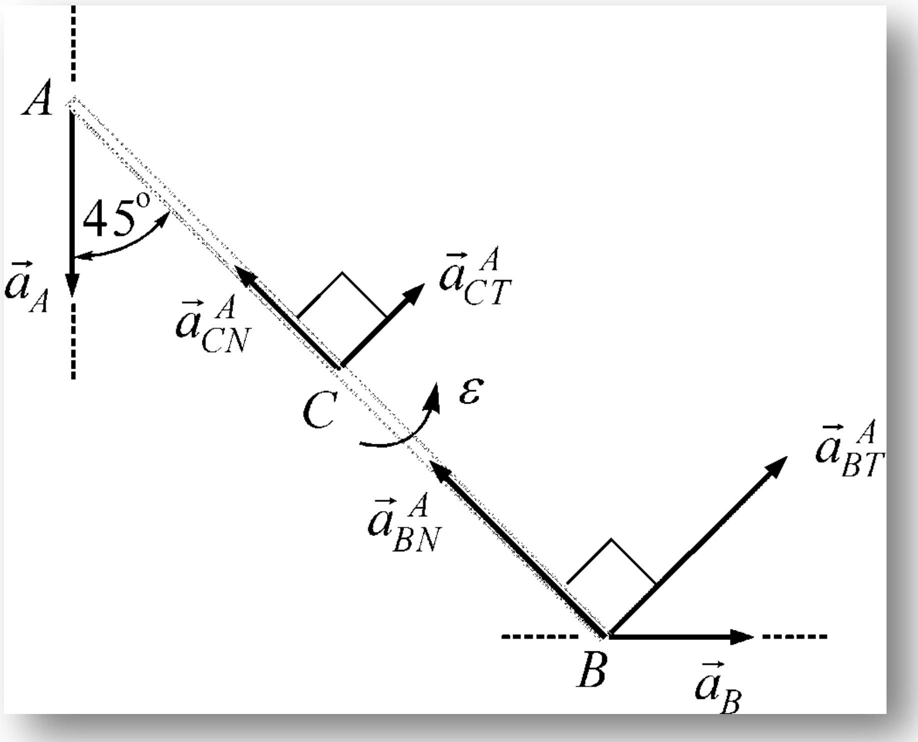
$$y:\quad 0 = -4 + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\,s^{-1}$$

$$x:\quad a_B = 0 - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(4\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a_B = 4 - \sqrt{2}\,\frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke *B* je horizontalnog pravca, pošto se tačka *B* kreće pravolinijski u horizontalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u desnu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_B i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\sin 45^0$ i $\cos 45^0$ pisana je vrednost $\sqrt{2}/2$.



Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^A}}, \qquad a_{CN}^A = \overline{AC}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m}{s^2}, \qquad a_{CT}^A = \overline{AC}\cdot\varepsilon = \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: \quad a_{Cx} = 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

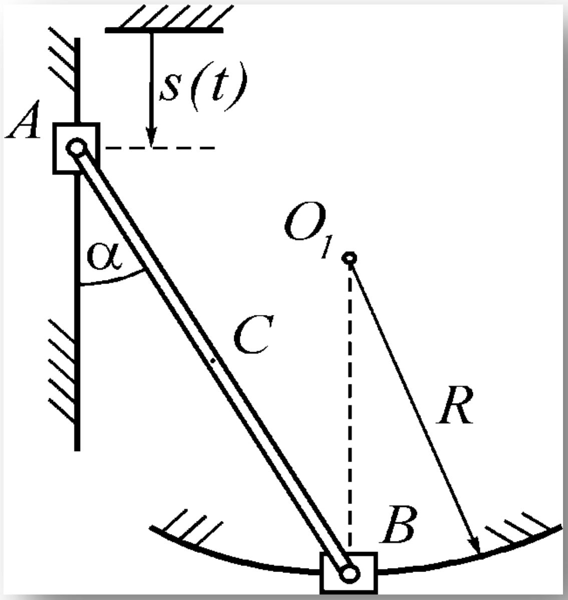
$$y: \quad a_{Cy} = -4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{a_{Cx}{}^2 + a_{Cy}{}^2}$$

Primer 2.12

Štap *AB*, prikazan na slici 2.42, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se, posredstvom klizača, kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se, posredstvom klizača, kreće po kružnoj putanji poluprečnika *R*=1m, kao što je to na slici prikazano. Podaci su:

$$\boxed{s(t)=t^2-3t \quad s[m],t[s];\ \overline{AB}=2\,m;\ \alpha=30^0;\ \bar{t}=1\,s.}$$



Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke *A* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *B* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?

Brzina i ubrzanje tačke A

$$\dot{s}(t) = 2t - 3 \Rightarrow \dot{s}(1) = -1 \Rightarrow V_A = 1\,\frac{m}{s}$$

$$\ddot{s}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 2 \Rightarrow a_A = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Smer vektora brzine tačke A je naviše, suprotno od smera porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1) < 0$.

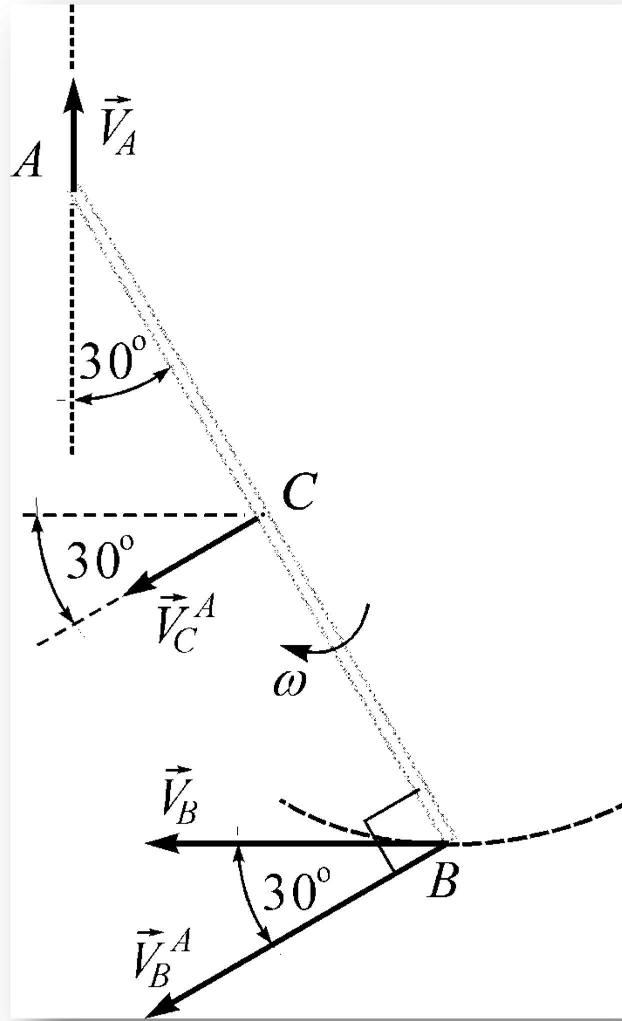
Smer vektora ubrzanja tačke A je naniže, u smeru porasta koordinate s, jer je $\ddot{s}(1) > 0$.

Analiza brzina

$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2\,\omega$$

$$y: \quad 0 = 1 - 2\omega \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 1\,s^{-1}$$

$$x: \quad -V_B = 0 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke B je horizontalnog pravca, u pravcu tangente na putanju, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, u levu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_B i ω pozitivnog predznaka, tačne su pretpostavke o smerovima.

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}}$$

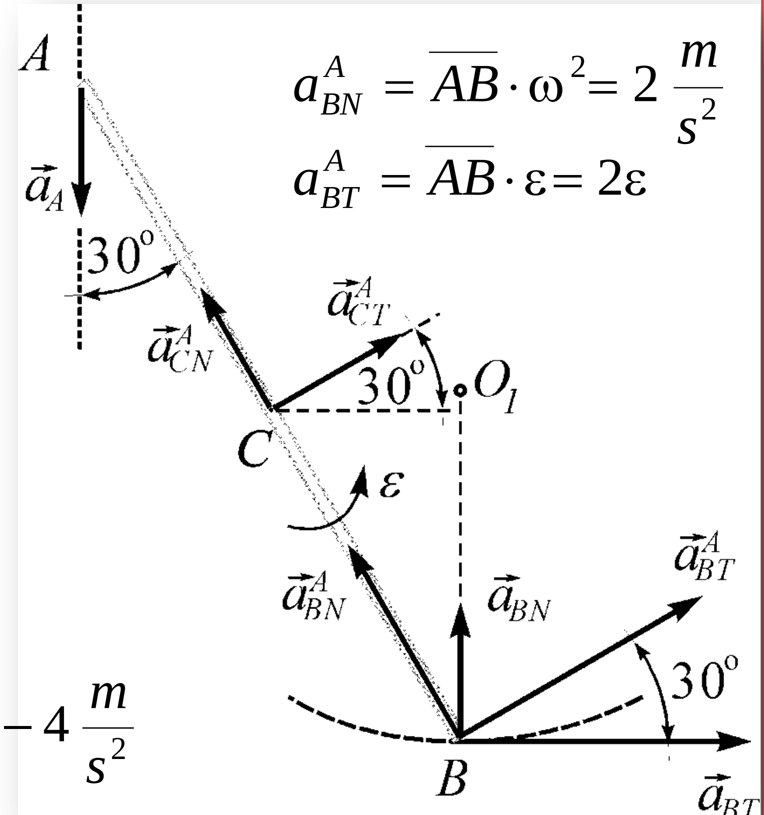
$$V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = 1\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\;2} + V_{Cy}^{\;2}} = 1\,\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja



$$a_{BN}^A = \overline{AB} \cdot \omega^2 = 2\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_{BT}^A = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 2\varepsilon$$

