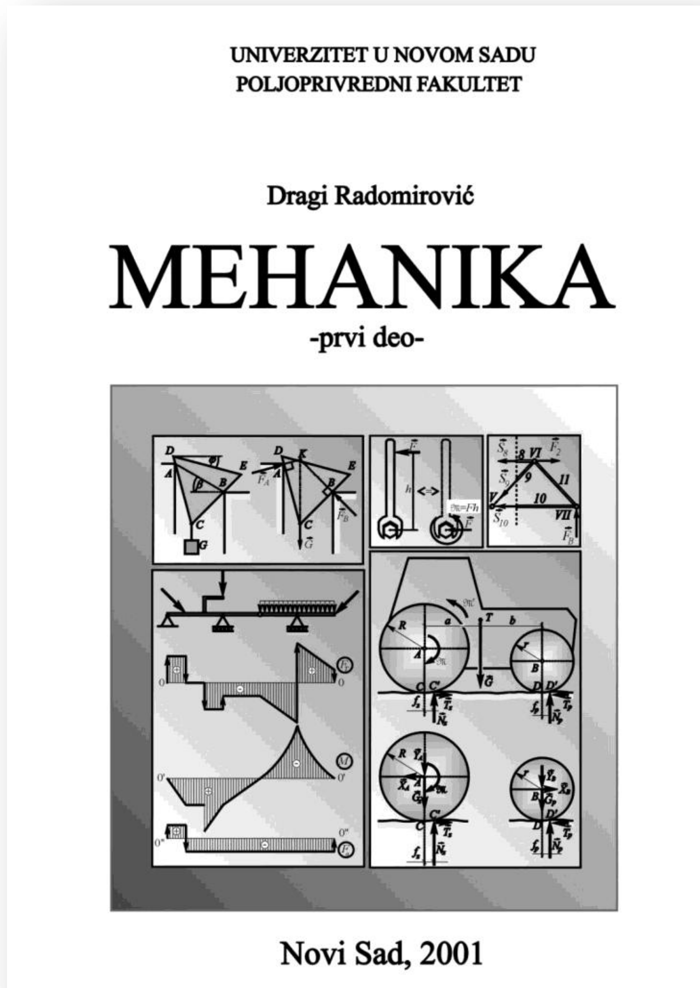
Mehanika
Predavanja 11

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.

Literatura


UNIVERZITET U NOVOM SADU
POLJOPRIVREDNI FAKULTET

Dragi Radomirović

MEHANIKA
-prvi deo-

Novi Sad, 2001

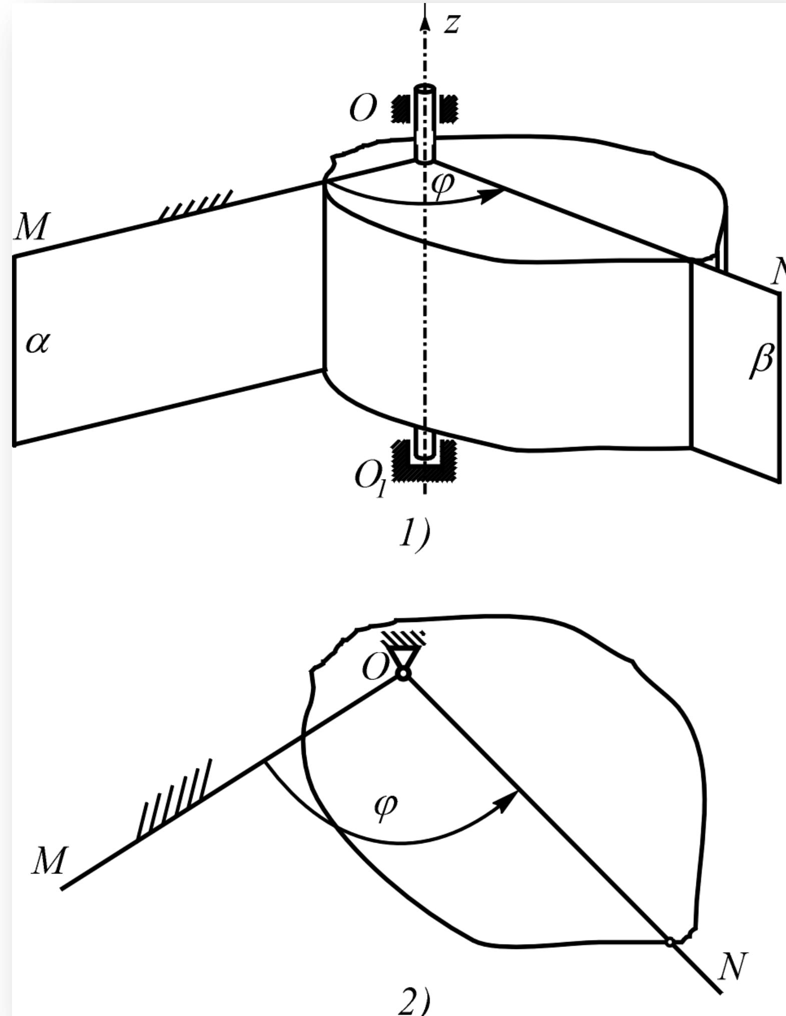
Šta ćemo naučiti?

71. **Obrtanje krutog tela oko nepomične ose. Ugao rotacije tela. Zakon obrtnog kretanja krutog tela. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela. Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.**
72. **Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće.**
73. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog obrtanja. Ugaona brzina preko n[o/min].**
74. **Translatorno kretanje krutog tela. Primeri za pravolinijsko i krivolinijsko translatorno kretanje.**

71. Obrtanje krutog tela oko nepomične ose. Ugao rotacije tela. Zakon obrtnog kretanja krutog tela. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela. Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja

Ugao rotacije φ je definisan kao ugao između ma koje nepokretne ravni (α) i ma koje ravni koja pripada telu (β).

Pogledom u pravcu ose obrtanja *z* u smeru suprotnom od nje, osa se vidi kao tačka *O* a ravni kao prave *OM* i *ON* te se ugao rotacije φ (Sl.2) može definisati i kao ugao između ma koje nepokretne prave (*OM*) i ma koje prave koja pripada telu (*ON*).



Ugao rotacije tela je važna globalna karakteristika rotacionog kretanja. Kruto telo koje se obrće oko nepomične ose vrši čistu rotaciju.

Zakonom obrtnog kretanja krutog tela (jednačinom kretanja) naziva se zavisnost ugla rotacije (na primer φ) od vremena *t*. Ovo je zbog toga što znati φ(*t*), znači znati sve o kinematici takvog kretanja.

