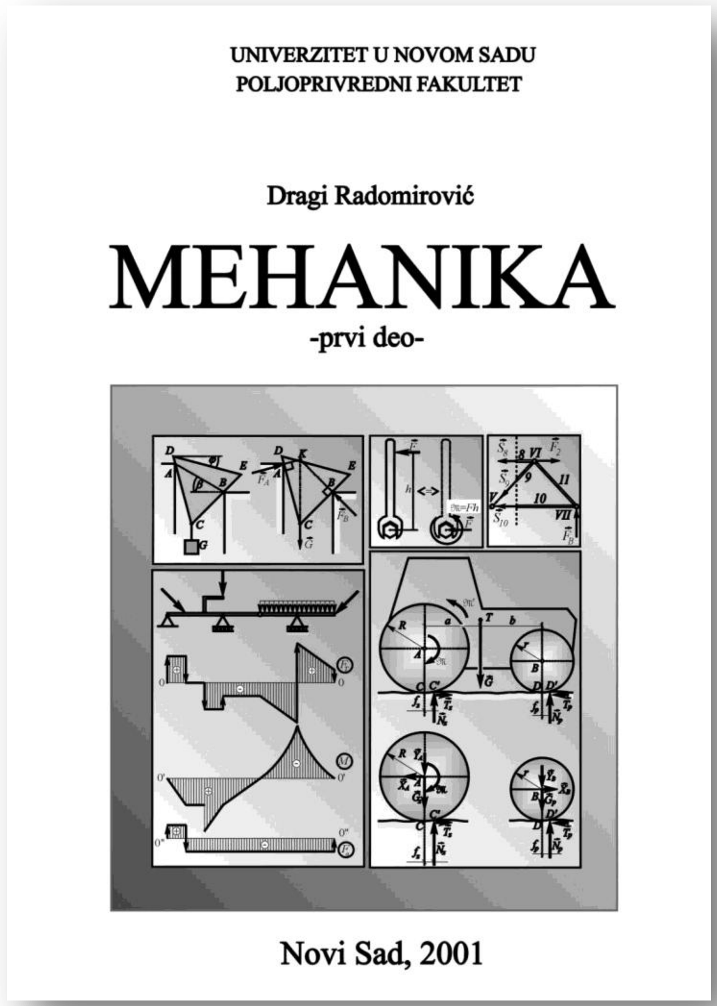
Mehanika
Predavanja 10

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.

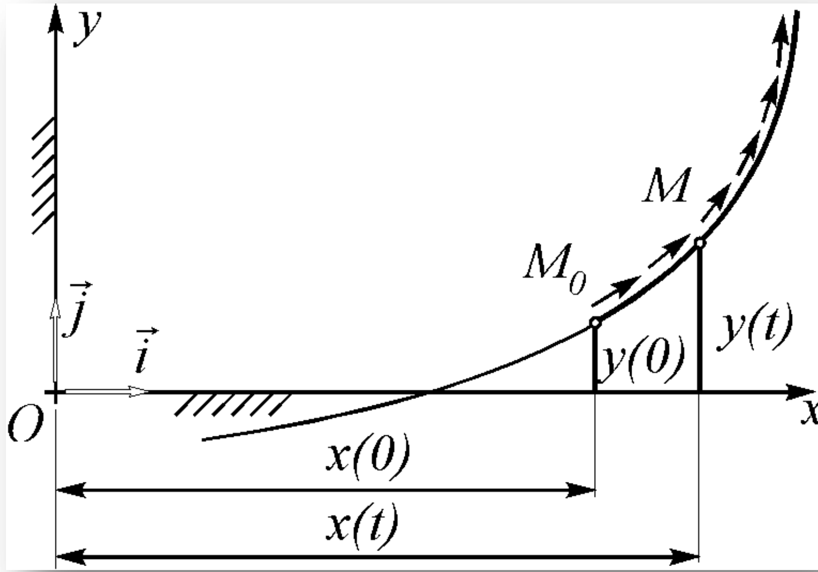
Literatura


UNIVERZITET U NOVOM SADU
POLJOPRIVREDNI FAKULTET
Dragi Radomirović
MEHANIKA
-prvi deo-
Novi Sad, 2001

Šta ćemo naučiti?

63. **Krivolinijsko kretanje tačke u ravni opisano u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. Jednačine kretanja. Linija putanje. Putanja.**
64. **Vektori brzine i ubrzanja tačke u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu i njihove projekcije na koordinatne ose.**
65. **Krivolinijska koordinata. Jedinični vektori tangente i normale. Vektor brzine izražen preko njegove projekcije na tangentu i njegov intenzitet.**
66. **Tangencijalno i normalno ubrzanje.**
67. **Određivanje poluprečnika krivine putanje (kinematički način).**
68. **Zakon pravolinijskog kretanja tačke. Projekcije brzine i ubrzanja na osu duž koje se vrši kretanje. Vektori brzine i ubrzanja.**
69. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog pravolinijskog i krivolinijskog kretanja.**
70. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog krivolinijskog kretanja.**

63. Krivolinijsko kretanje tačke u ravni opisano u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. Jednačine kretanja. Linija putanje. Putanja.



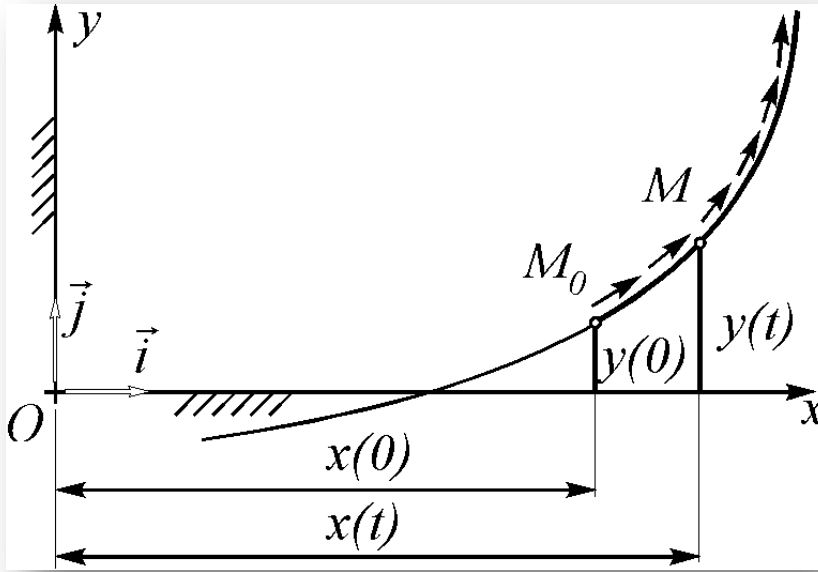
Jednačine kretanja:

$$\boxed{x(t) \ \text{ i } \ y(t)}$$

u potpunosti određuju sve pojmove vezane za kinematiku tačke kao što su: linija putanje, putanja (trajektorija), brzina, ubrzanje i poluprečnik krivine putanje. Funkcija, kriva ili prava, dobijena eliminacijom vremena *t* iz jednačina kretanja naziva se linijom putanje i nju ćemo u svakom primeru crtati.

U većini primera linija putanje se svodi na oblik:

$$\boxed{y(x) \text{ ili } x(y) \text{ ili } f\,(x,y)=0}$$



Podrazumevaće se da trenutku započinjanja kretanja (početnom trenutku) odgovara $t=0$ i da se pri kretanju vreme t stalno povećava. Početni položaj tačke M_0, određen koordinatama $x(0)$ i $y(0)$, određuje se stavljanjem nule umesto t u jednačine kretanja.

Putanja (trajektorija) je onaj deo linije putanje na kom tačka može da se nađe u vremenskom intervalu $t \geq 0$. Taj deo je na slici prikazan debljom linijom.