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorske formule za tačke *A* i *B*, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se intenziteti ubrzanja tačaka *A* i *B*:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\vec{a}_{BT}} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^A}} + \underline{\vec{a}_{BT}^A} \qquad a_{BN} = \frac{V_B^{\;2}}{R} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

$$y: \quad 3 + 0 = -2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \varepsilon = 5 - \sqrt{3}\; s^{-2}$$

$$x: \quad 0 + a_{BT} = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\left(5 - \sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_{BT} = 5\sqrt{3} - 4\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_B = \sqrt{a_{BN}^{\;2} + a_{BT}^{\;2}}$$

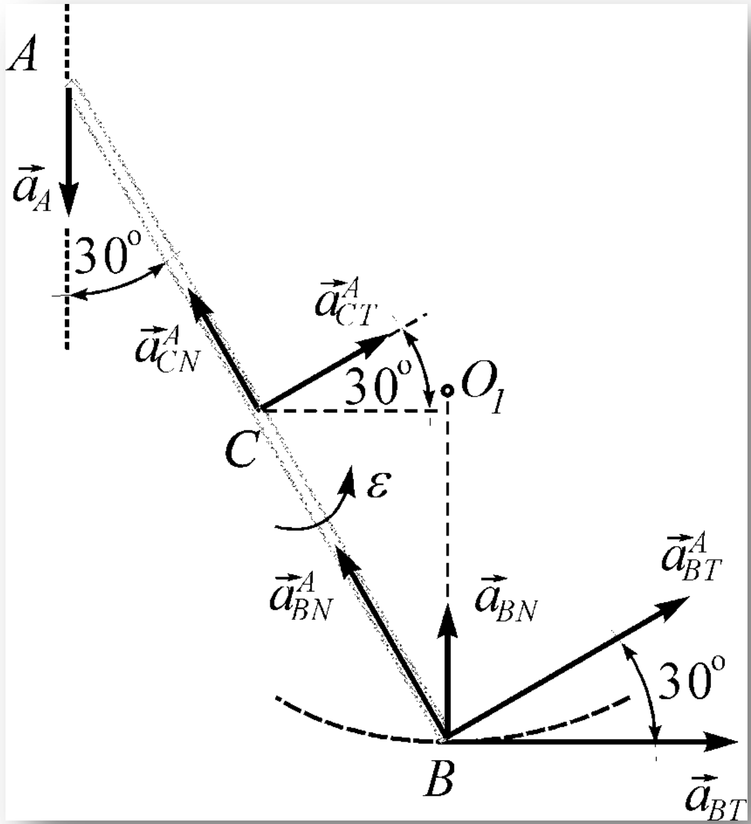
Pošto je putanja tačke B kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Smer tangencijalne komponente ubrzanja tačke B je, po pretpostavci, u desnu stranu. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_{BT} i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$a_{CN}^{A} = \overline{AC} \cdot \omega^2 = 1\,\frac{m}{s^2},$$

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^{A}}},$$

$$a_{CT}^{A} = \overline{AC} \cdot \varepsilon = 5 - \sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$



$$x: \quad a_{Cx} = 0 - 1\cdot\frac{1}{2} + \left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} - 2$$

$$y: \quad a_{Cy} = -2 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

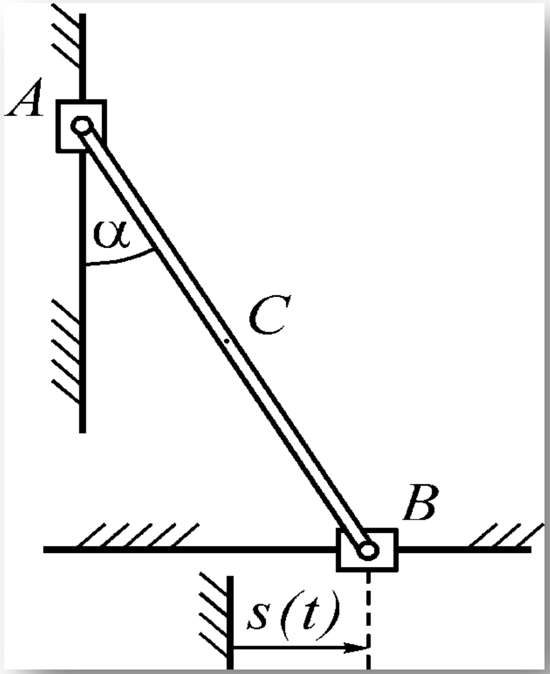
$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{a_{Cx}{}^2 + a_{Cy}{}^2}$$

Primer 2.13

Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se kreće se pravolinijski u horizontalnom pravcu. Podaci su:

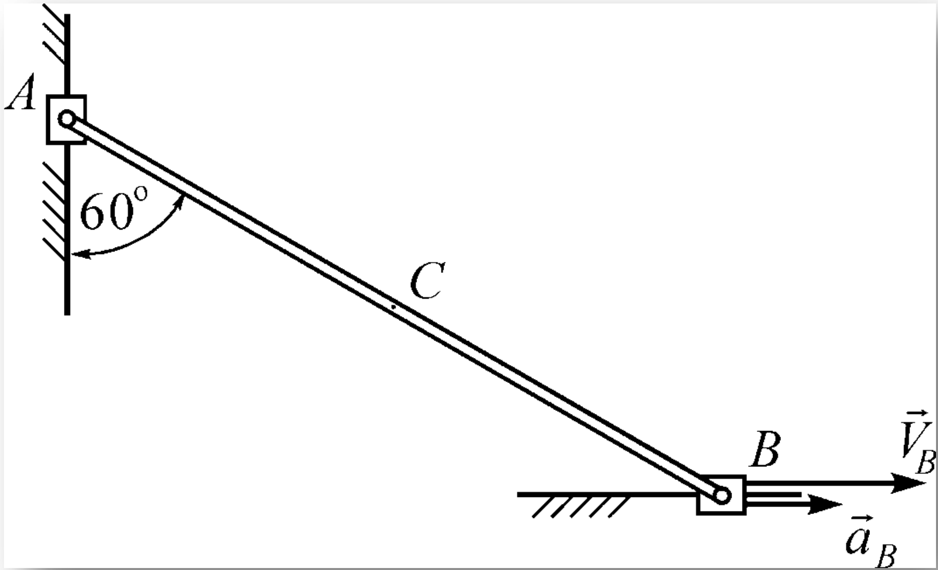
$$s(t)=t^2+t \quad s[m], t[s]; \overline{AB}=2\,m; \alpha=60^0; \bar{t}=1\,s.$$

Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i ubrzanje tačke *B* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?



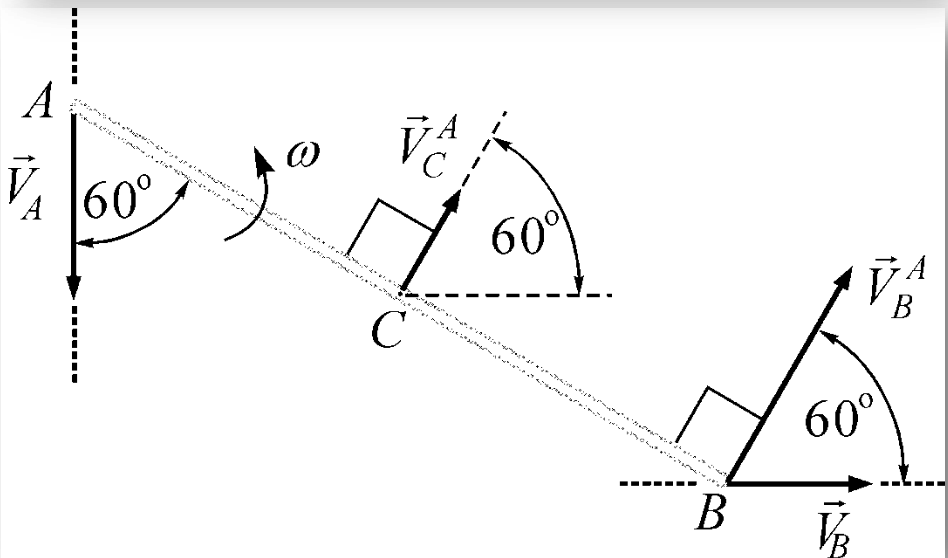
Brzina i ubrzanje tačke B

$$\dot{s}(t) = 2t + 1 \Rightarrow \dot{s}(1) = 3 \Rightarrow V_B = 3\,\frac{m}{s},$$



$$\ddot{s}(t) = 2 \Rightarrow \ddot{s}(1) = 2 \Rightarrow a_B = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Smerovi vektora brzine i ubrzanja tačke B su prema desno, u smeru porasta koordinate s, jer je $\dot{s}(1) > 0$ i $\ddot{s}(1) > 0$.