O POJMU “BROJ STEPENI SLOBODE KRETANJA”

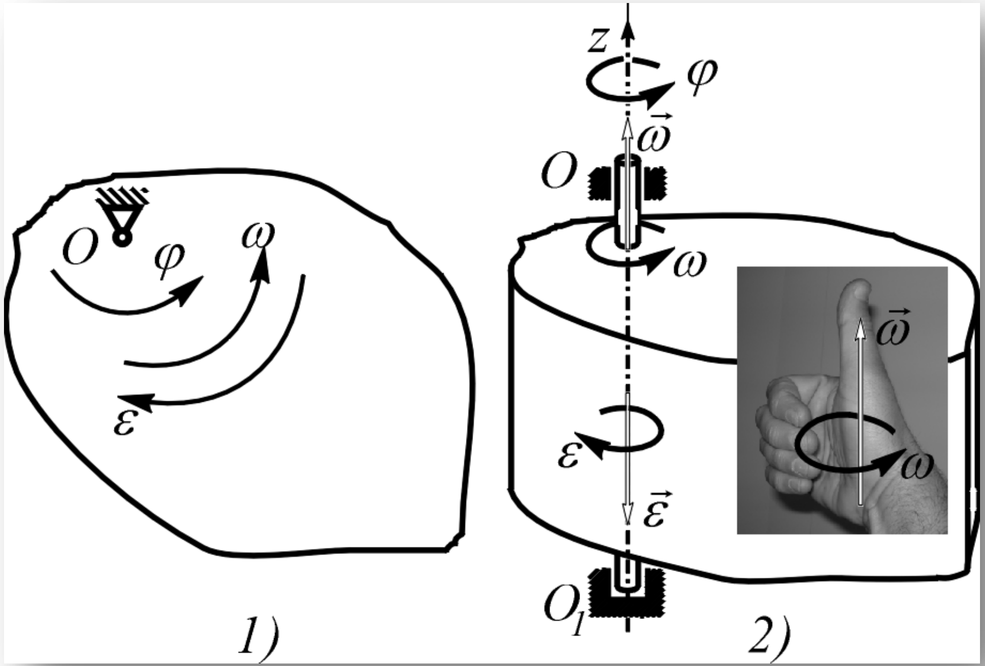
Kada, kao kod obrtanja krutog tela oko nepomične ose, jedna koordinata u potpunosti određuje položaj tela, kaže se da sistem ima jedan stepen slobode kretanja. Sistemi sa jednim stepenom slobode kretanja su i pravolinijsko kretanje tačke (tu je jednačina kretanja, na primer, $x(t)$) kao i krivolinijsko kretanje po poznatoj krivoj (gde je jednačina kretanja, na primer, $s(t)$). Dakle, broj jednačina kretanja se poklapa sa brojem stepeni slobode kretanja. Jasno je da za kretanje tačke u ravni, koje je definisano sa dve jednačine kretanja (na primer, sa $x(t)$ i $y(t)$, kao što je to obrađeno u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu), sistem ima dva stepena slobode kretanja.

Srednja ugaona brzina tela ω_{sr} u nekom vremenskom intervalu Δt definisana je kao količnik priraštaja ugla rotacije $\Delta\varphi$ i proteklog vremena Δt:

$$\omega_{sr} = \Delta\varphi / \Delta t$$

Ugaona brzina se dobija kao limes od ω_{sr} kad Δt teži nuli:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

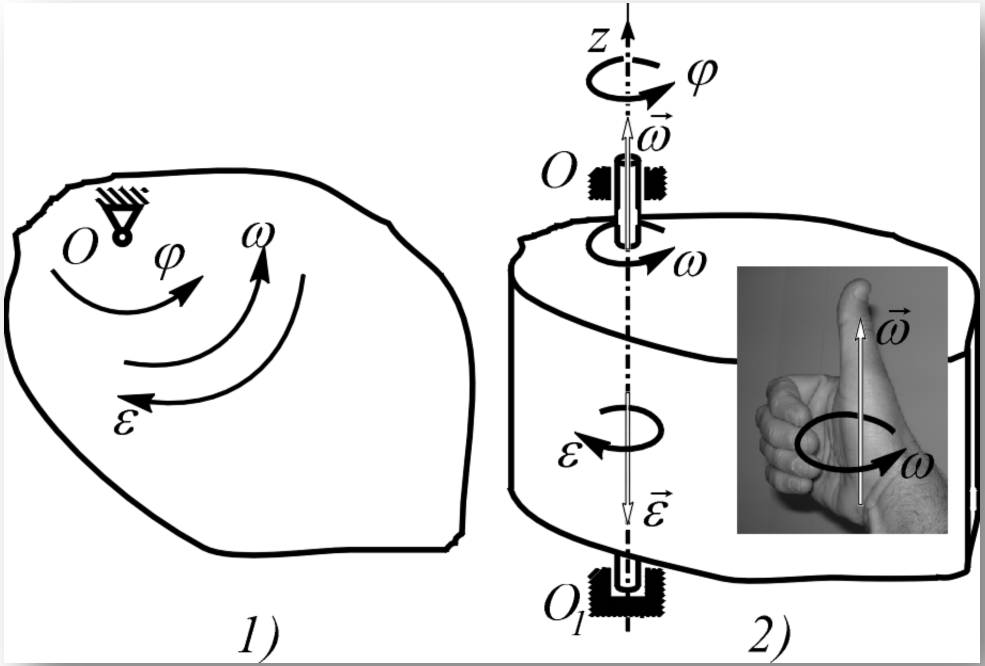


Ugaona brzina tela ω, kao mera brzine obrtnog kretanja, govori o promeni ugla rotacije φ sa vremenom t i jednaka prvom izvodu ugla rotacije po vremenu:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$

Srednje ugaono ubrzanje tela ε_{sr} u nekom vremenskom intervalu Δt definisano je kao količnik priraštaja ugaone brzine $\Delta\omega$ i proteklog vremena Δt:

$$\varepsilon_{sr} = \Delta\omega / \Delta t$$



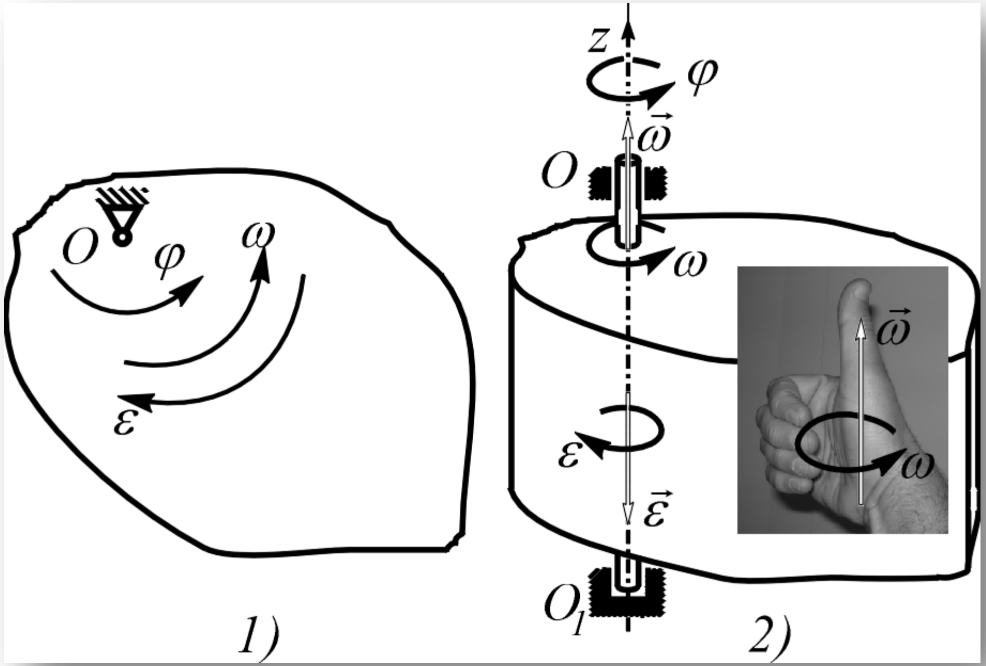
Ugaono ubrzanje se dobija kao limes od ε_{sr} kad Δt teži nuli:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

Ugaono ubrzanje u nekom trenutku vremena jednako prvom izvodu ugaone brzine po vremenu, i samim tim, drugom izvodu ugla rotacije po vremenu.

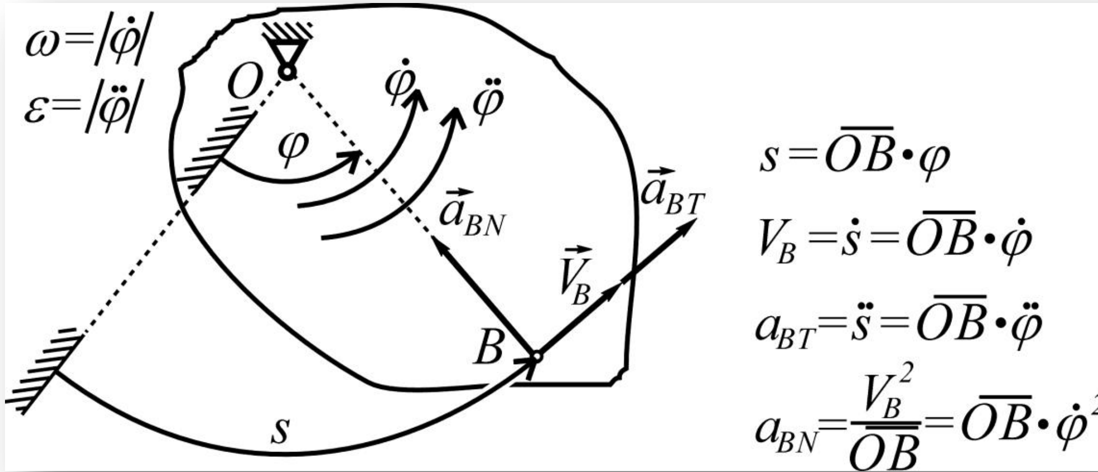
$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja su upravni na ravni u kojima leže putanje tačaka tela. Smerove tih vektora može da odredi pravilo desne ruke.



Po tom pravilu, prste desne ruke postaviti u smeru ω a palac desne ruke će pokazati smer vektora $\vec{\omega}$, isto tako, prste desne ruke postaviti u smeru ε a palac desne ruke će pokazati smer vektora $\vec{\varepsilon}$.

72. Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće



Svaka tačka tela koje se obrće oko nepomične ose ima kružnu putanju, poluprečnika koji je jednak najkraćem rastojanju između te tačke i ose obrtanja.

Pošto je vektor brzine svake tačke u pravcu tangente na njenu kružnu putanju, on mora biti i upravan na duž koja povezuje tu tačku sa njoj najbližom tačkom na osi obrtanja, zbog toga je

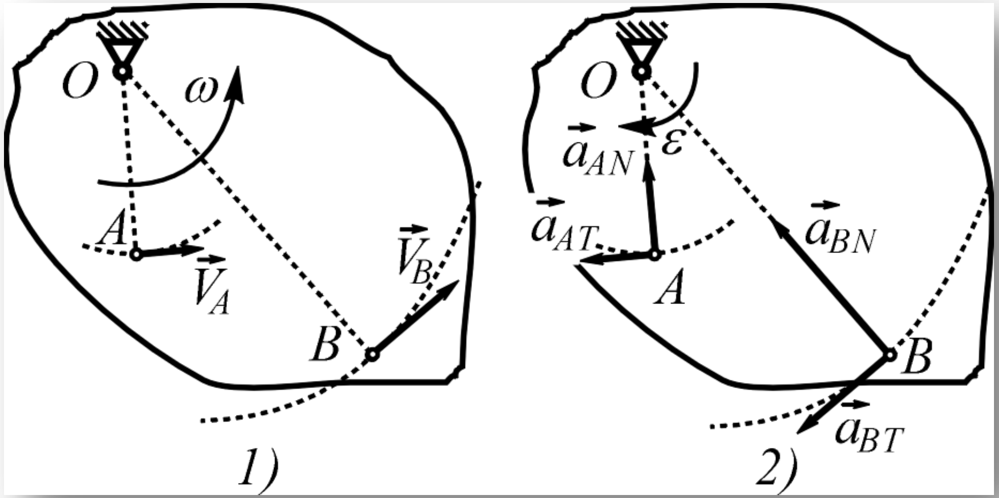
$$\vec{V}_A \perp \overline{OA} \quad \text{i} \quad \vec{V}_B \perp \overline{OB}.$$

Intenzitet brzine se dobija množenjem najkraćeg rastojanja između tačke i ose obrtanja sa ugaonom brzinom, zbog čega je

$$\boxed{V_A = \overline{OA}\cdot\omega,\ V_B = \overline{OB}\cdot\omega \quad \text{itd.}}$$

Zbog činjenice da tačke imaju kružne putanje vektori njihovih ubrzanja se, kao i uvek u takvom slučaju, razlažu na normalne i tangencijalne komponente, dakle

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AN} + \vec{a}_{AT}\,,\quad \vec{a}_B = \vec{a}_{BN} + \vec{a}_{BT}$$