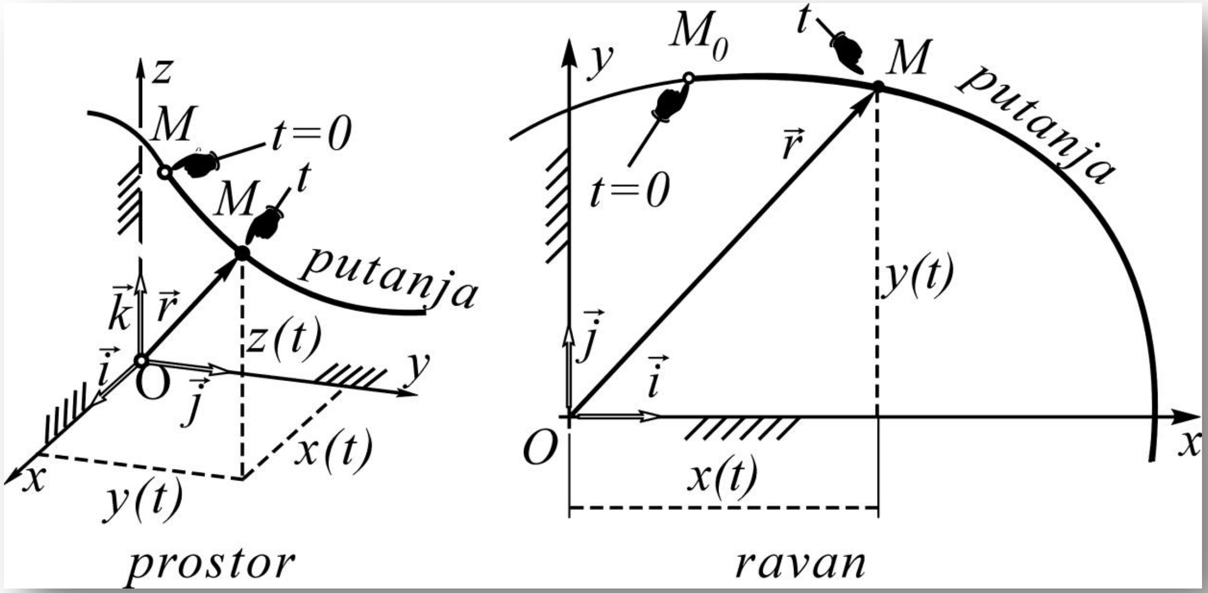
64. Vektori brzine i ubrzanja tačke u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu i njihove projekcije na koordinatne ose

Vektorom položaja pokretne tačke M naziva se vektor koji se proteže od koordinatnog početka do te tačke:

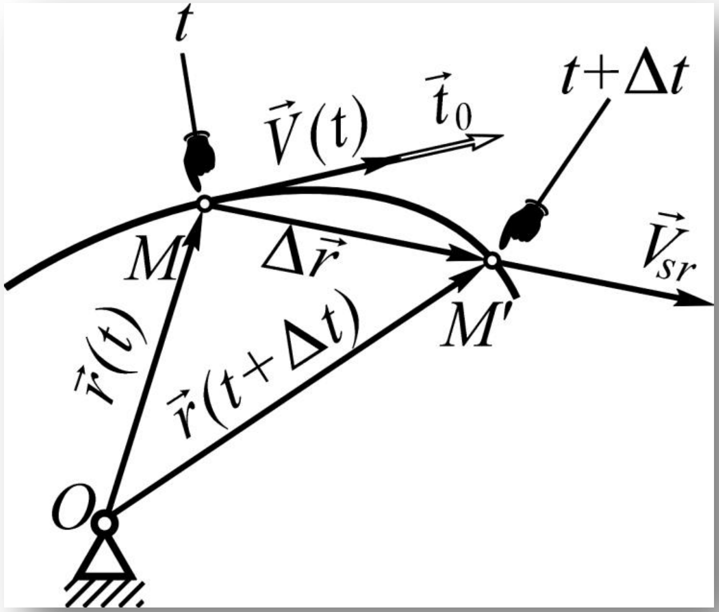
$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}(0)=\overrightarrow{OM_0}=x(0)\vec{i}+y(0)\vec{j}$$

Dakle, $x(t)$ i $y(t)$, osim što su jednačine kretanja, to su i projekcije vektora položaja i koordinate pokretne tačke u nepokretnom xOy koordinatnom sistemu.



$$\boxed{\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$



$\vec{V}_{sr}$ - Srednja brzina u vremenskom intervalu Δt

$\vec{t}_O$ - Jedinični vektor tangente na putanju

$$\boxed{\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)}$$

Vektor brzine $\vec{V}(t)$ pokretne tačke u proizvoljnom trenutku vremena je prvi izvod po vremenu vektora položaja $\vec{r}(t)$:

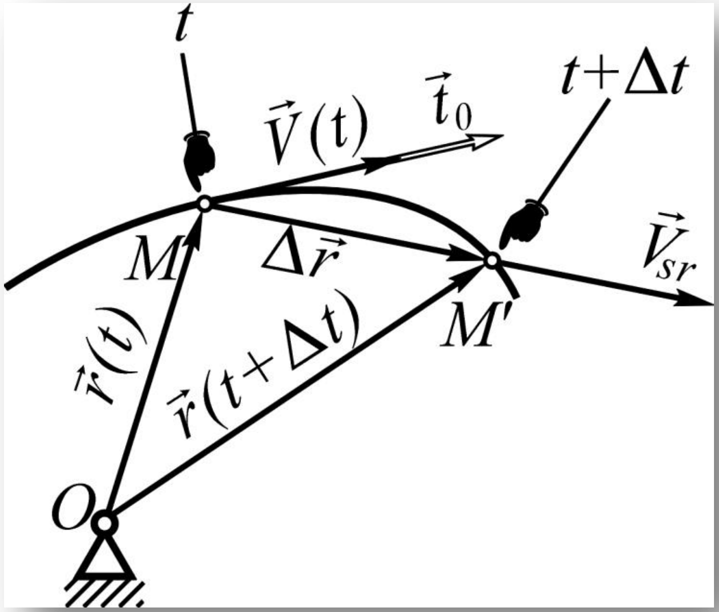
$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t)}$$

Za krivolinijsko kretanje pravac vektora brzine poklapa sa pravcem tangente.

Zbog

$$\vec{V}(t) = \dot{\vec{r}}(t),$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$



i činjenice da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni vektori, dobija se vektor brzine:

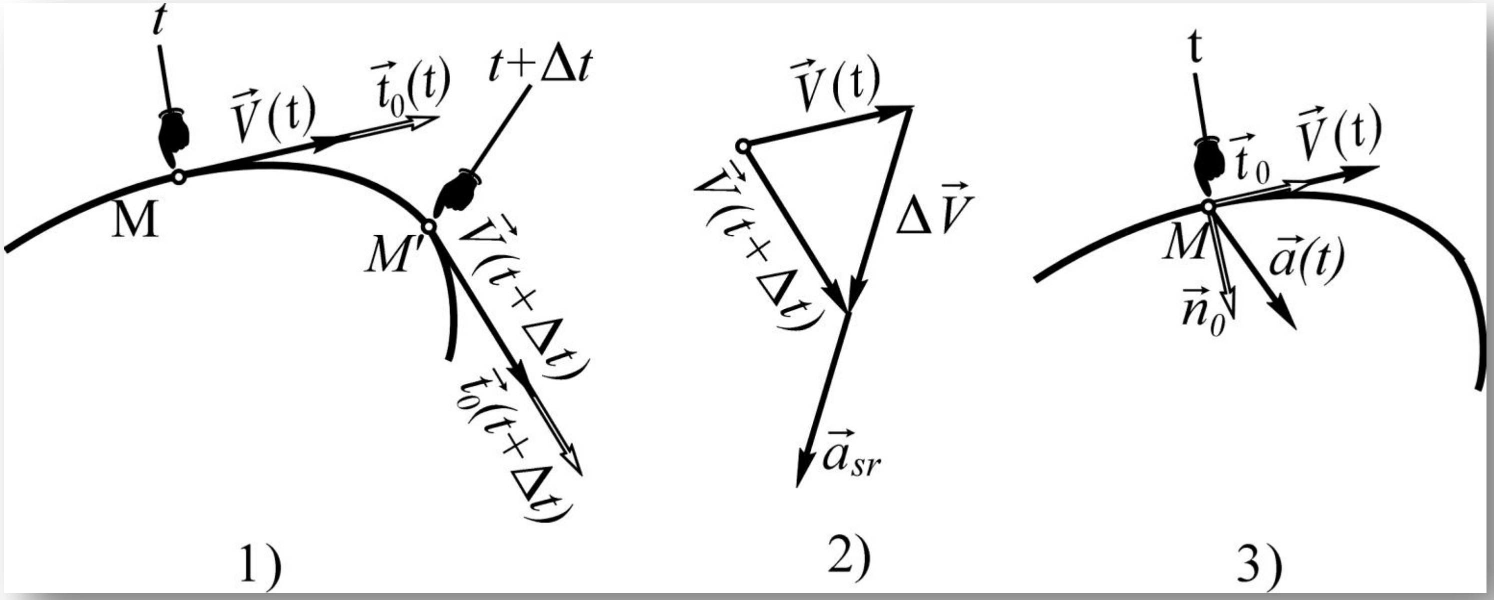
$$\boxed{\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}}$$

Projekcije vektora vrzine na koordinatne ose jednake su prvim izvodima po vremenu jednačina kretanja, odnosno koordinata pokretne tačke u nepokretnom *xOy* koordinatnom sistemu, dakle:

$$\boxed{V_x(t) = \dot{x}(t), \qquad V_y(t) = \dot{y}(t)}$$

Intenzitet vektora brzine:

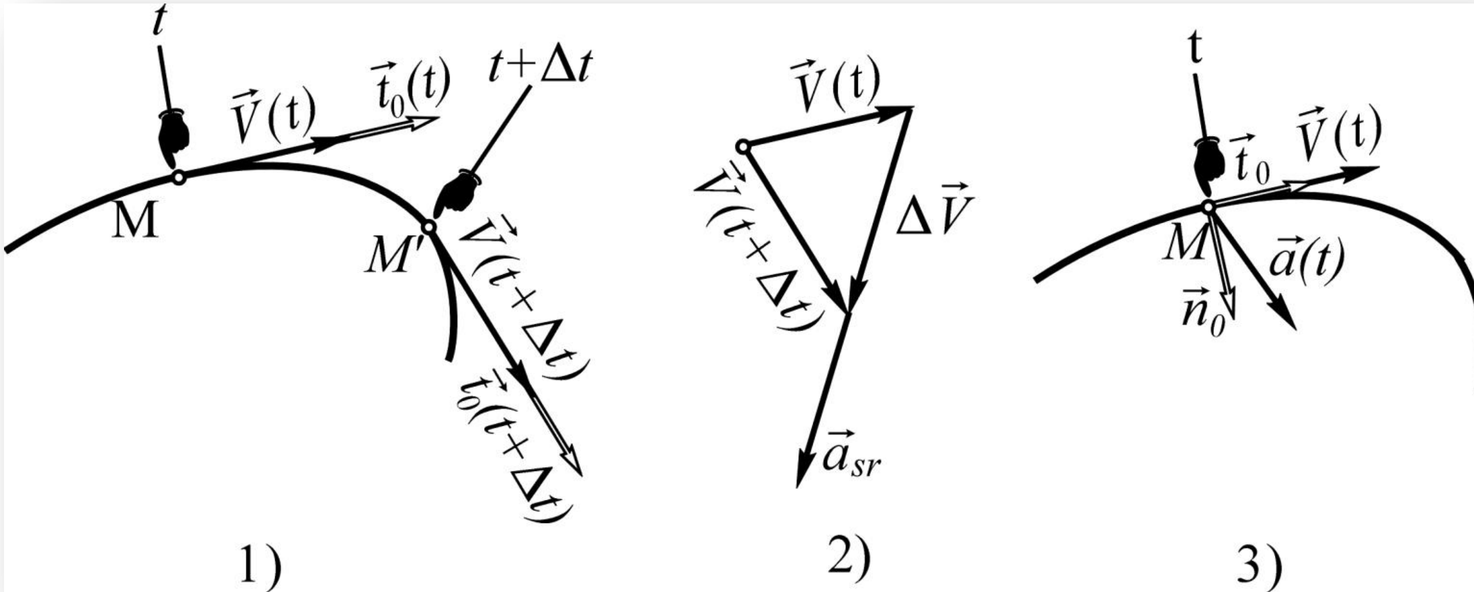
$$\boxed{V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$



$$\boxed{\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}$$

$\vec{a}_{sr}$ - srednje ubrzanje u vremenskom intervalu Δt

$\vec{n}_0$ - jedinični vektor normale na putanju



$$\boxed{\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\dot{\vec{V}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)}$$

Vektor ubrzanja $\vec{a}(t)$ pokretne tačke u proizvoljnom trenutku vremena, jednak je prvom izvodu po vremenu vektora brzine $\vec{V}(t)$, odnosno, drugom izvodu po vremenu vektora položaja $\vec{r}(t)$:

$$\boxed{\vec{a}(t)=\dot{\vec{V}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)}$$

Za krivolinijsko kretanje, u opštem slučaju, vektor ubrzanja je usmeren u konkavnu stranu putanje.

Zbog

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t),$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

i činjenice da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni vektori, dobija se vektor ubrzanja:

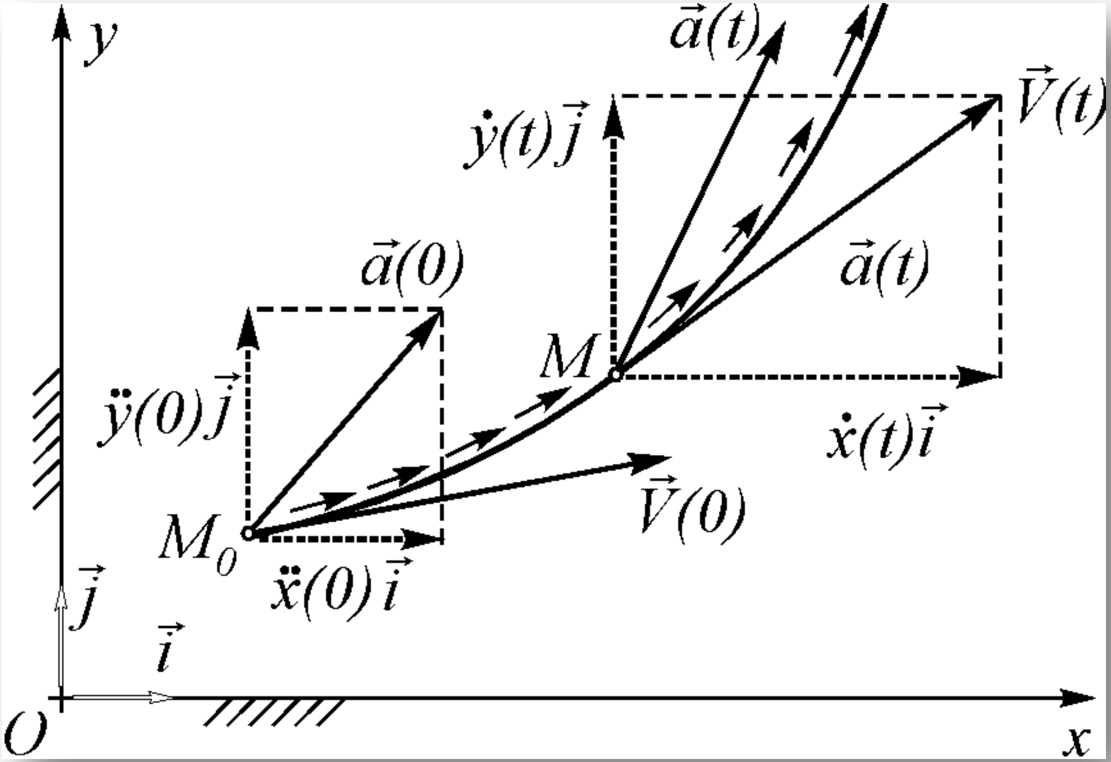
$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j},}$$

odakle se vidi da su njegove projekcije na koordinatne ose jednake drugim izvodima koordinata (jednačina kretanja) po vremenu:

$$\boxed{a_x(t) = \ddot{x}(t), \quad a_y(t) = \ddot{y}(t) \quad \Rightarrow a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}}$$

Te projekcije su, takođe, jednake prvim izvodima projekcija brzine, kao funkcija vremena, po vremenu:

$$\boxed{a_x(t) = \dot{V}_x(t), a_y(t) = \dot{V}_y(t).}$$



Na slici su nacrtani vektori brzine i ubrzanja u početnom M_0 i proizvoljnom M položaju, koji odgovaraju početnom i proizvoljnom trenutku vremena, respektivno.

Primer 1.1

Jednačine kretanja tačke u ravni su:

$$x = t \qquad \text{i} \qquad y = t^2$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu u trenutku $t=1s$? Odrediti ubrzanje u proizvoljnom trenutku?

Eliminacijom vremena t iz jednačina kretanja dobija se da je jednačina linije putanje parabola:

$$\boxed{y = x^2}$$

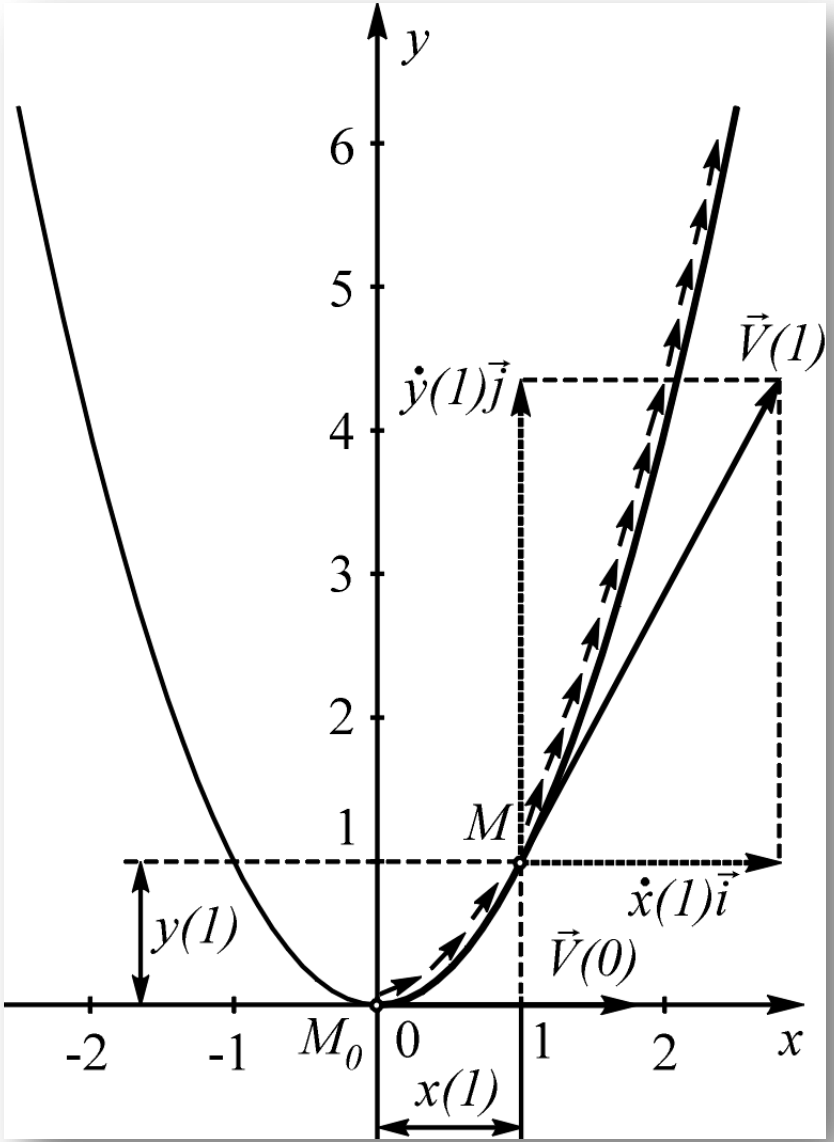
Početni položaj:

$$\boxed{x(0)=0, y(0)=0 \Rightarrow M_0(0,0)}$$

Putanja (trajektorija) je samo desna grana parabole.

Oblast kretanja:

$$\boxed{x \geq 0, y \geq 0}$$



Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena dobijaju se preko izvoda od jednačina kretanja:

$$\boxed{\begin{gathered} x = t,\ y = t^2 \\ \dot{x}(t) = 1,\ \dot{y}(t) = 2t,\ \ddot{x}(t) = 0,\ \ddot{y}(t) = 2 \end{gathered}}$$

Brzina u trenutku *t=1s* (prikazana je na slici sa prethodnog slajda) :

$$\boxed{\dot{x}(1) = 1,\ \dot{y}(1) = 2 \ \Rightarrow \vec{V}(1) = 1\vec{i} + 2\vec{j},\ \ V(1) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\ m/s}$$

Položaj u trenutku *t=1s* :

$$\boxed{x(1) = 1,\ y(1) = 1 \Rightarrow \ M(1,1)}$$

Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$$\boxed{\vec{a}(t) = 2\vec{j},\ a(t) = 2\ m/s^2}$$

Vektor ubrzanja je konstantan, paralelan sa *y* osom i usmeren naviše.

Primer 1.2

Jednačine kretanja tačke u ravni su

$$x = 2 + 3\sin 2t \qquad \text{i} \qquad y = 1 - 2\cos 2t$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti trajektoriju i skicirati je? Odrediti oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t = (\pi/4)$ s?

Jednačinu putanje dobićemo preuređenjem, kvadriranjem pa sabiranjem jednačina kretanja:

$$\frac{x-2}{3}=\sin 2t,\quad \frac{y-1}{2}=-\cos 2t \quad \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}=1$$

Jednačina elipse:

$$\frac{(x-x_C)^2}{u^2}+\frac{(x-y_C)^2}{b^2}=1$$

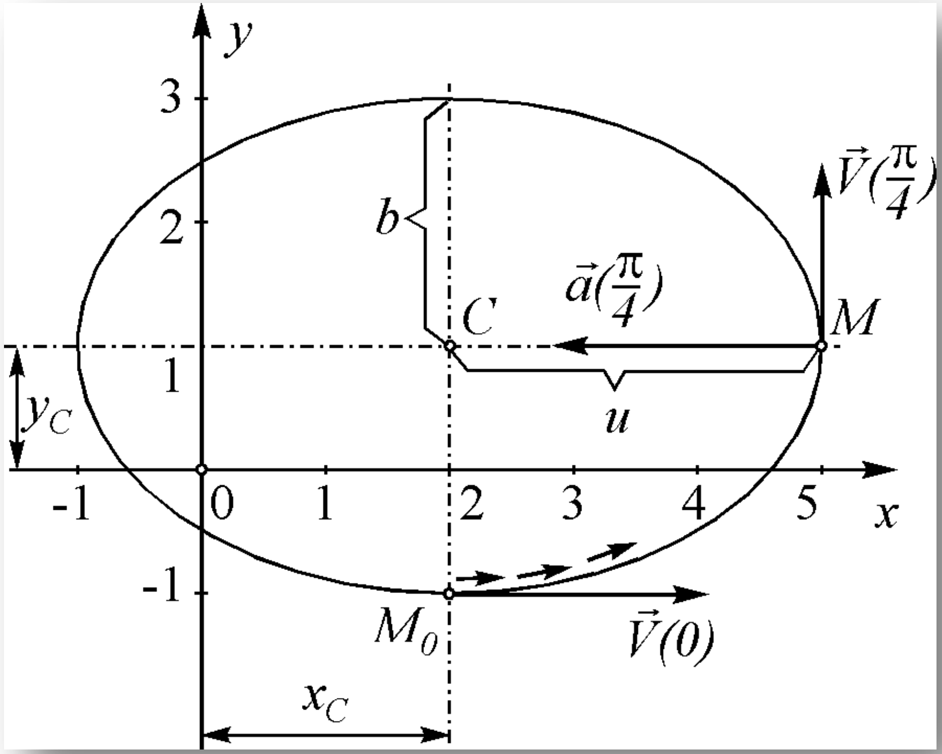
$x_C=2,\ y_C=1,\quad u=3$ i $b=2$.

Oblast kretanja:

$$-1\le x\le 5,\ -1\le y\le 3$$

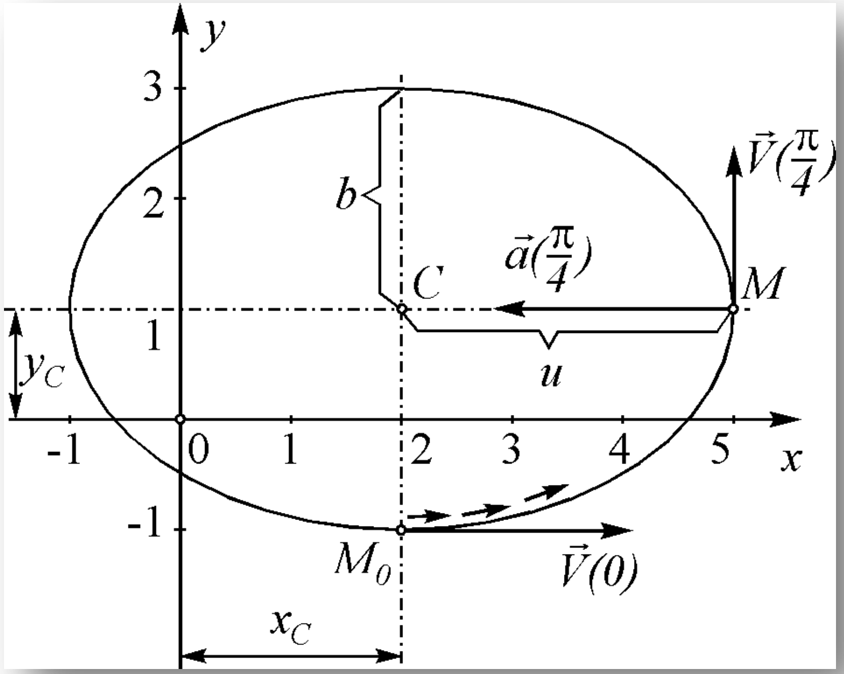
Početni položaj:

$$x(0)=2,\ y(0)=-1 \Rightarrow \quad M_0(2,-1)$$



$$x = 2 + 3\sin 2t \quad y = 1 - 2\cos 2t$$

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:



$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 6\cos 2t \\ \dot{y}(t) &= 4\sin 2t \\ \ddot{x}(t) &= -12\sin 2t \\ \ddot{y}(t) &= 8\cos 2t \end{aligned}}$$

Položaj, brzina i ubrzanje u trenutku $t = (\pi/4)$:

$$\boxed{x(\pi/4) = 5,\ y(\pi/4) = 1}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \dot{x}(\pi/4) = 0 \\ \dot{y}(\pi/4) = 4 \end{matrix} \quad \vec{V}(\pi/4) = 4\vec{j} \quad V(\pi/4) = 4\ m/s}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \ddot{x}(\pi/4) = -12 \\ \ddot{y}(\pi/4) = 0 \end{matrix} \quad \vec{a}(\pi/4) = -12\vec{i} \quad a(\pi/4) = 12\ m/s^2}$$

Primer 1.3

Jednačine kretanja tačke u ravni su:

$$x = 2t^2 - 1 \qquad \text{i} \qquad y = t^2 + 2$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t=1s$?