Analiza brzina

$$\underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2\omega$$

$$x: 3 = 0 + 2\omega \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 3\ s^{-1}$$

$$y: 0 = -V_A + 2 \cdot 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow V_A = 3\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Brzine tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^{\,A}$ učinjena pretpostavka (kao i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne..

Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^{\,A}}} \qquad V_C^A = \overline{AC}\cdot\omega = 3\,\frac{m}{s}$$

$$x:\quad V_{Cx} = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y:\quad V_{Cy} = -3\sqrt{3} + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

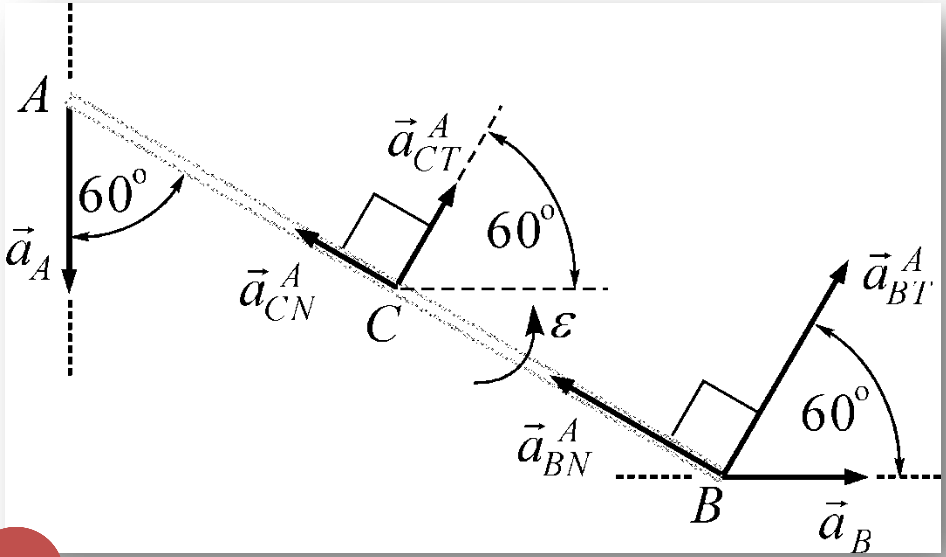
$$\Rightarrow\quad V_C = \sqrt{{V_{Cx}}^2 + {V_{Cy}}^2} = 3\frac{m}{s}$$

Analiza ubrzanja

$$\underline{\underline{\vec{a}_B}} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}_{BN}^{\,A}}} + \underline{\vec{a}_{BT}^{\,A}}$$

$$a_{BT}^A = \overline{AB}\cdot\varepsilon = 2\varepsilon$$

$$a_{BN}^A = \overline{AB}\cdot\omega^2 = 18\,\frac{m}{s^2}$$



$$x: 2 = 0 - 18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\varepsilon\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2 + 9\sqrt{3}\ s^{-1}$$

$$y: 0 = -a_A + 18\cdot\frac{1}{2} + 2\left(2 + 9\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a_A = 36 + 2\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$$

Vektor ubrzanja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže. Takođe je i za smer vektora $\vec{a}_{BT}^{A}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_A i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne. Pri projektovanju vektora na koordinatne ose za $\cos 60^0$ pisana je vrednost $1/2$ dok je za $\sin 60^0$ pisana vrednost $\sqrt{3}/2$.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^{A}}}, \quad a_{CN}^{A} = \overline{AC} \cdot \omega^2 = 9\,\frac{m}{s^2}, \quad a_{CT}^{A} = \overline{AC} \cdot \varepsilon = 2 + 9\sqrt{3}\,\frac{m}{s^2}$$

$$x: \quad a_{Cx} = 0 - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(2 + 9\sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1$$

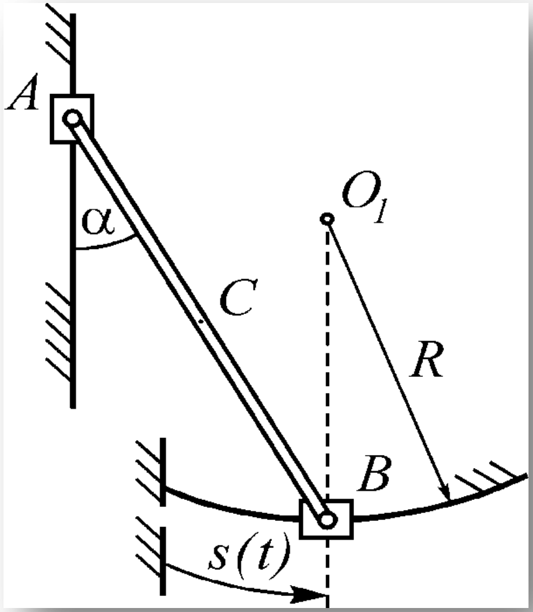
$$y: \quad a_{Cy} = -\left(36 + 2\sqrt{3}\right) + 9 \cdot \frac{1}{2} + \left(2 + 9\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(18 + \sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{{a_{Cx}}^2 + {a_{Cy}}^2}$$

Primer 2.14

Štap *AB*, prikazan na slici, vrši ravno kretanje. Tačka *A* se kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu. Tačka *B* se kreće po kružnoj putanji poluprečnika $R=1\,m$ kao što je to na slici prikazano. Podaci su:

$$s(t)=t^2-3t \quad s[m], t[s]; \overline{AB}=2\,m; \alpha=30^0; \bar{t}=1\,s.$$



Na osnovu zadatog zakona kretanja $s(t)$ odrediti brzinu i tangencijalno ubrzanje tačke *B* u trenutku $\bar{t}$ i nacrtati položaj sistema u tom trenutku i odrediti brzine i ubrzanja tačaka *A* i *C* (gde je tačka *C* na sredini štapa) kao i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa u tom položaju?

Brzina i tangencijalno ubrzanje tačke B

$$\dot{s}(t)=2t-3\Rightarrow\dot{s}(1)=-1\Rightarrow V_B=1\,\frac{m}{s},$$

Smer vektora brzine tačke *B* je u levu stranu, suprotno od smera porasta koordinate *s*, jer je $\dot{s}(1)<0$.

$$\ddot{s}(t)=2\Rightarrow\ddot{s}(1)=2\Rightarrow a_{BT}=2\,\frac{m}{s^2}$$

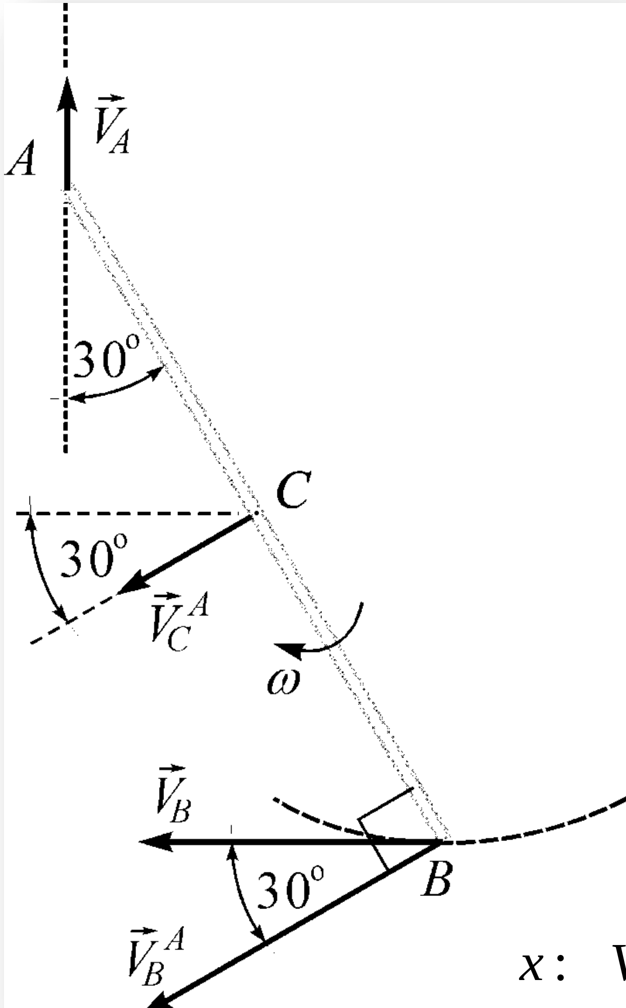
Smer vektora tangencijalnog ubrzanja tačke *B* je u desnu stranu, u smeru porasta koordinate s, jer je $\ddot{s}(1)>0$.

Analiza brzina

$$\underline{\underline{\vec{V}_B}} = \underline{\vec{V}_A} + \underline{\vec{V}_B^A} \qquad V_B^A = \overline{AB} \cdot \omega = 2\,\omega,$$

$$x: \quad -1 = 0 - 2\omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\, s^{-1}$$

$$y: \quad 0 = V_A - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{m}{s}$$



Vektor brzine tačke *A* je vertikalnog pravca, pošto se tačka *A* kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naviše.

Takođe je i za smer vektora $\vec{V}_B^A$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaone brzine ω). Zbog činjenice da su rešenja za V_A i ω pozitivnih predznaka obe pretpostavke o smerovima su tačne..