Vektor normalnog ubrzanja tačke uvek je usmeren od te tačke ka osi obrtanja (najkraćim putem). Intenzitet normalnog ubrzanja jednak je proizvodu između najkraćeg rastojanja te tačke do ose obrtanja i kvadrata ugaone brzine tela:

$$a_{AN} = \overline{OA}\cdot\omega^2,\; a_{BN} = \overline{OB}\cdot\omega^2$$

Kao i kod brzine, vektor tangencijalnog ubrzanja svake tačke ima pravac tangente na njenu kružnu putanju, pa je stoga upravan na duž koja povezuje tu tačku sa njoj najbližom tačkom na osi obrtanja. Zbog toga je:

$$\vec{a}_{AT} \perp \overline{OA} \;\text{ i }\; \vec{a}_{BT} \perp \overline{OB}.$$

Smer tangencijalnog ubrzanja neke tačke odgovara smeru ugaonog ubrzanja. Intenzitet tangencijalnog ubrzanja se dobija množenjem najkraćeg rastojanja između tačke i ose obrtanja sa ugaonim ubrzanjem:

$$a_{AT} = \overline{OA}\cdot\varepsilon,\quad a_{BT} = \overline{OB}\cdot\varepsilon$$

73. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog obrtanja. Ugaona brzina preko n[o/min]

Jednoliko (ravnomerno) obrtno kretanje (obrtanje)

$$\boxed{\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = const.}$$

$d\varphi = \omega dt$ - diferencijalna jednačina

$\varphi(0) = 0$ - početni uslov

$$\boxed{\Rightarrow \varphi(t) = \omega \cdot t}$$ - Zakon ugla rotacije

Jednako (ravnomerno) promenljivo obrtanje

Ovde je ε (ugaono ubrzanje, usporenje) konstantno

$\ddot{\varphi} = \varepsilon > 0$ (jednako ubrzano), ε-ugaono ubrzanje ili

$\ddot{\varphi} = -\varepsilon < 0$ (jednako usporeno), ε-ugaono usporenje

Neka su početni uslovi:

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

$\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} = \varepsilon = const. \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega_0 + \varepsilon t$ -Zakon ugaone brzine

$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon ugla rotacije

} jednako ubrzano

$\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\varepsilon = const. \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \omega_0 - \varepsilon t$ -Zakon ugaone brzine

$d\varphi = (\omega_0 - \varepsilon t)dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega_0 \cdot t - \varepsilon \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon ugla rotacije

} jednako usporeno

Na osnovu zakona ugla rotacije kod ravnomernog obrtanja, ugaonu brzinu ω [*1/s*] određuje formula $\omega = \varphi / t$, gde je *t* [*s*] proteklo vreme a φ [*rad*] je pređeni ugao rotacije koji odgovara proteklom vremenu.

Ako bi telo pri ravnomernom obrtnom kretanju učinilo *n* obrtaja u jednom minutu (dakle, dimenzija za *n* je [*o/min*].), onda bi proteklom vremenu $t = 60$ *s* odgovarao pređeni ugao rotacije $\varphi = 2\pi \cdot n$ *rad*.

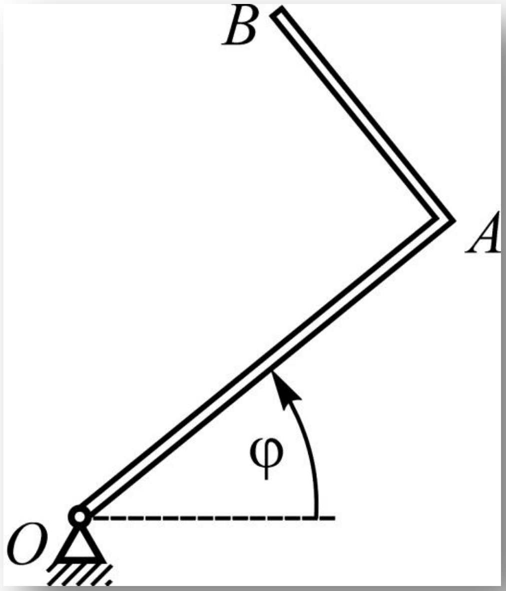
Uvrštavanjem $t = 60$ *s* i $\varphi = 2\pi \cdot n$ *rad* u formulu $\omega = \varphi / t$, dobija se:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi n}{30} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{30\omega}{\pi}.}$$

Dobijene jednakosti predstavljaju traženu vezu između ugaone brzine ω izražene u radijanima u sekundi $\omega\,[rad/s]$ ($[rad/s] = [1/s] = [s^{-1}]$) i *n* [*o/min*].

Pimer 2.1

Pravougli ugaonik *OAB* obrće se u ravni crteža oko zgloba *O* (tj. obrće se oko ose koja prolazi kroz zglob *O* i upravna je na ravan crteža). Dužine krakova ugaonika su $\overline{OA} = \sqrt{3}\ m$ i $\overline{AB} = 1\ m$.

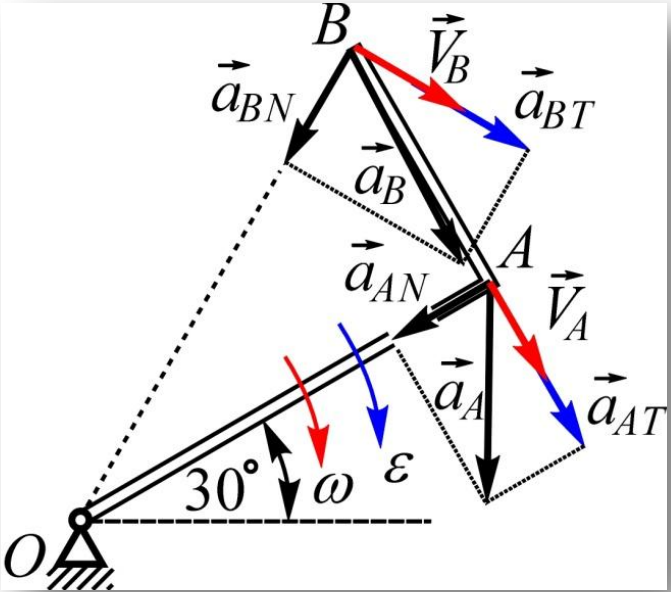


Jednačina obrtnog kretanja ugaonika je:

$$\boxed{\varphi(t) = \pi/6 + t - t^2}$$

Odrediti položaj, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje ugaonika u trenutku $t = 1\ s$? Zatim u tom trenutku odrediti i skicirati vektore brzina i komponenata ubrzanja tačaka *A* i *B*?

Ugaona brzina i ugaono ubrzanje:



$$\dot{\varphi}(t) = 1 - 2t \;\Rightarrow \dot{\varphi}(1) = -1 \Rightarrow \omega = 1\, s^{-1}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -2 \;\Rightarrow \ddot{\varphi}(1) = -2 \Rightarrow \varepsilon = 2\, s^{-1}$$

Smerovi za ω i ε su, zbog predznaka „minus“, suprotni od porasta ugla φ. Dakle, u smeru kazaljke na satu.