Eliminacije vremena t (određivanje jednačine linije putanje) :

$$y = t^2 + 2 \Rightarrow t^2 = y - 2,\ x = 2t^2 - 1 = 2(y-2) - 1 \Rightarrow x = 2y - 5$$

Početni položaj:

$$x(0) = -1,\ y(0) = 2\ \Rightarrow M_0(-1,2)$$

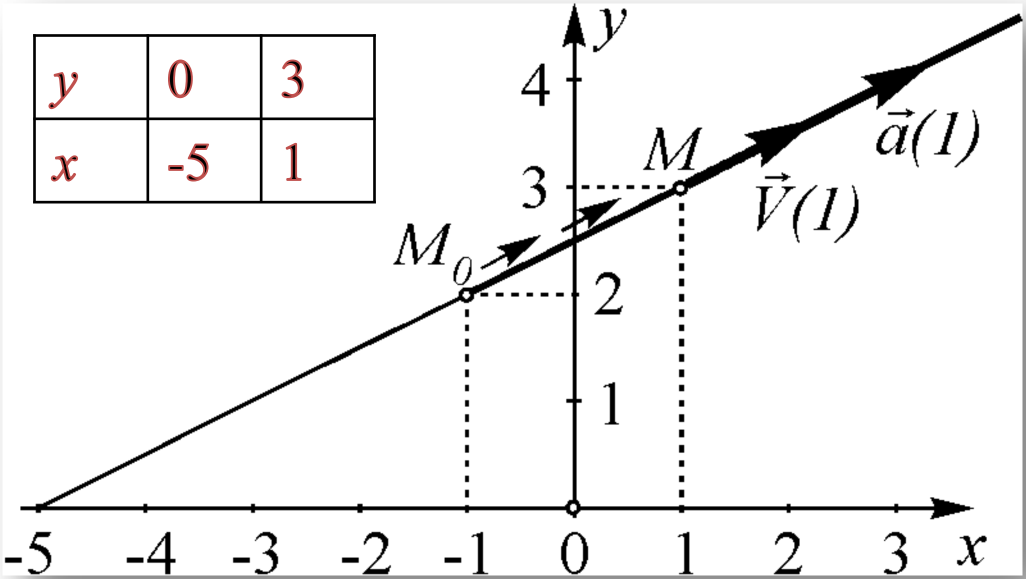
Tačka se kreće stalno u jednom smeru (gore desno) pošto sa porastom vremena t, obe koordinate i x i y se stalno povećavaju.

Zbog toga je trajektorija poluprava (podebljani deo linije putanje) a oblast kretanja je

$$x \geq -1,\ \ y \geq 2$$

Položaj tačke u trenutku $t=1s$

$$x(1) = 1,\ y(1) = 3\ \Rightarrow M(1,3)$$



y	0	3
x	-5	1

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

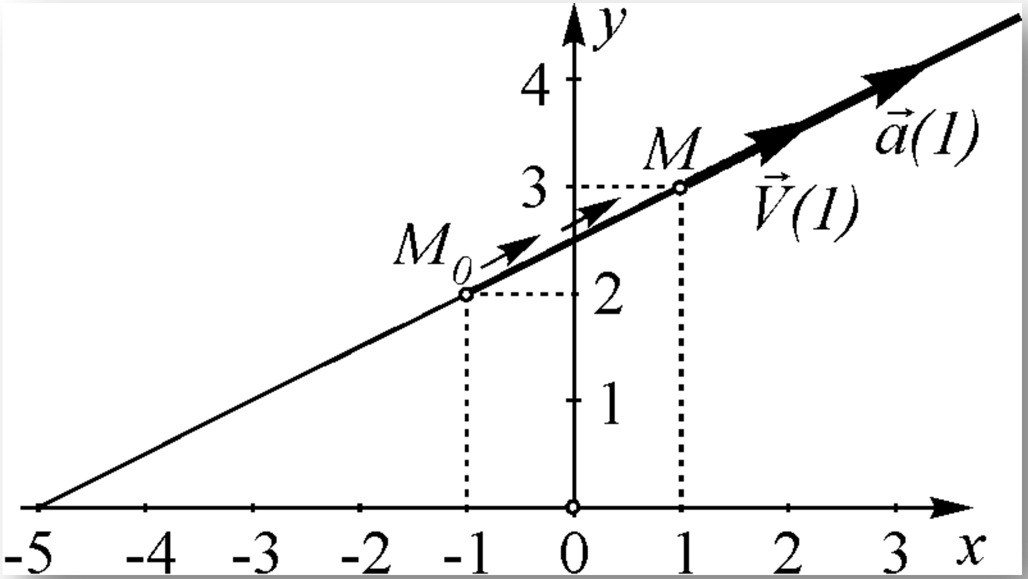
$$\dot{x}(t) = 4t,\ \ \dot{y}(t) = 2t,\ \ \ddot{x}(t) = 4,\ \ \ddot{y}(t) = 2$$

odakle se vidi da je vektor ubrzanja tokom kretanja konstantan

$$\vec{a}(t) = 4\vec{i} + 2\vec{j} = \overrightarrow{const.} \ \Rightarrow a(t) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$

Brzina u trenutku *t=1s*

$$\dot{x}(1) = 4,\ \dot{y}(1) = 2 \Rightarrow \vec{V}(1) = 4\vec{i} + 2\vec{j},\ V(1) = 2\sqrt{5}\ m/s^2$$



Primer 1.4

Jednačine kretanja tačke u ravni su

$$\boxed{x = \sin t \quad \text{i} \quad y = \cos 2t}$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku? Odrediti trenutak vremena $\bar{t}$ u kojem tačka prvi put menja smer kretanja?

Za dobijanje jednačine linije putanje (odnosno, za eliminaciju vremena t iz jednačina kretanja) iskoristimo trigonometrijske identitete prema kojima dobijamo da je linija putanje parabola:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \quad \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \Rightarrow \quad \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \;\Rightarrow\; y = 1 - 2x^2$$

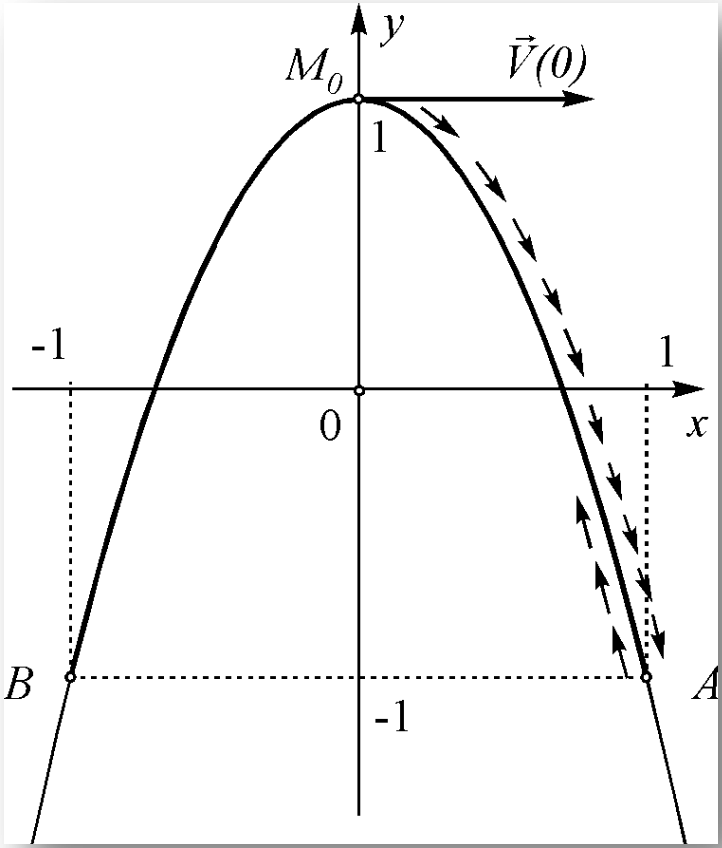
Zbog

$$-1 \le \sin t \le 1,$$

$$-1 \le \cos 2t \le 1$$

oblast kretanja je

$$-1 \le x \le 1, \; -1 \le y \le 1$$



Tačka osciluje duž parabole a na mestima A i B menja smer kretanja.