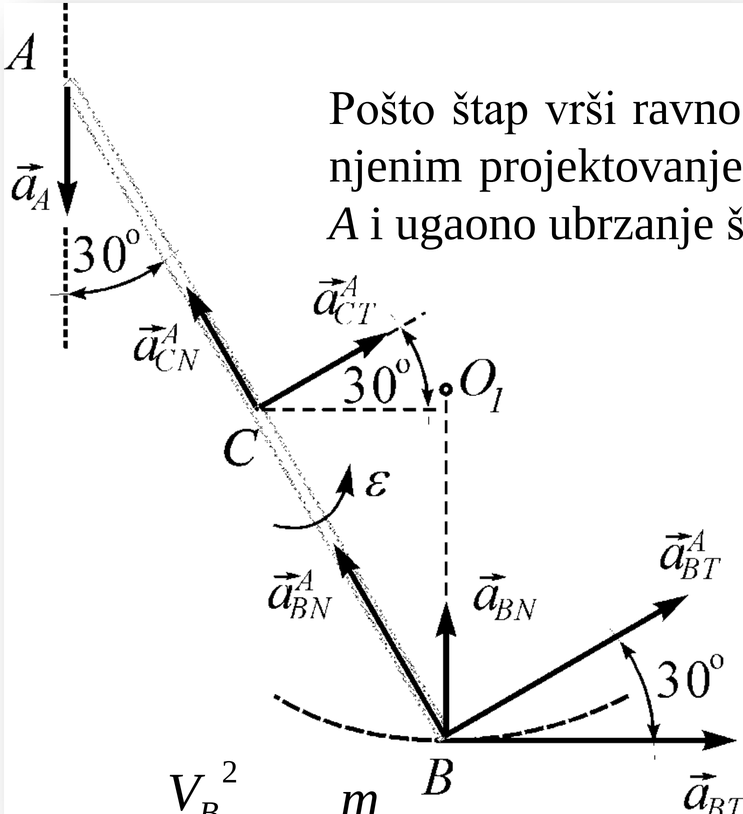
Određivanje brzine tačke C

$$\vec{V}_C = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\underline{\vec{V}_C^A}} \qquad V_C^A = \overline{AC} \cdot \omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{m}{s}$$

$$x: \quad V_{Cx} = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y: \quad V_{Cy} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_{Cx}^{\ 2} + V_{Cy}^{\ 2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{m}{s}$$



Analiza ubrzanja

Pošto štap vrši ravno kretanje primenom vektorske formule za tačke A i B, pa njenim projektovanjem na koordinatne ose dobiće se intenzitet ubrzanja tačke A i ugaono ubrzanje štapa:

$$\underline{\underline{\vec{a}_{BN}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BT}}} = \underline{\vec{a}_A} + \underline{\underline{\vec{a}^A_{BN}}} + \underline{\vec{a}^A_{BT}}$$

$$x: \quad 0 + 2 = 0 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{7\sqrt{3}}{9} s^{-2}$$

$$y: \quad 1 + 0 = -a_A + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_A = \frac{10\sqrt{3}}{9} - 1\, s^{-2}$$

$$a_{BN} = \frac{V_B{}^2}{R} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$a^A_{BN} = \overline{AB} \cdot \omega^2 = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$a^A_{BT} = \overline{AB} \cdot \varepsilon = 2\varepsilon$$

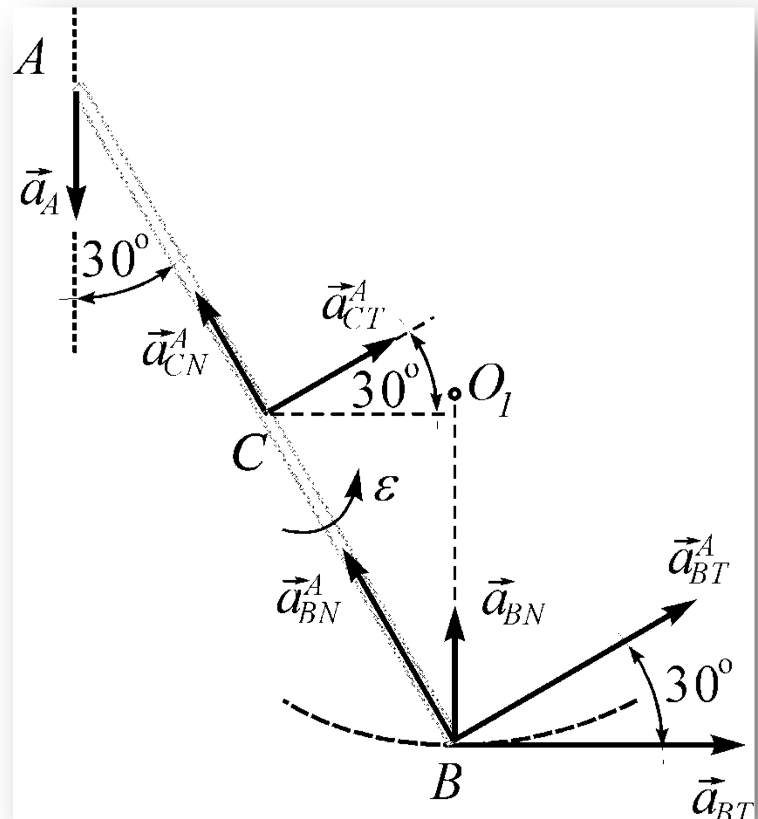
Pošto je putanja tačke B kružna, vektor ubrzanja te tačke je morao da se razloži na normalnu i tangencijalnu komponentu. Vektor ubrzanja tačke A je vertikalnog pravca, pošto se tačka A kreće pravolinijski u vertikalnom pravcu, dok je smer tog vektora, po pretpostavci, naniže.

Takođe je i za smer vektora $\vec{a}^A_{BT}$ učinjena pretpostavka (samim tim i za smer ugaonog ubrzanja ε). Zbog činjenice da su rešenja za a_A i ε pozitivnih predznaka, obe pretpostavke o smerovima su tačne.

Određivanje ubrzanja tačke C

$$\vec{a}_C = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CN}^{A}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{CT}^{A}}},$$

$$a_{CN}^{A} = \overline{AC}\cdot\omega^2 = \frac{1}{3}\frac{m}{s^2}, \qquad a_{CT}^{A} = \overline{AC}\cdot\varepsilon = \frac{7\sqrt{3}}{9}\frac{m}{s^2}$$



$$x: \quad a_{Cx} = 0 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

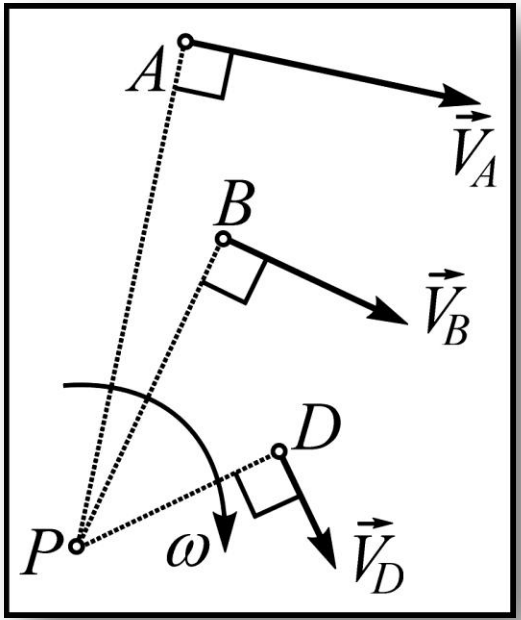
$$y: \quad a_{Cy} = -\left(\frac{10\sqrt{3}}{9} - 1\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{10\sqrt{3}}{18}$$

$$\Rightarrow \quad a_C = \sqrt{a_{Cx}{}^2 + a_{Cy}{}^2}$$

77. Trenutni pol brzine. Načini njegovog određivanja

Svako kruto telo koje vrši ravno kretanje, u opštem slučaju, u svakom trenutku, na svom materijalnom ili nematerijalnom delu, ima samo jednu tačku *P*, čija je brzina jednaka nuli:

$$\boxed{V_P = 0}$$



Ta tačka nosi naziv *trenutni pol brzine*. Kada se zna pravac brzine neke tačke tela, prava provučena kroz tu tačku a upravna na vektor brzine mora prolaziti kroz trenutni pol brzine *P*. Takve prave nazivaćemo *potezima do trenutnog pola*.

Ako se na primeru sa slike znaju pravci brzina tačaka *A* i *B*, presekom odgovarajućih potega dolazi se do mesta trenutnog pola *P*. Pošto ovi potezi moraju biti upravni na vektore brzina:

$$\boxed{\overline{AP} \perp \vec{V}_A,\ \overline{BP} \perp \vec{V}_B,\ \overline{DP} \perp \vec{V}_D, \ldots,}$$

za bilo koju drugu tačku tela, na primer D (sa slike), pravac je definisan.