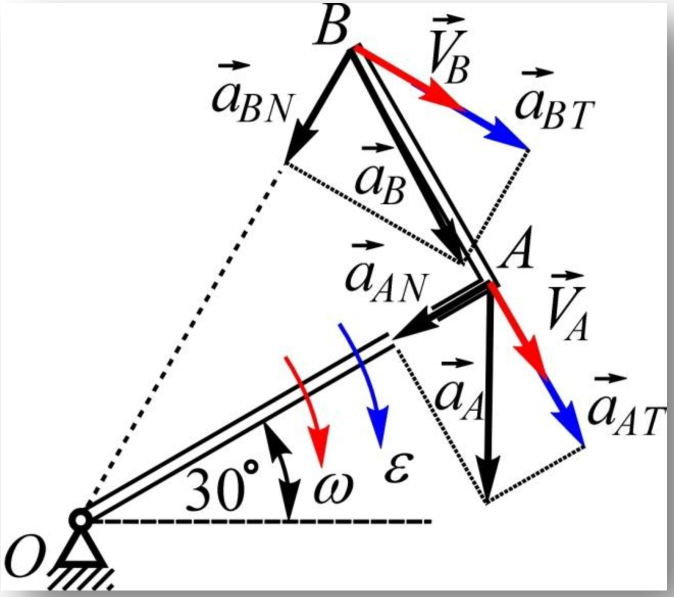
Zbog $\varphi(1) = \pi/6\ rad$ položaj ugaonika je takav da njegov krak *OA* gradi sa horizontalom ugao od 30º.

Iz pravouglog trougla *OAB* dobija se dužina njegove hipotenuze *OB*:

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2\ m$$

Intenziteti traženih brzina su:

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega = \sqrt{3}\ m/s,\ V_B = \overline{OB} \cdot \omega = 2\ m/s$$



Intenziteti traženih komponenata ubrzanja su:

$$a_{AN} = \overline{OA} \cdot \omega^2 = \sqrt{3}\ m/s^2, \quad a_{AT} = \overline{OA} \cdot \varepsilon = 2\sqrt{3}\ m/s^2,$$
$$a_{BN} = \overline{OB} \cdot \omega^2 = 2\ m/s^2, \quad a_{BT} = \overline{OB} \cdot \varepsilon = 4\ m/s^2.$$

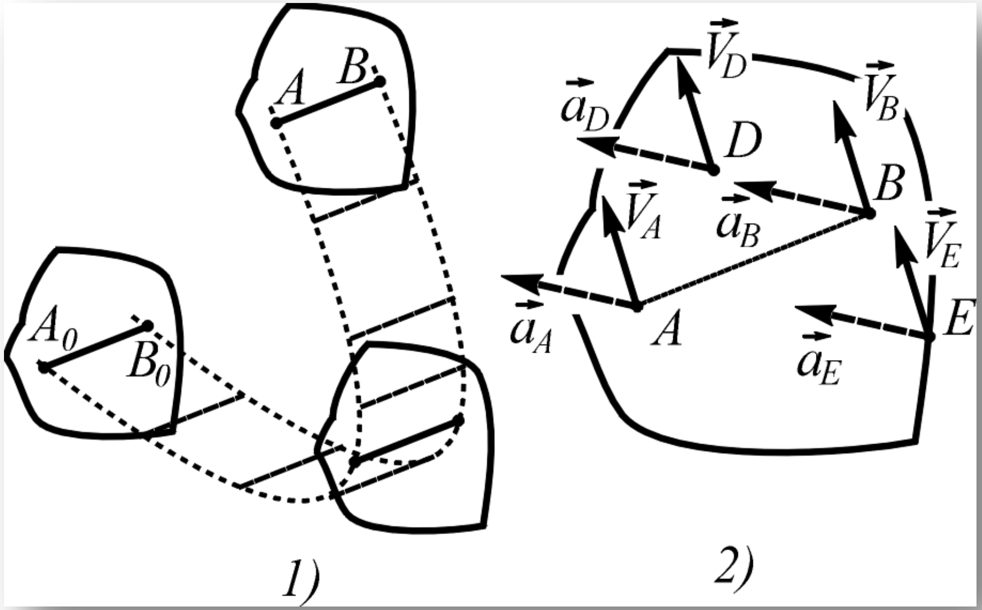
Na osnovu ovih vrednosti intenziteti ubrzanja tačaka *A* i *B* su:

$$a_A = \sqrt{a_{AN}^2 + a_{AT}^2} = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}\ m/s^2,$$
$$a_B = \sqrt{a_{BN}^2 + a_{BT}^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$

74. Translatorno kretanje krutog tela. Primeri za pravolinijsko i krivolinijsko translatorno kretanje

Kod translatornog kretanja tela svaka njegova uočena duž, npr. *AB* (Sl.1), tokom kretanja ne menja svoj pravac (tj. u svakom trenutku je paralelna svom početnom pravcu A_0B_0). Zbog toga je:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const.}$$



Vektori brzina svih tačaka tela koje se translatorno kreće u nekom tenutku vremena moraju biti isti (Sl.2). Vektori ubrzanja takođe.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}_D = \vec{V}_E = \ldots$$
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_D = \vec{a}_E = \ldots$$

Dokaz:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \left.\frac{d}{dt}\right| \vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A, \left.\frac{d}{dt}\right| \vec{V}_B = \vec{V}_A \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Primer 2.2

Trougaona ploča kreće se translatorno pravolinijski. Jednačina kretanja njene tačke A, a samim tim i ploče, je:

$$x_A(t) = 7t/2 - t^3/6.$$

Odrediti i skicirati vektore brzina i ubrzanja tačaka A i B i C u trenutku $t = 1\ s$?

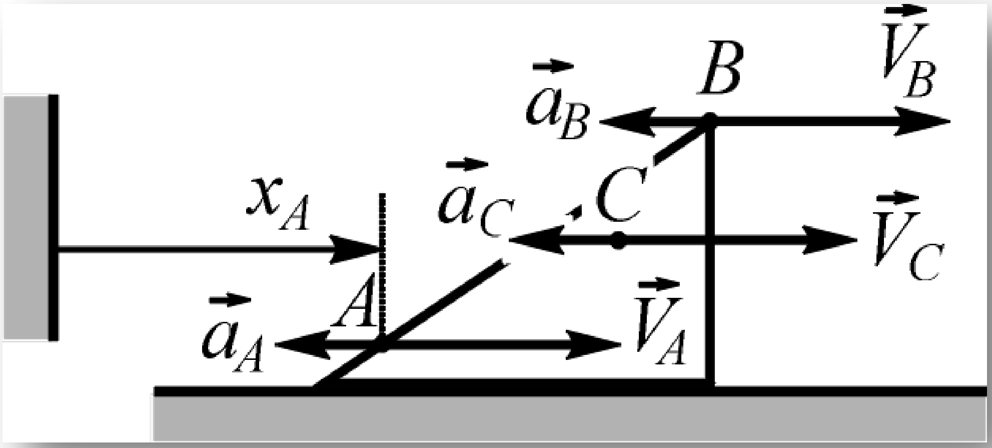
Brzina i ubrzanje tela (odnosno, tačaka tela):

$$\dot{x}_A(t) = 7/2 - t^2/2 \Rightarrow \dot{x}_A(1) = +3 \Rightarrow V_A = V_B = V_C = 3\ m/s$$

$$\ddot{x}_A(t) = -t \Rightarrow \ddot{x}_A(1) = -1 \Rightarrow a_A = a_B = a_C = 1\ m/s^2$$