Projekcije brzine i ubrzanja u funkciji vremena su:

$$\dot{x}(t) = \cos t, \quad \dot{y}(t) = -2\sin 2t$$

$$\ddot{x}(t) = -\sin t, \quad \ddot{y}(t) = -4\cos 2t$$

Brzina u proizvoljnom trenutku:

$$\vec{V}(t) = \cos t\,\vec{i} - 2\sin 2t\,\vec{j}$$

$$V(t) = \sqrt{\cos^2 t + (2\sin 2t)^2}$$

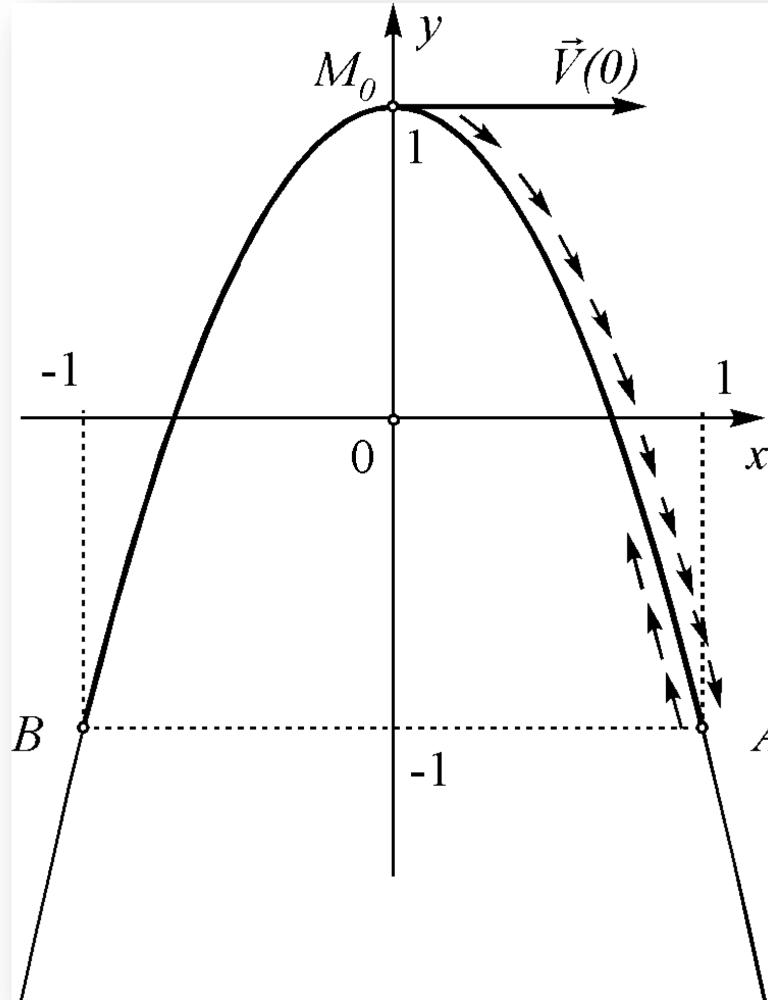
Ubrzanje u proizvoljnom trenutku:

$$\vec{a}(t) = -\sin t\,\vec{i} - 4\cos 2t\,\vec{j}$$

$$a(t) = \sqrt{\sin^2 t + (4\cos 2t)^2}$$

Početni položaj:

$$x(0) = 0, \; y(0) = 1 \Rightarrow M_0(0,1)$$



Zbog $\dot{x}(0) = 1 \geq 0$ tačka je započela kretanje u desnu stranu.

Na mestu prve promene smera kretanja (A) brzina tačke jednaka je nuli:

$$\boxed{\dot{x}(\bar{t}) = \cos \bar{t} = 0, \; \dot{y}(\bar{t}) = -2\sin 2\bar{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = (\pi/2)\; s}$$

Trohoida. Cikloida

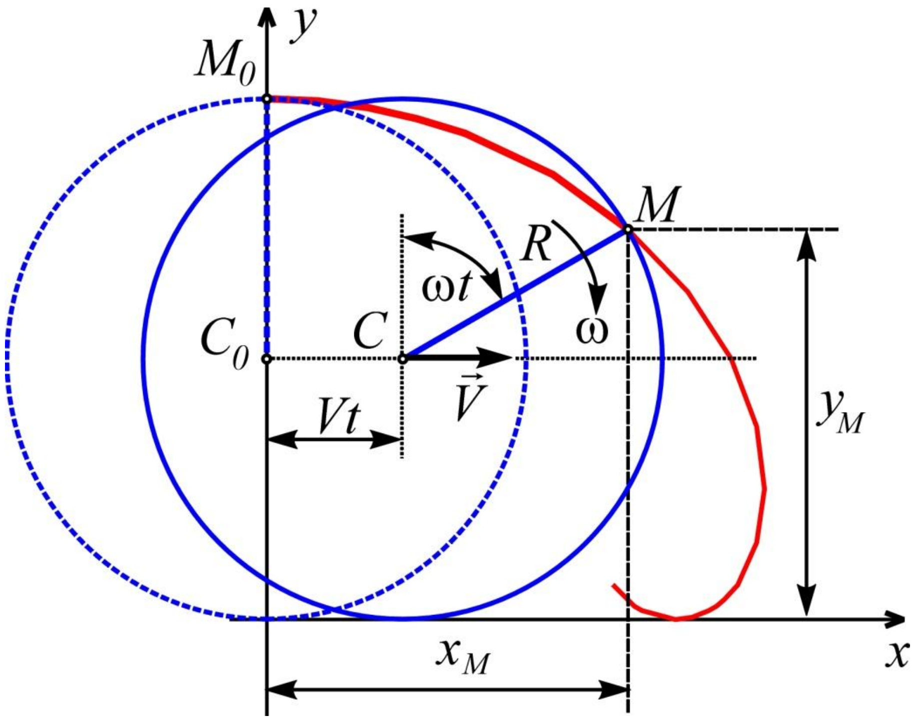
Parametarske jednačine trohoide:
(u prikazanoj varijanati)

$$x(t) = x_M = Vt + R\sin\omega t$$
$$y(t) = y_M = R + R\cos\omega t$$

C – centar rotora (tačka koja se kreće ravnomerno pravolinijski, brzinom V)

R – poluprečnik rotora (rastojanje tačke M od tačke C), $R = \overline{CM}$

ω – ugaona brzina rotora (konstanta)



Trohoida

Specijalni slučaj trohoide, za $R\omega = V$, je ciklioda

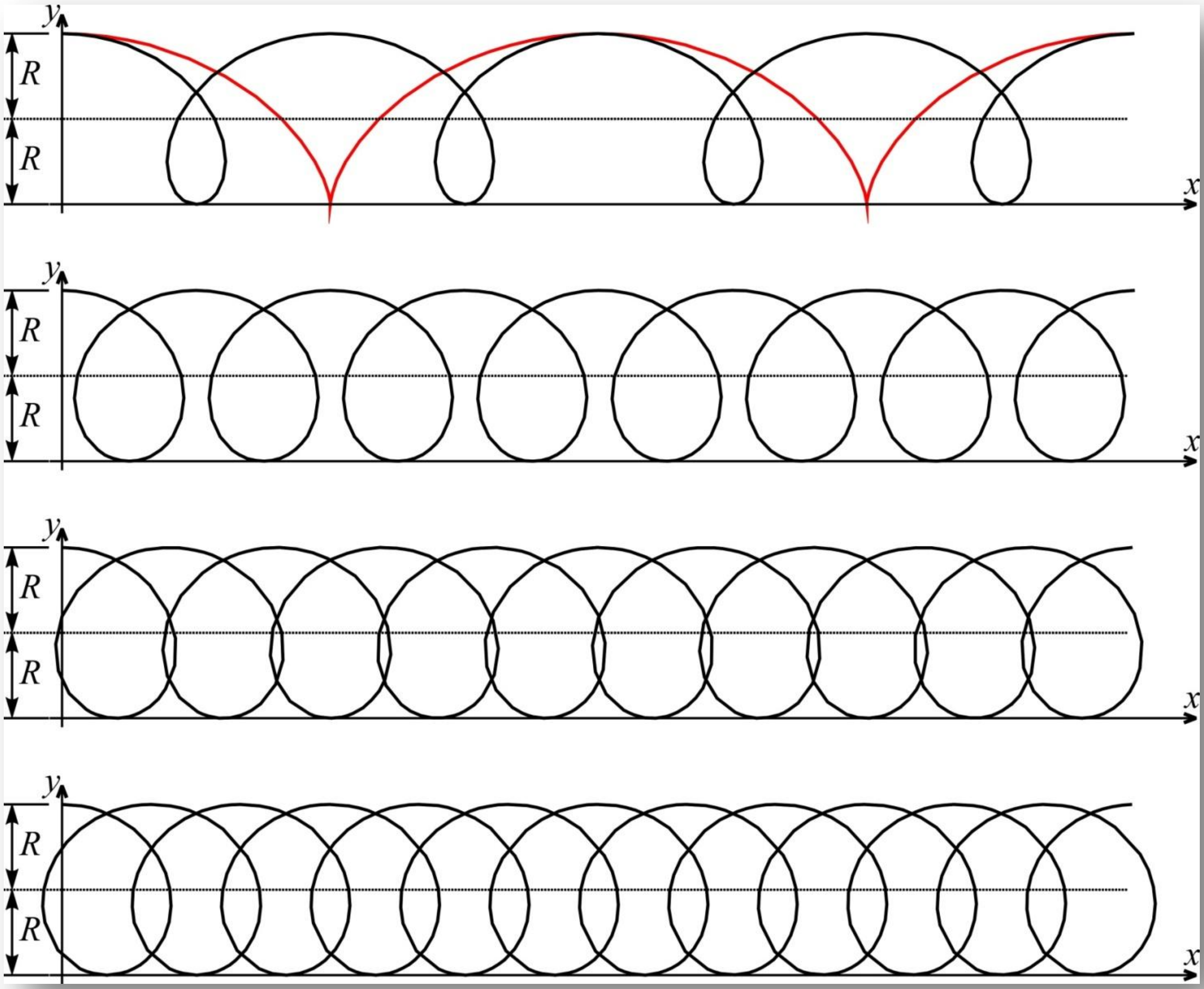
Brzina tačke M može se odrediti preko prvog izvoda parametarskih jednačina:

$$\dot{x}(t) = V + R\omega\cos\omega t$$
$$\dot{y}(t) = -R\omega\sin\omega t$$

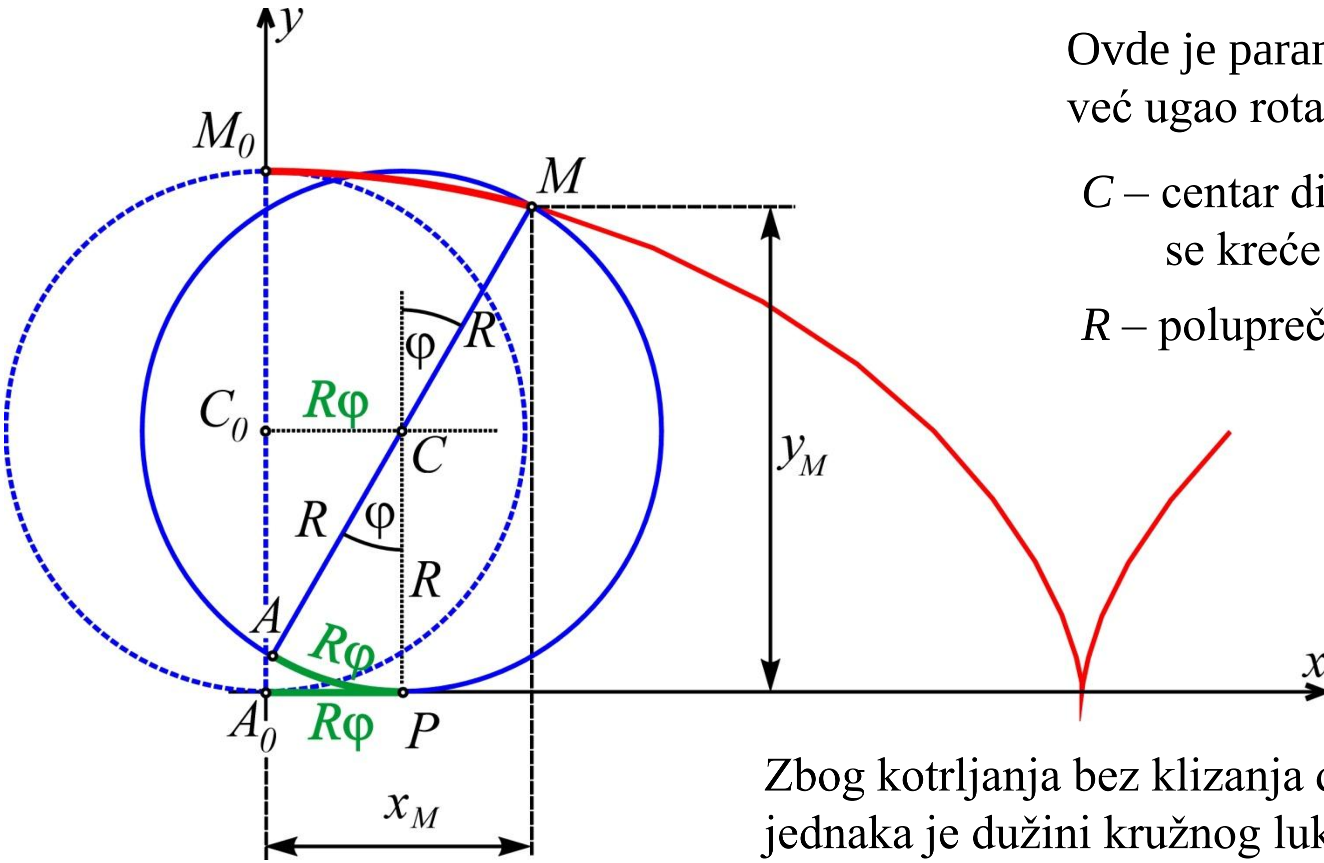
Ubrzanje tačke M određuje drugi izvod:

$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2\sin\omega t$$
$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2\cos\omega t$$

Ciklioda ($R\omega = V$), i više trohoida ($R\omega > V$). Na svakoj narednoj slici $\frac{R\omega}{V}$ je veće.



Cikloida dobijena kotrljanjem bez klizanja kružnog diska po pravoj (*x* osi)



Ovde je parametar, ne vreme *t*, već ugao rotacije diska φ.

C – centar diska (tačka koja se kreće pravolinijski)

R – poluprečnik diska $R = \overline{CM}$

Zbog kotrljanja bez klizanja dužina duži A_0P jednaka je dužini kružnog luka *AP*, što je Rφ.

Parametarske jednačine cikloide:
(u prikazanoj varijanati)

$$x(\varphi) = x_M = R\varphi + R\sin\varphi$$
$$y(\varphi) = y_M = R + R\cos\varphi$$

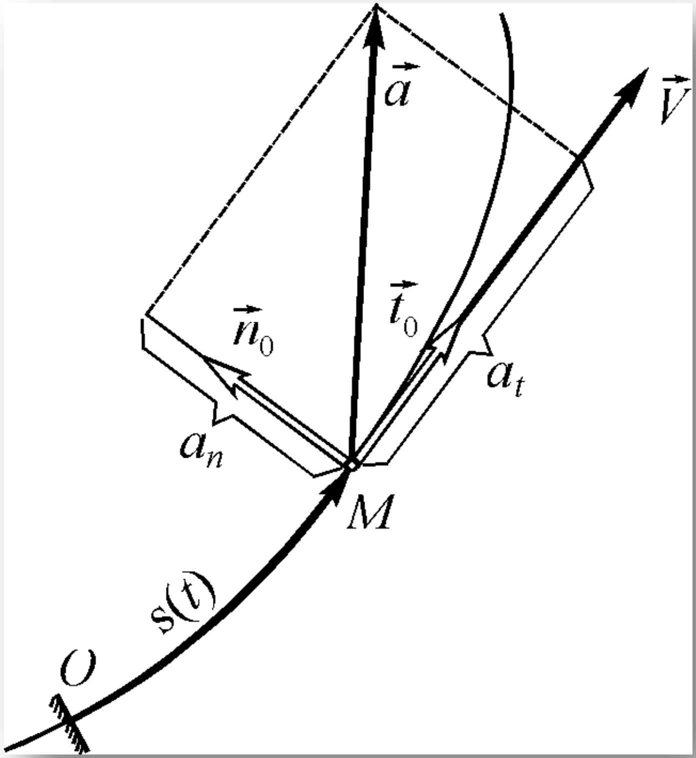
Brzina se može odrediti preko prvog izvoda:

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} + R\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\dot{y} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

65. Krivolinijska koordinata. Jedinični vektori tangente i normale. Vektor brzine izražen preko njegove projekcije na tangentu i njegov intenzitet

U prirodnom koordinatnom sistemu koordinata koja u potpunosti određuje položaj tačke je krivolinijska (prirodna, lučna) koordinata $s(t)$.

Međusobno upravni jedinični vektori ovog koordinatnog sistema su $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$.



Jedinični vektor tangente $\vec{t}_0$ ima smer porasta koordinate *s(t)*, dok je, njemu upravni, jedinični vektor normale $\vec{n}_0$ uvek usmeren u konkavnu stranu putanje.