Što se tiče smerova vektora brzina, oni su u skladu sa vektorom ugaone brzine. Ugaona brzina se može dobiti kao količnik intenziteta brzine ma koje tačke tela i njenog rastojanja do trenutnog pola:

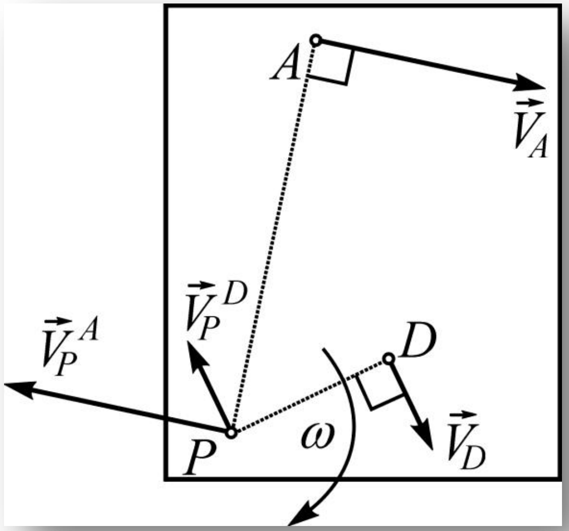
$$\boxed{\omega = \frac{V_A}{\overline{AP}} = \frac{V_B}{\overline{BP}} = \frac{V_D}{\overline{DP}} = \ldots,}$$

a samim tim za intenzitete brzina tačaka važe formule

$$\boxed{V_A = \overline{AP} \cdot \omega,\ \ V_B = \overline{BP} \cdot \omega,\ \ V_D = \overline{DP} \cdot \omega,\ \ \ldots}$$

Kao dokaz da se trenutni pol nalazi na preseku potega izrazimo prvo $\vec{V}_P$ preko $\vec{V}_A$:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_P^A,$$



odakle se zaključuje da je $\vec{V}_P$, zbog $\vec{V}_P^A \perp \overline{AP}$, ili paralelno sa $\vec{V}_A$ ili je $\vec{V}_P = \vec{0}$.

Zatim se izražavanjem $\vec{V}_P$ preko $\vec{V}_D$:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_D + \vec{V}_P^D,$$

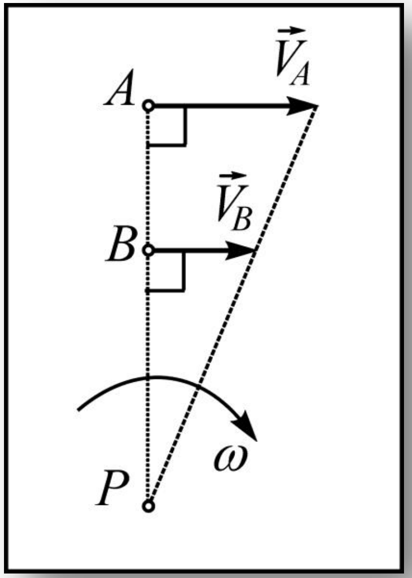
dolazi do zaključka da je $\vec{V}_P$, zbog $\vec{V}_P^D \perp \overline{DP}$, ili paralelno sa $\vec{V}_D$ ili je $\vec{V}_P = \vec{0}$.

Pošto je nemoguće da istovremeno bude $\vec{V}_P$ paralelno sa $\vec{V}_A$ i $\vec{V}_D$ mora biti $\vec{V}_P = \vec{0}$.

Dokaz formula vezanih za ugaonu brzinu tela i intenziteta brzina njegovih tačaka, kao i smerova istih, oslanja se na činjenicu da, zbog $\vec{V}_P = \vec{0}$, važe vektorske jednakosti:

Neki specijalni slučajevi:

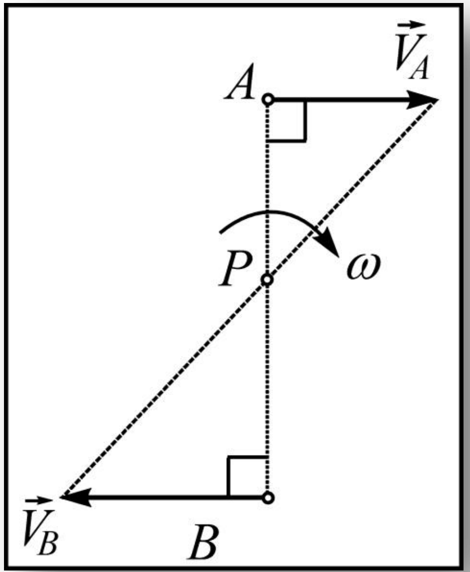
U prikazanom specijalnom slučaju kada se znaju intenziteti paralelnih, jednako usmerenih brzina, zajedničkog potega do pola, mesto pola se određuje, kao na slici, povlačenjem prave koja spaja vrhove vektora brzina do preseka sa potegom, gde, na osnovu sličnosti trouglova, važi:



$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{\overline{PB}+\overline{AB}}{\overline{PB}}\Rightarrow \overline{PB}\cdot(V_A-V_B)=\overline{AB}\cdot V_B\Rightarrow \overline{PB}=\frac{\overline{AB}\cdot V_B}{V_A-V_B}$$

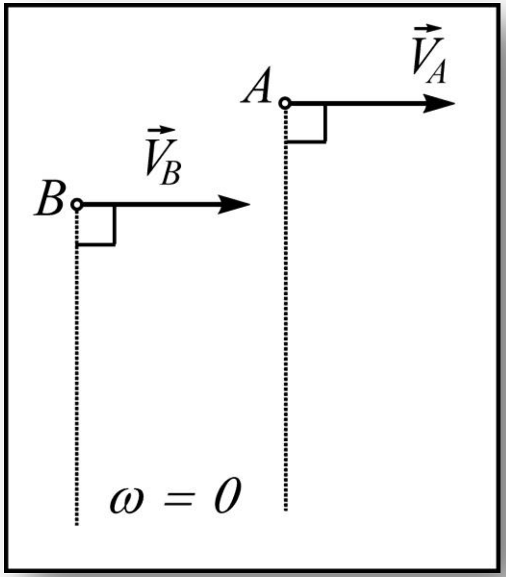
$$\omega=\frac{V_B}{\overline{PB}}=\frac{V_A-V_B}{\overline{AB}}$$

U slučaju kada se znaju intenziteti paralelnih, suprotno usmerenih brzina, zajedničkog potega do pola, mesto pola se određuje, kao na slici, povlačenjem prave koja spaja vrhove vektora brzina do preseka sa potegom, gde, na osnovu sličnosti trouglova, važi:



$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{\overline{AB}-\overline{PB}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PB}\cdot(V_A+V_B)=\overline{AB}\cdot V_B \Rightarrow \overline{PB}=\frac{\overline{AB}\cdot V_B}{V_A+V_B}$$

$$\omega=\frac{V_B}{\overline{PB}}=\frac{V_A+V_B}{\overline{AB}}$$



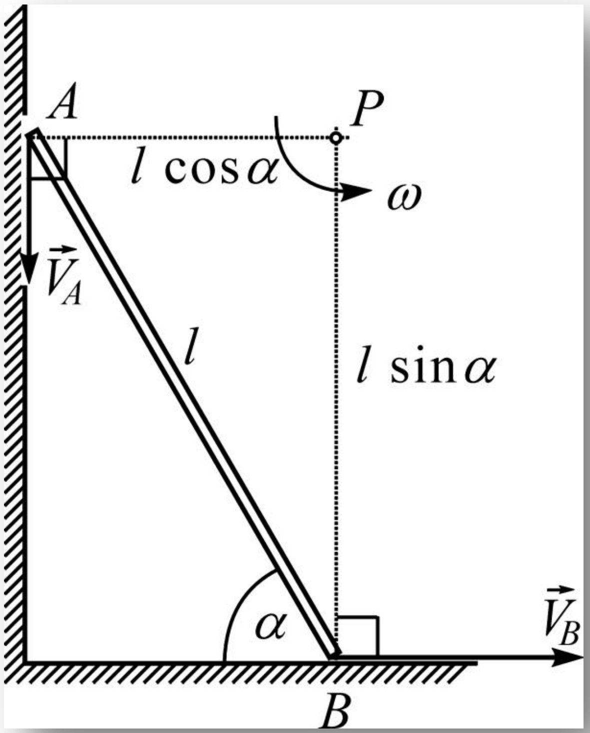
U dole prikazanom specijalnom slučaju kada su brzine paralelne i samim tim potezi takođe paralelni (bez poklapanja) trenutni pol je u beskonačnosti i važi da je ugaona brzina tela, u datom trenutku, jednaka nuli:

$$\omega=\lim_{\overline{AP}\to\infty}\frac{V_A}{\overline{AP}}=0.$$

To ima za posledicu da svaka tačka tela, na primer *D*, ima kao vektor istu brzinu kao i tačka *A*: $\vec{V}_D=\vec{V}_A+\vec{V}_D^A=\vec{V}_A,$ jer je $V_D^A=\overline{AD}\cdot\omega=0.$ Dakle, u takvom specijalnom slučaju važi: $\vec{V}_A=\vec{V}_B=\vec{V}_C=\vec{V}_D=\ldots$

Primer 2.15

Štap *AB* vrši ravno kretanje tako što tačka *A* klizi po vertikalnom zidu a tačka *B* po horizontalnom podu. Poznate veličine su V_A, l i α. Odrediti ω i V_B?



$$\omega = \frac{V_A}{\overline{AP}} = \frac{V_A}{l \cdot \cos\alpha}$$

$$V_B = \overline{BP} \cdot \omega = l \cdot \sin\alpha \frac{V_A}{l \cdot \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad V_B = V_A \cdot \tan\alpha.$$