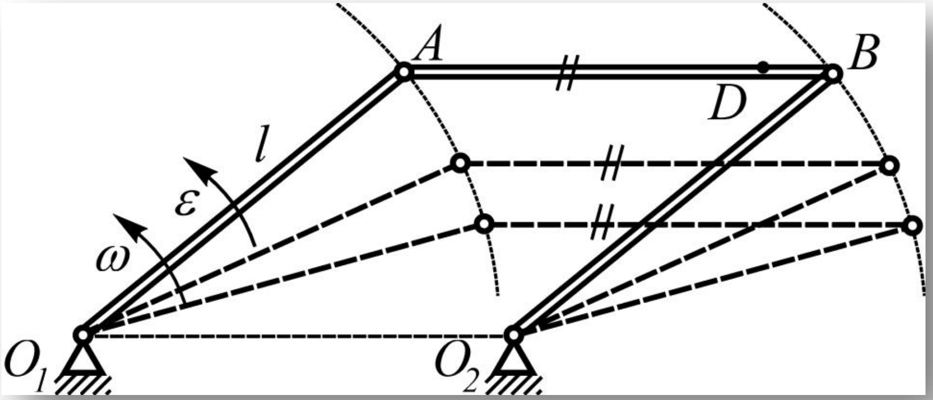
Vektori brzina imaju smer koji se, zbog predznaka „plus“, poklapa sa smerom porasta koordinate x_A.

Vektori ubrzanja imaju smer koji je, zbog predznaka „minus“, suprotan od smera porasta koordinate x_A.



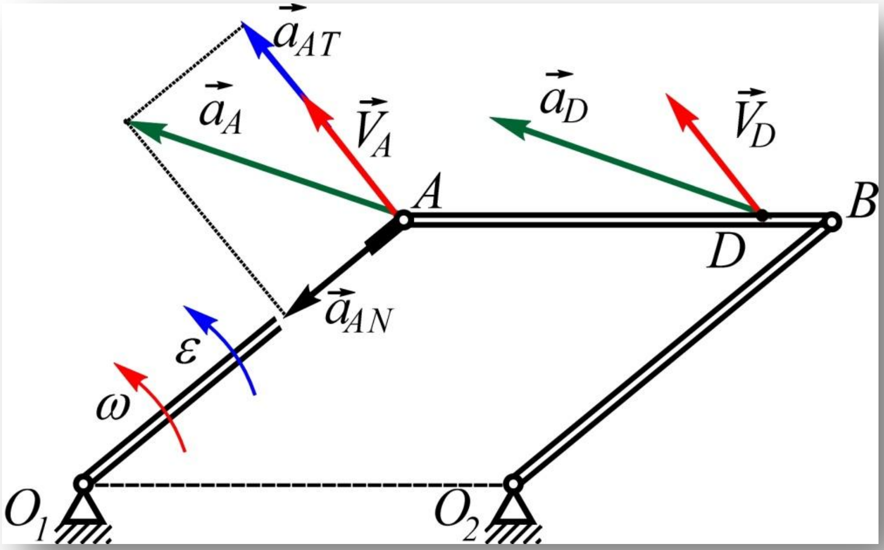
Primer 2.3

Ravanski mehanizam prikazan na slici (zglobni četvorougao) sačinjen je od dva identična štapa ($\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = l$) i horizontalnog štapa AB ($\overline{O_1O_2} = \overline{AB}$) koji je zglobno povezan sa štapovima O_1A i O_2B.



Štapovi O_1A i O_2B vrše obrtanja oko zglobova O_1 i O_2. U položaju prikazanom na slici ugaona brzina štapa O_1A je ω a ugaono ubrzanje je ε, smerova datih na slici. U prikazanom položaju odrediti brzinu i ubrzanje proizvoljne tačke D štapa?

Zbog datih jednakosti četvorougao O_1O_2BA je uvek paralelogram a štap AB vrši krivolinijsko translatorno kretanje s obzirom da je u svakom trenutku istog pravca (uvek je horizontalan) a putanje njegovih tačaka su krivolinijske (kružne).



Odredimo prvo vektore brzine i ubrzanja tačke A, štapa AB, koristeći činjenicu da tačka pripada i štapu O_1A, čije je obrtno kretanje u tom položaju definisano veličinama ω i ε. Intenziteti vektora $\vec{V}_A$, $\vec{a}_{AN}$, $\vec{a}_{AT}$ i $\vec{a}_A$, prikazanih na slici su:

$$V_A = l \cdot \omega,\ \ a_{AN} = l \cdot \omega^2,\ \ a_{AT} = l \cdot \varepsilon,\ \ a_A = \sqrt{a_{AN}^{\ \ 2} + a_{AT}^{\ \ 2}} = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

Zbog činjenice da štap AB vrši translatorno kretanje imamo da je

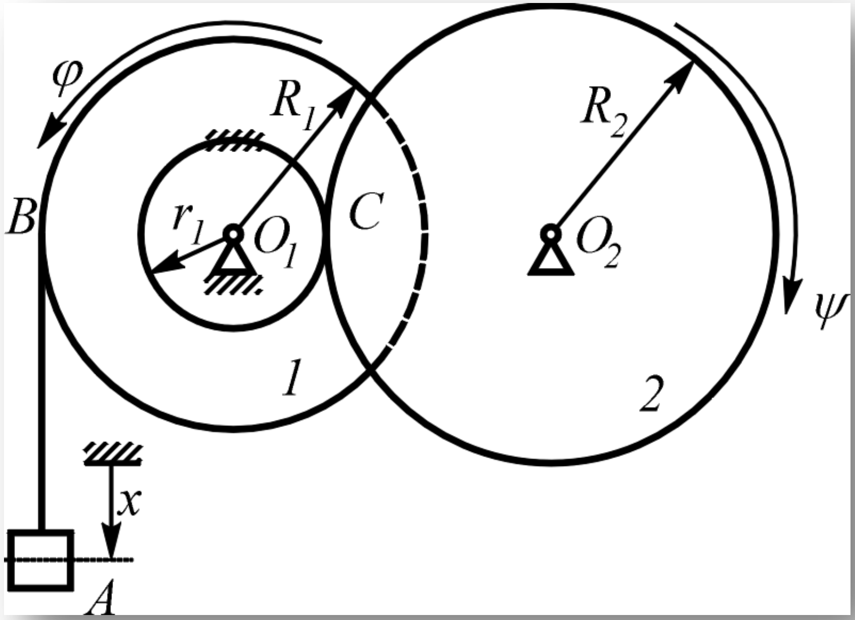
$$\vec{V}_D = \vec{V}_A \ \text{ i } \ \vec{a}_D = \vec{a}_A.$$

$$\Rightarrow \quad V_D = V_A = l \cdot \omega,\ \ a_D = a_A = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

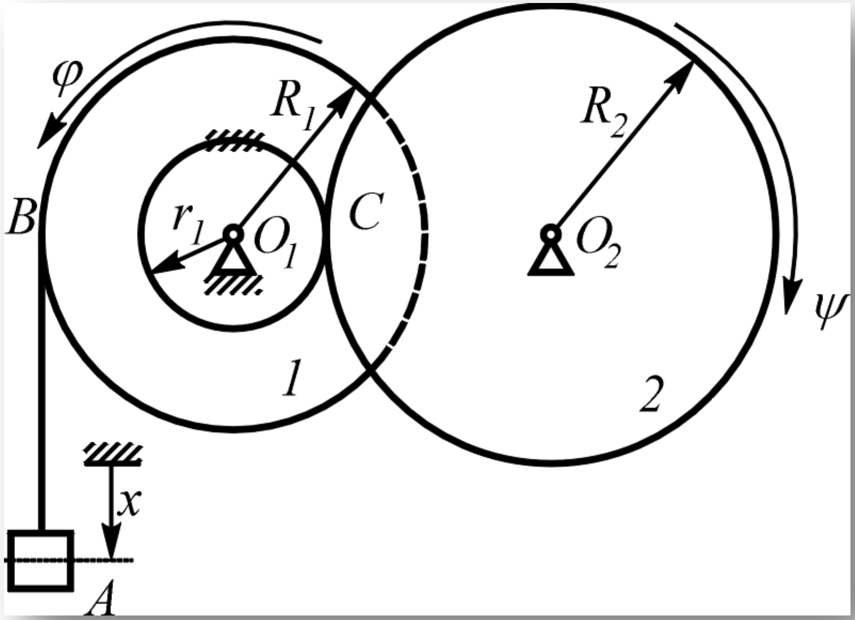
Primer 2.3

Sistem čine teret *A*, koji se kreće vertikalno naniže, i dva doboša *1* i *2*, koji vrše obrtanja oko zglobova O_1 i O_2, postavljenih u njihovim centrima. Doboš *1* je sačinjen od dva kruto vezana diska, poluprečnika r_1 i R_1 a doboš 2 je poluprečnika R_2. Nerastegljivo uže, namotano na veći disk doboša *1* na svom kraju je vezano za teret *A*. Uže pri kretanju ne proklizava u odnosu na disk. Pri kretanju sistema, manji disk doboša *1* uz pomoć trenja prouzrokuje obrtanje doboša *2* tako da nema proklizavanja između njih.

Odrediti zakone obrtnih kretanja doboša $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ ako je zakon kretanja tereta $x(t)=bt^2/2$? Takođe odrediti i skicirati vektore brzine i ubrzanja najudaljenijih tačaka *K* i *M* doboša *1* i *2*, respektivno, u trenutku $t = 1\ s$? Veličine r_1, R_1, R_2 i b smatrati poznatim.

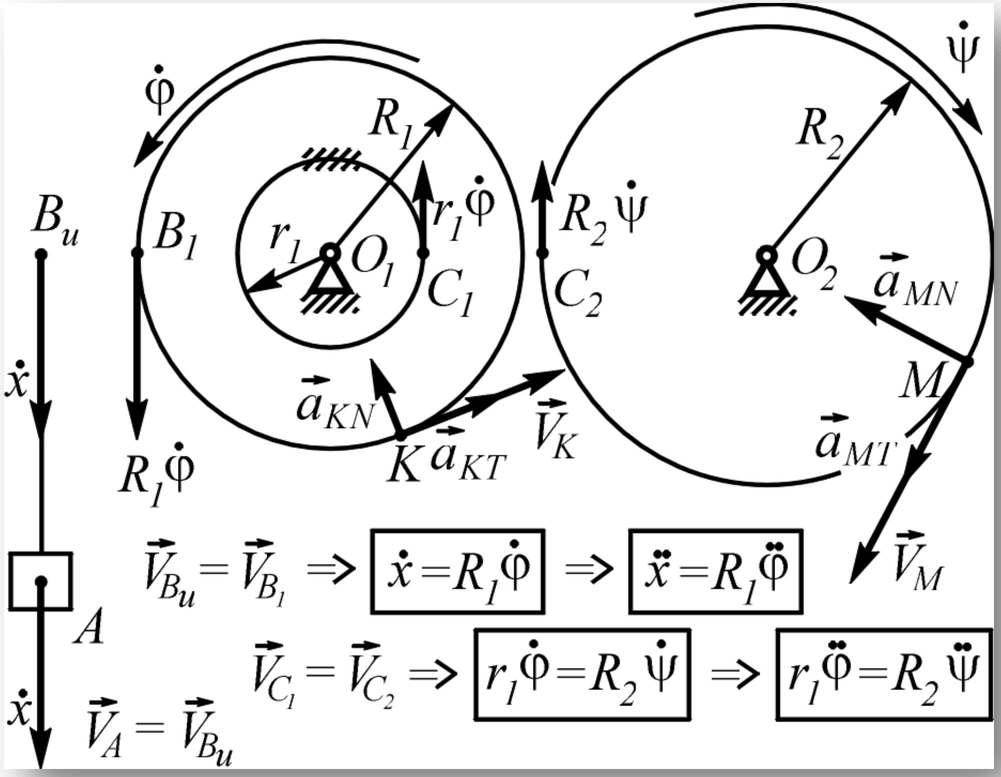


Mehanički sistem, prikazan na slici ima jedan stepen slobode kretanja zato što jedna koordinata, na primer *x*, određuje u potpunosti njegov položaj. To znači da sve druge koordinate, kao što su ovde φ i ψ, mogu biti izražene preko *x*. Za nalaženje traženih veza između ovih koordinata traže se prvo veze na nivou brzina i ugaonih brzina.