Primer 2.16

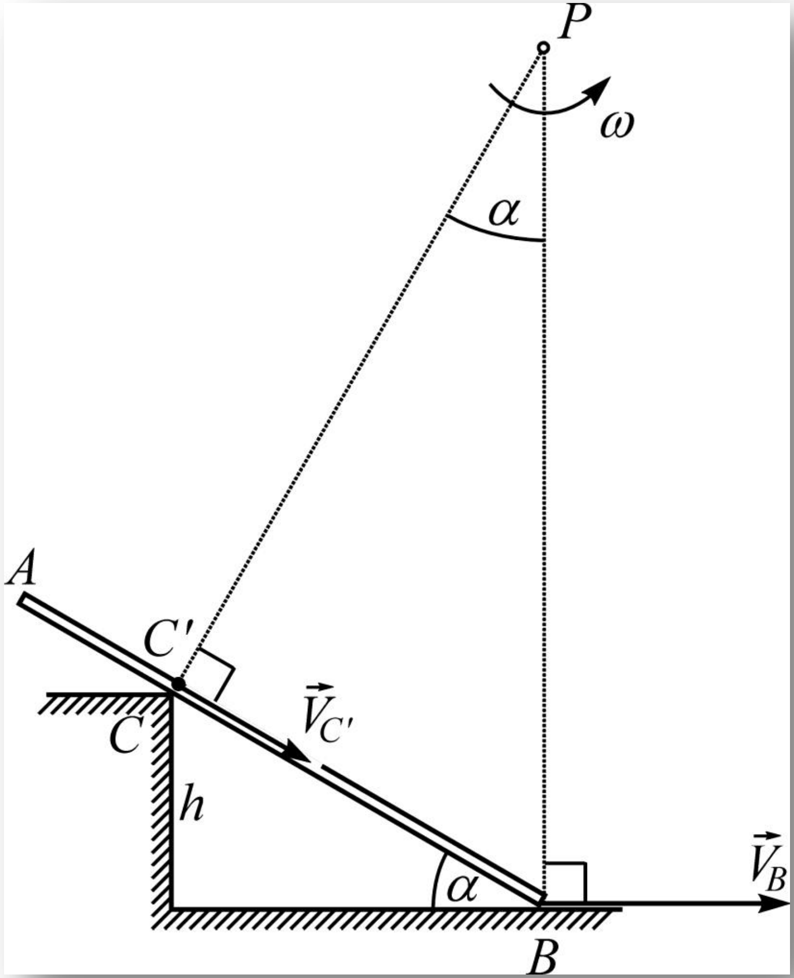
Štap *AB* vrši ravno kretanje tako što klizi po ivici C dok njegova tačka *B* klizi po horizontalnom podu. Poznate veličine su V_B, l i α. Odrediti ω?

$$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{BC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BP} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin^2\alpha},$$

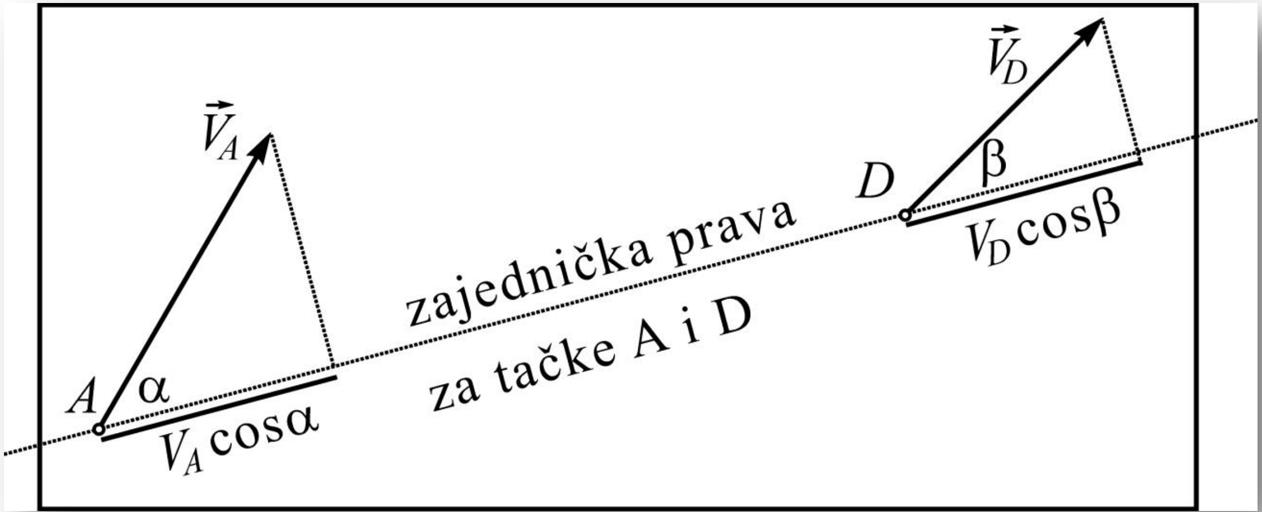
$$\omega = \frac{V_B}{\overline{BP}} = \frac{V_B}{h}\sin^2\alpha.$$



78. Teorema o projekciji vektora brzina na zajedničku pravu

Za dve tačke koje pripadaju telu što vrši ravno kretanje projekcije vektora brzina na zajedničku pravu moraju biti jednake:

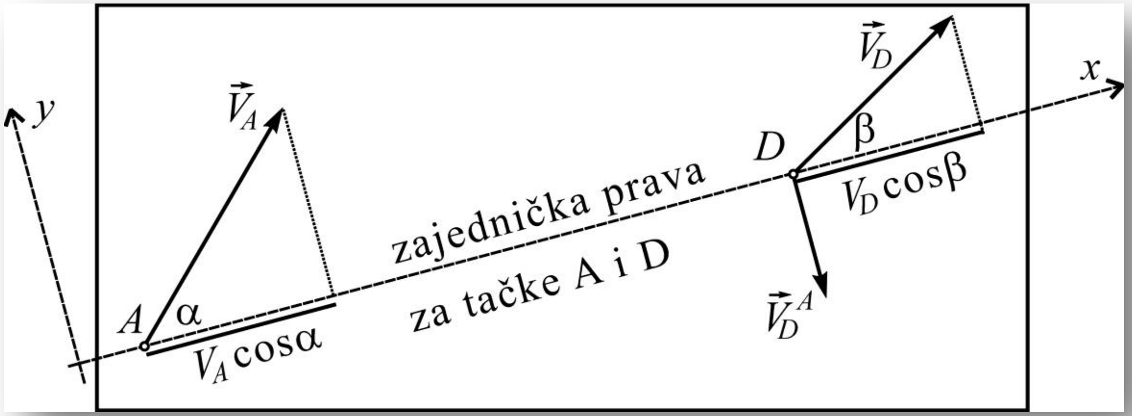
$$\boxed{V_D \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha.}$$



Dokaz :

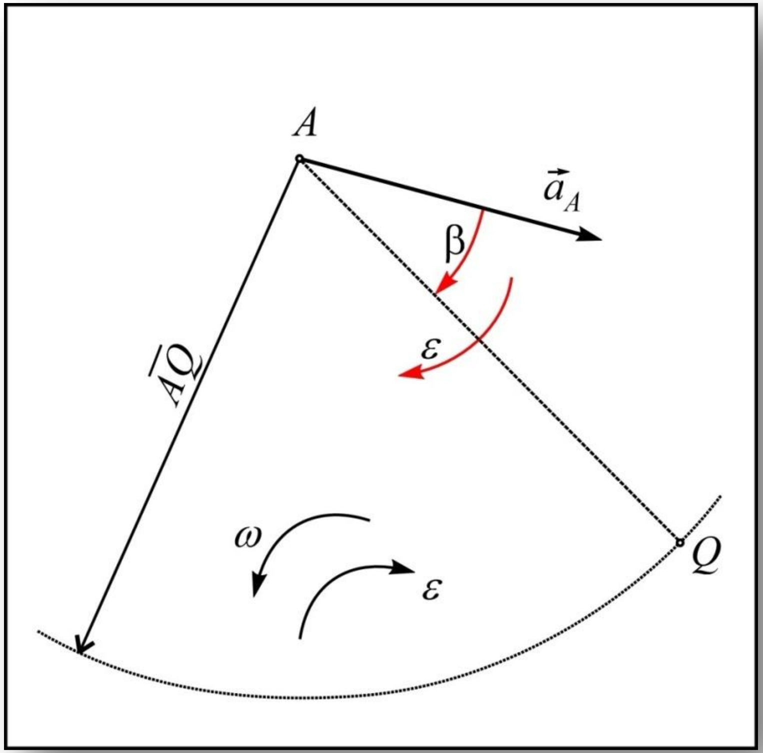
Projektovanjem vektorske jednačine $\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_D^A$ na izabranu x osu, dobija se:

$$x: \quad V_{Dx} = V_{Ax} + 0 \quad \Rightarrow \quad V_D \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha.$$



80. Trenutni pol ubrzanja

Poznato je ubrzanje jedne tačke tela u potpunosti (na primer, tačke A, $\vec{a}_A$, zna mu se pravac, smer i intenzitet) a takođe i ugaona brzi na ω i ugaono ubrzanje ε tela u datom trenutku. Treba odrediti mesto tačke tela Q čije ubrzanje iznosi nula. Ta tačka Q je ***trenutni pol ubrzanja.***



Položaj tačke Q u odnosu na tačku A i vektor $\vec{a}_A$ određuju ugao β i rastojanje $\overline{AQ}$. Tačnije, ako bi se vektor $\vec{a}_A$ obrnuo oko tačke A u smeru ugaonog ubrzanja ε bio bi usmeren tačno prema tački Q, koja je od tačke A na rastojanju $\overline{AQ}$.

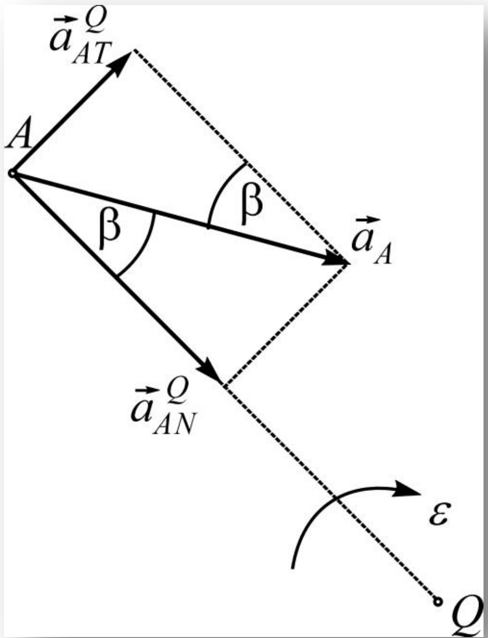
Određivanje rastojanja $\overline{AQ}$ **:**

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AN}^{Q} + \vec{a}_{AT}^{Q}, \; \vec{a}_Q = \vec{0}, \; a_{AN}^{Q} = \overline{AQ}\cdot\omega^2, \; a_{AT}^{Q} = \overline{AQ}\cdot\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_{AT}^{Q}\right)^2 + \left(a_{AN}^{Q}\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{AQ}\cdot\varepsilon\right)^2 + \left(\overline{AQ}\cdot\omega^2\right)^2} = \sqrt{\left(\overline{AQ}\right)^2\cdot\left(\varepsilon^2+\omega^4\right)} \quad \Rightarrow$$

$$a_A = \overline{AQ}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{AQ} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}.}$$

Određivanje ugla β:

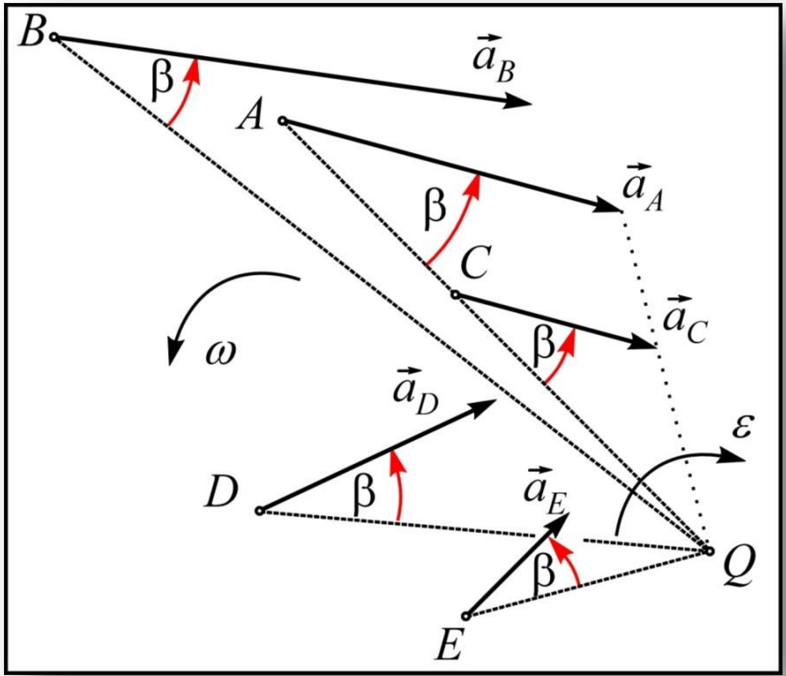


Na osnovu trouglova sa slike imamo da je:

$$\tan\beta = \frac{a_{AT}^{Q}}{a_{AN}^{Q}} = \frac{\overline{AQ}\cdot\varepsilon}{\overline{AQ}\cdot\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

$$\boxed{\beta = \arctan\frac{\varepsilon}{\omega^2}.}$$

Određivanje ubrzanja ma koje tačke tela kada mu se zna položaj tačke Q, ω i ε (samim tim i β):

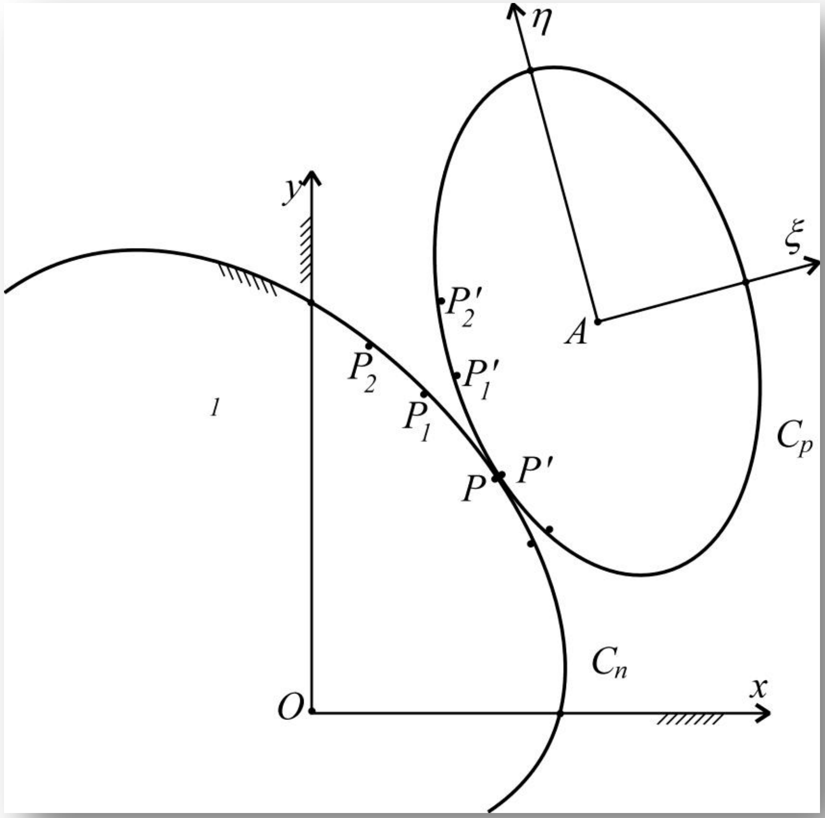


Pravac i smer vektora ubrzanja neke tačke tela dobijaju se okretanjem za ugao β vektora koji spaja tu tačku sa tačkom *Q* oko te tačke. Intenzitete vektora ubrzanja tačaka određuju izrazi:

$$\boxed{a_B = \overline{BQ}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\; a_C = \overline{CQ}\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4},\ldots}$$

81. Centroide. Primer

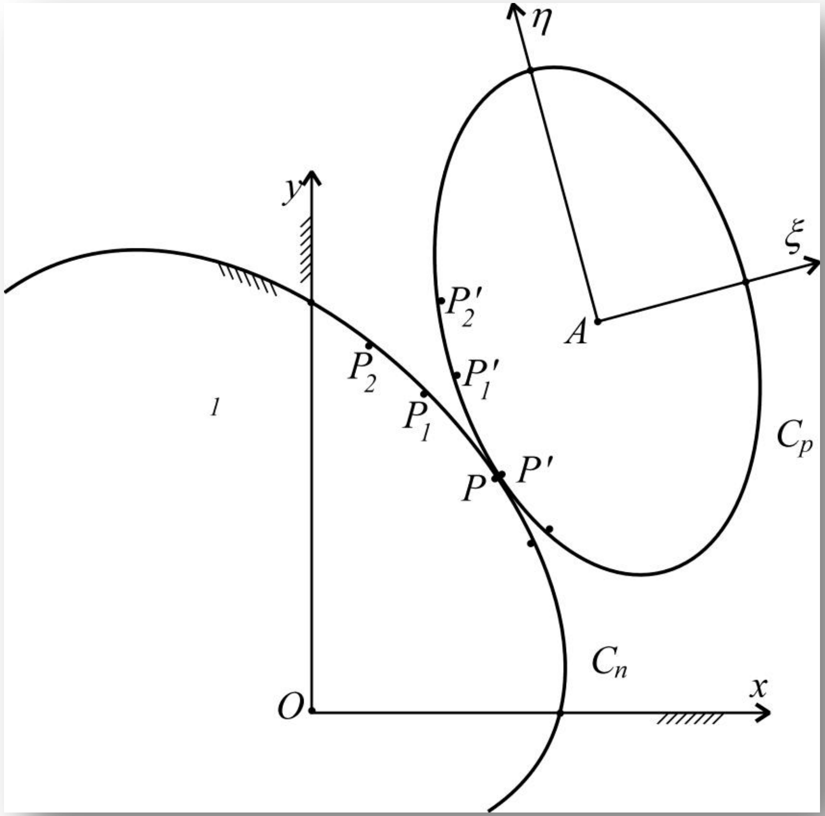
Telo koje se u ravni kotrlja bez klizanja po nepokretnoj liniji vrši opšte ravno kretanje. Svaka tačka omotača tog tela u trenutku kontakta sa nepokretnom linijom imaće brzinu jednaku nuli i biće trenutni pol brzine. Omotač tog tela čini skup trenutnih polova brzine koji, u odnosu na pokretni koordinatni sistem $\xi A \eta$, obrazuje pokretnu centroidu C_p. Nepokretnu centroidu C_n, koja je zapravo pomenuta nepokretna linija, čini skup trenutnih polova brzine u odnosu na nepokretni koordinatni sistem xOy.