Važno je znati da ako između dva elementa koji se sprežu nema proklizavanja (tj. odvija se kotrljanje bez klizanja) vektori brzina dodirnih tačaka tih elemenata moraju biti jednaki. Na taj način je na slici, gde su odvojeno prikazani teret sa pravolinijskim delom nerastegljivog užeta, doboš *1* i doboš *2*, konstatovana jednakost brzina dodirnih tačaka ovih doboša zbog čega je

$$\boxed{r_1\dot{\varphi} = R_2\dot{\psi}.}$$



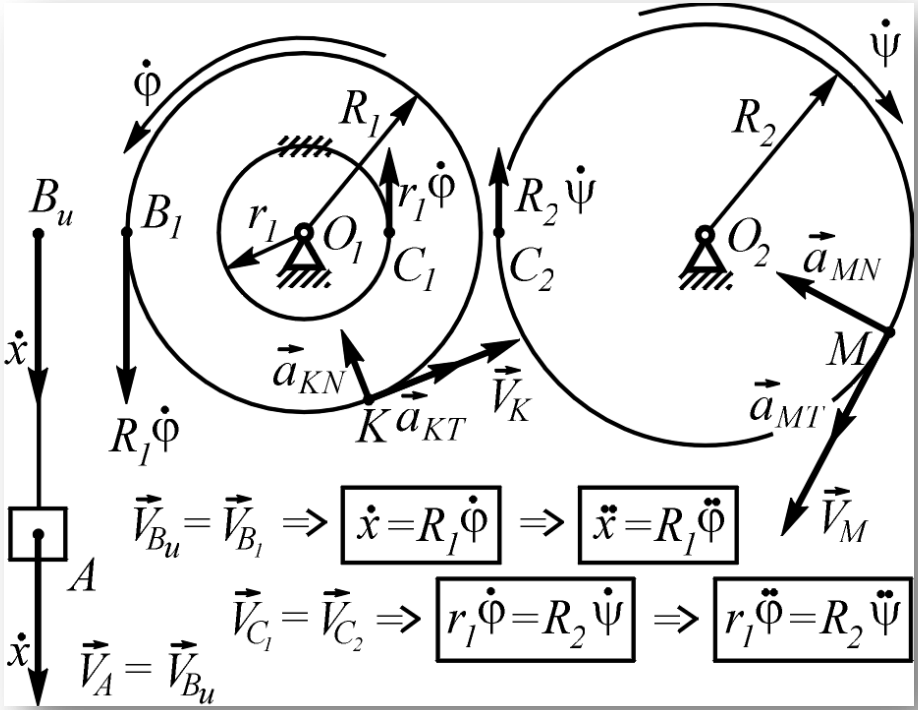
Takođe je važno znati da, kada namotano uže na doboš pri kretanju (odmotavanju ili namotavanju) ne proklizava u odnosu na njega vektori brzina tačke užeta i tačke doboša nad kojom se ona nalazi su jednaki. Na taj način je na slici konstatovana jednakost brzina tačke B_u na užetu i tačke B_1 doboša *1* nad kojom se ona nalazi što je dovelo do veze

$$\boxed{\dot{x} = R_1\dot{\varphi}}$$

Diferenciranjem gornjih veza po vremenu dobijaju se sledeće veze između ubrzanja

$$\boxed{r_1\ddot{\varphi} = R_2\ddot{\psi}, \quad \ddot{x} = R_1\ddot{\varphi}.}$$

Integraljenjem dobijenih veza uz nulte početne uslove (to su takvi uslovi gde se podrazumeva da koordinate φ i ψ imaju vrednost nula kada je i x koordinata jednaka nuli) dobijaju se veze između samih koordinata



$$\boxed{r_1\varphi = R_2\psi, \quad x = R_1\varphi.}$$

Na slici konstatovana je i jednakost brzina tačaka A i B_u , koja je posledica činjenice da pravolinijski deo užeta vrši translatorno kretanje.

Na osnovu veza koordinata lako se dobijaju traženi zakoni:

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{x(t)}{R_1} = \frac{b}{R_1}t^2, \quad \psi(t) = \frac{r_1\varphi(t)}{R_2} = \frac{r_1 b}{R_2 R_1}t^2.}$$

Pošto izvodi po vremenu zadate jednačine kretanja daju $\dot{x}(t) = bt$ i $\ddot{x}(t) = b$, a s obzirom na dobijene veze, intenziteti vektora brzina i komponenata ubrzanja tačaka *K* i *M* u funkciji vremena su:

$$V_K(t) = R_1\dot{\varphi}(t) = \dot{x}(t) = bt,\ a_{KT}(t) = R_1\ddot{\varphi}(t) = \ddot{x}(t) = b,\ a_{KN}(t) = R_1\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{\dot{x}(t)^2}{R_1} = \frac{b^2t^2}{R_1},$$

$$V_M(t) = R_2\dot{\psi}(t) = r_1\dot{\varphi}(t) = \frac{r_1}{R_1}\dot{x}(t) = \frac{r_1}{R_1}bt,\ a_{MT}(t) = R_2\ddot{\psi}(t) = r_1\ddot{\varphi}(t) = \frac{r_1}{R_1}\ddot{x}(t) = \frac{r_1}{R_1}b,$$

$$a_{MN}(t) = R_2\dot{\psi}(t)^2 = R_2\left(\frac{r_1}{R_1R_2}bt\right)^2 = \frac{r_1^{\,2}b^2t^2}{R_1^{\,2}R_2}.$$

Vrednosti ovih veličina, kao i intenziteta samih ubrzanja tačaka *K* i *M* u trenutku $t = 1\,s$ su:

$$V_K = b,\ a_{KT} = b,\ \ a_{KN} = \frac{b^2}{R_1}\ \ \Rightarrow a_K = \sqrt{a_{KT}^{\ 2} + a_{KN}^{\ 2}} = b\sqrt{1 + \frac{b^2}{R_1^{\ 2}}}$$

$$V_M = \frac{r_1}{R_1}b,\ \ a_{MT} = \frac{r_1}{R_1}b,\ \ a_{MN} = \frac{r_1^{\,2}b^2}{R_1^{\,2}R_2}\ \ \Rightarrow a_M = \sqrt{a_{MT}^{\ 2} + a_{MN}^{\ 2}} = \frac{r_1b}{R_1}\sqrt{1 + \frac{r_1^{\,2}b^4}{R_1^{\,2}R_2^{\,2}}}$$

Šta smo naučili?

71. **Obrtanje krutog tela oko nepomične ose. Ugao rotacije tela. Zakon obrtnog kretanja krutog tela. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje krutog tela. Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.**
72. **Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće.**
73. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog obrtanja. Ugaona brzina preko n[o/min].**
74. **Translatorno kretanje krutog tela. Primeri za pravolinijsko i krivolinijsko translatorno kretanje.**

Mehanika
Predavanja 11

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.