Svako ravno kretanje može biti predstavljeno kao kotrljanje bez klizanja pokretne centroide po nepokretnoj. Jednačine tih centroida

$$\boxed{g(\xi_P, \eta_P) = 0 \quad \text{i} \quad f(x_P, y_P) = 0}$$

dobijaju se na osnovu odgovarajućih parametarskih jednačina tačke P u nepokretnom i pokretnom koordinatnom sistemu eliminacijom parametra iz tih jednačina.



U parametarskim jednačinama oblika:

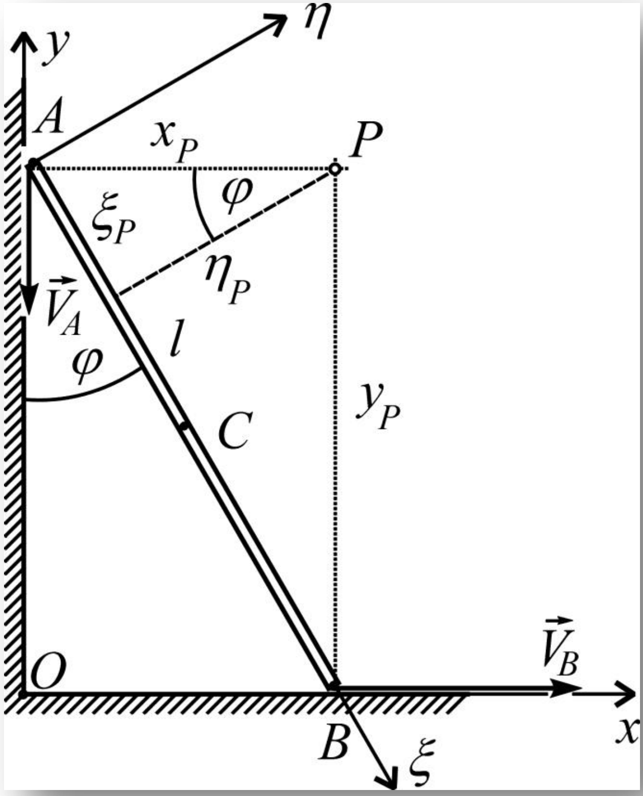
$$\boxed{x_P = x_P(\varphi),\ \ y_P = y_P(\varphi),\ \ \xi_P = \xi_P(\varphi), \eta_p = \eta_p(\varphi)}$$

parametar je φ.

Ukoliko bismo kruto telo koje vrši ravno kretanje kruto spojili sa pokretnom centroidom, kotrljanjem bez klizanja pokretne centroide po nepokretnoj telo bi prolazilo kroz potpuno iste položaje kao i kod njegovog originalnog kretanja.

Primer 2.17

Tačka *A* štapa *AB*, dužine *l*, klizi po vertikalnom zidu, a njegova tačka *B*, klizi po horizontalnom podu, odrediti nepokretnu i pokretnu centroidu?



Nepokretna centroida:

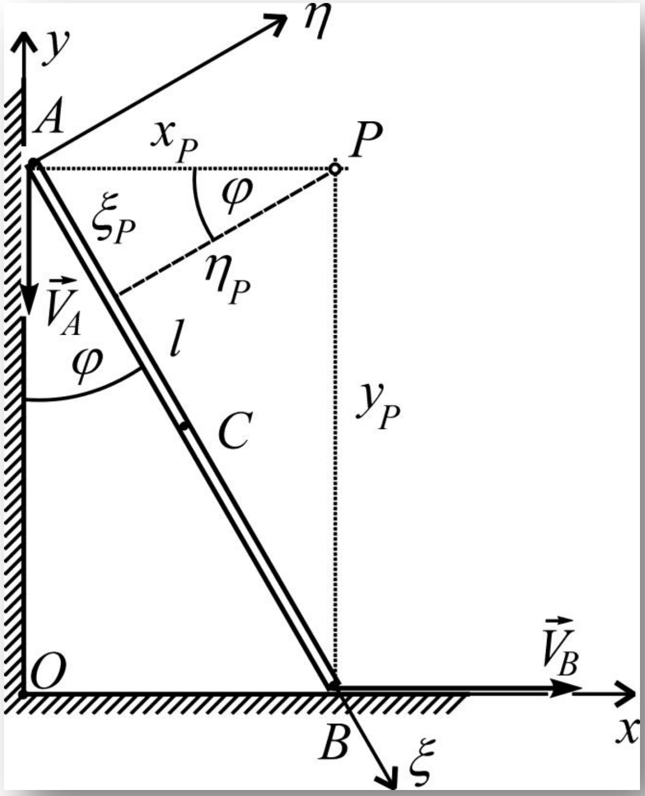
Parametarske jednačine nepokretne centriode:

$$\boxed{x_P(\varphi)=l\cdot\sin\varphi,\quad y_P(\varphi)=l\cdot\cos\varphi}$$

Eliminacija parametra φ:

$$x_P{}^2+y_P{}^2=l^2\cdot\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)$$

$$\boxed{x_P{}^2+y_P{}^2=l^2}$$



Pokretna centroida:

Parametarske jednačine pokretne centriode:

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_P(\varphi)&=x_P(\varphi)\cdot\sin\varphi=l\cdot\sin^2\varphi\\ \eta_P(\varphi)&=x_P(\varphi)\cdot\cos\varphi=l\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\end{aligned}}$$

Eliminacija parametra φ:

$$\xi_P(\varphi)=\frac{l}{2}(1-\cos 2\varphi),\quad \eta_P(\varphi)=\frac{l}{2}\sin 2\varphi$$

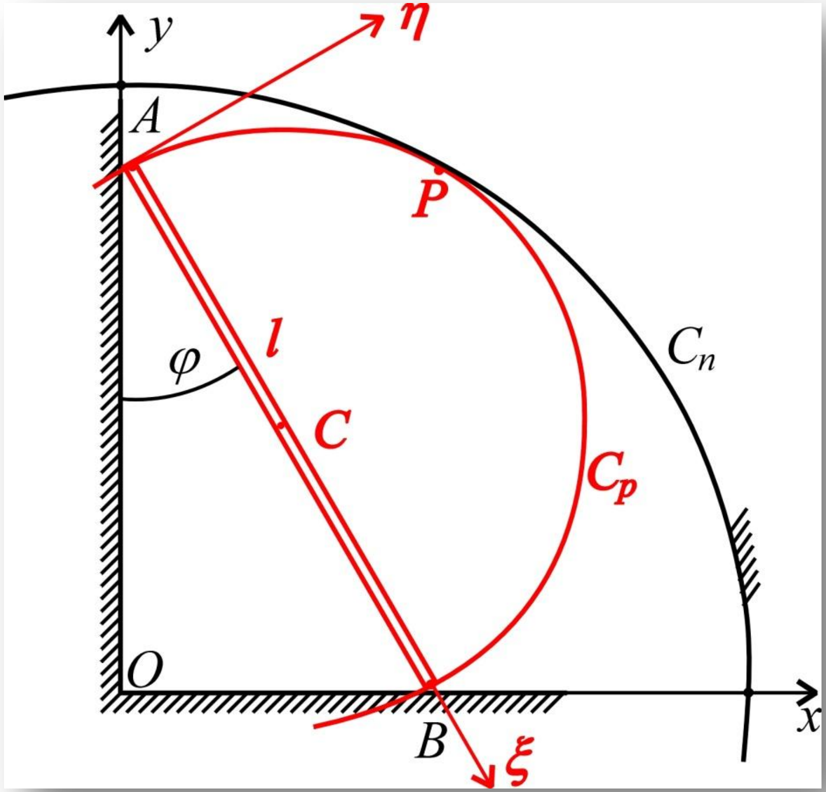
$$\xi_P-\frac{l}{2}=-\frac{l}{2}\cos 2\varphi,\quad \eta_P=\frac{l}{2}\sin 2\varphi$$

$$\left(\xi_P-\frac{l}{2}\right)^2+\eta_P{}^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot\left(\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi\right)$$

$$\boxed{\left(\xi_P-\frac{l}{2}\right)^2+\eta_P{}^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$x_P^{\,2} + y_P^{\,2} = l^2$$

$$\left(\xi_P - \frac{l}{2}\right)^2 + \eta_P^{\,2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$



Korišćene jednakosti:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi), \quad \sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi, \; \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1.$$

$$1) \quad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \qquad 2) \quad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi.$$

$$2\cos^2\varphi = 1 + \cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi).$$

$$2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi).$$

Šta smo naučili?

75. **Ravno kretanje krutog tela. Jednačine ravnog kretanja. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela koje vrši ravno kretanje.**
76. **Određivanje brzina tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.**
77. **Trenutni pol brzine. Načini njegovog određivanja.**
78. **Teorema o projekciji vektora brzina na zajedničku pravu.**
79. **Određivanje ubrzanja tačaka krutog tela koje vrši ravno kretanje.**
80. **Trenutni pol ubrzanja.**
81. **Centroide. Primer.**

Mehanika
Predavanja 12

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.