Vektor brzine:

$$\vec{V} = V_t\vec{t}_0, \; \vec{V} = \pm V\vec{t}_0$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = ds\vec{t}_0, \quad \vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{t}_0, \quad \vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0 \quad \Rightarrow \quad V_t = \dot{s}$$

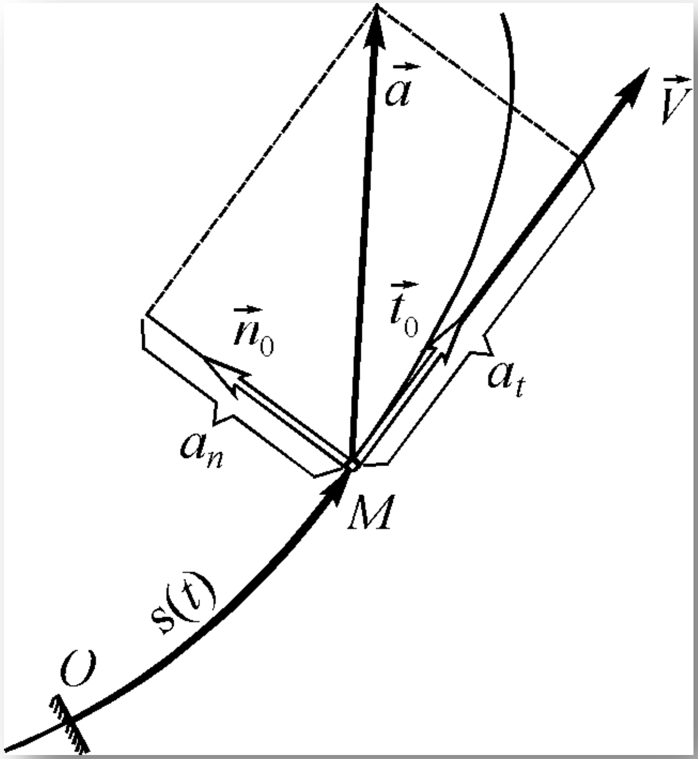
$$\boxed{\vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0}$$

66. Tangencijalno i normalno ubrzanje

Vektor ubrzanja $\vec{a}$ u ovom koordinatnom sistemu ima oblik:

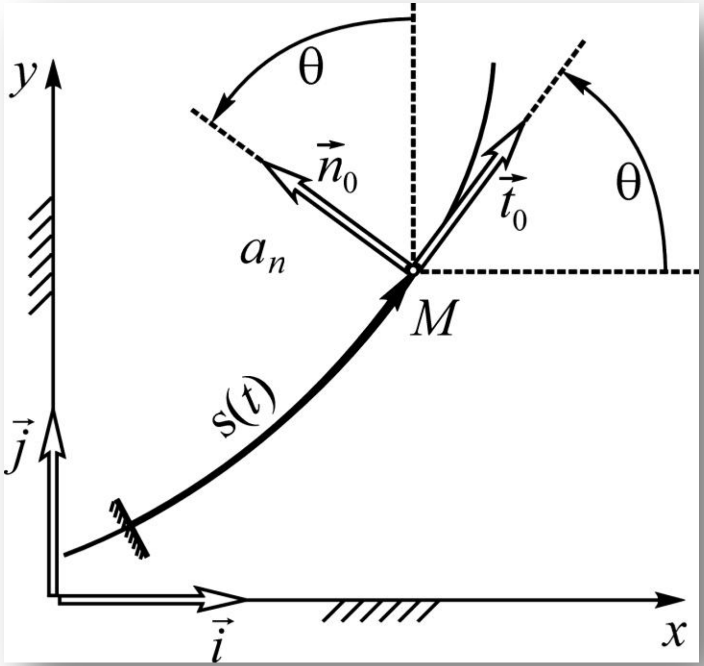
$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{t}_0 + a_n\vec{n}_0} \qquad \boxed{a^2 = a_t^{\,2} + a_n^{\,2}}$$

Projekcije ubrzanja na tangentu i normalu a_t i a_n nazivaju se tangencijalnim i normalnim ubrzanjem.



Diferenciranjem izraza za brzinu, $\vec{V} = \dot{s}\vec{t}_0$, po vremenu dobija se:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{s}\vec{t}_0 + \dot{s}\dot{\vec{t}}_0}$$



Za dobijanje $\dot{\vec{t}}_0$ izrazimo $\vec{t}_0$ i $\vec{n}_0$ preko $\vec{i}$ i $\vec{j}$

$$\vec{t}_0 = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \quad \vec{n}_0 = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\dot{\vec{t}}_0 = \frac{d}{dt}\vec{t}_0 = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\vec{i} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\vec{j}$$

$$\dot{\vec{t}}_0 = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = \dot{\theta}\vec{n}_0$$

$$\boxed{\dot{\vec{t}}_0 = \dot{\theta}\vec{n}_0}$$

U gornjem izvođenju koriščeni su: činjenica da su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ konstantni i sledeći identiteti:

$$\frac{d}{dt}\cos\theta = \frac{d}{d\theta}\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\cdot\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\sin\theta = \frac{d}{d\theta}\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

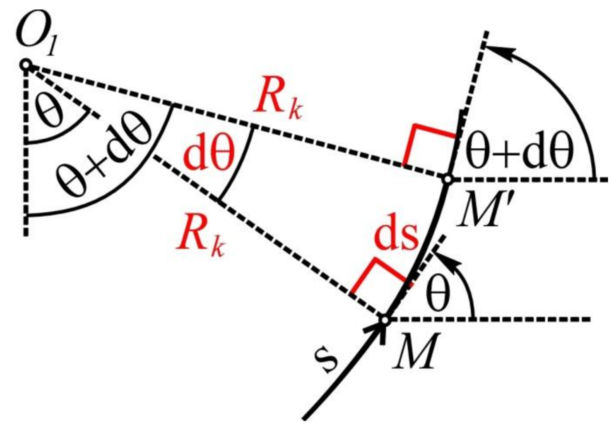
Sada, izraz za vektor ubrzanja postaje: $\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\vec{t}_0 + \dot{s}\dot{\theta}\vec{n}_0,}$

što daje da tangencijalno i normalno ubrzanje određuju izrazi:

$$\boxed{a_t(t) = \ddot{s}(t), \; a_n(t) = \dot{s}(t)\dot{\theta}(t)}$$

Odredimo $\dot{\theta}$, kako bi dobili konačni izraz za

$a_n = \dot{s}\dot{\theta}$:



$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \dot{s} = \frac{\dot{s}}{R_k} \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{R_k}$$

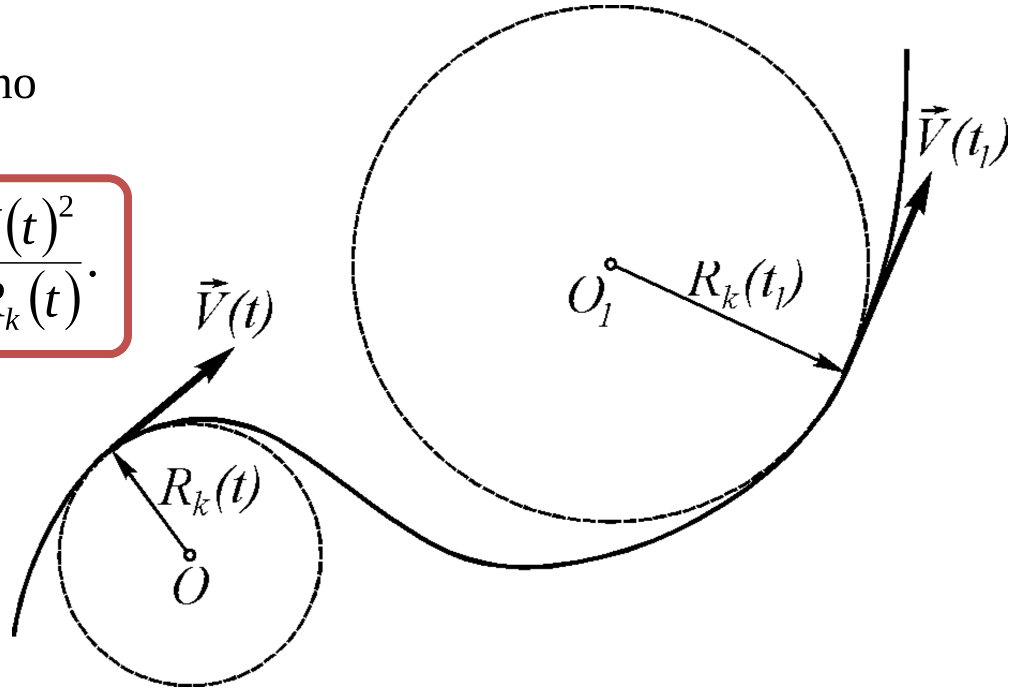
gde je, na osnovu slike, korišćena jednakost:

$$R_k \cdot d\theta = ds \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_k}$$

R_k - poluprečnik krivine putanje

Konačno, pošto je $\dot{s}^2 = V^2$, tangencijalno i normlno ubrzanje određuju formule:

$$\boxed{a_t(t) = \ddot{s}(t), \quad |a_t(t)| = |\dot{V}(t)|, \quad a_n(t) = \frac{V(t)^2}{R_k(t)}.}$$



Poluprečnik krivine u nekoj tački putanje predstavlja poluprečnik kruga koji najbolje aproksimira beskonačno malu okolinu te tačke.

67. Određivanje poluprečnika krivine putanje (kinematički način).

Ovde se podrazumeva definisanje procedure za određivanje poluprečnika krivine putanje (samim tim, normalnmog i tangencijalnog ubrzanja) u nekom trenutku vremena, ako su poznate jednačine kretanja *x(t)* i *y(t)* u *xOy* koordinatnom sistemu.

$$a_n(t) = \frac{V(t)^2}{R_k(t)}. \quad \Rightarrow \quad R_k = \frac{V^2}{a_n}$$

Intenzitet brzine i njegov kvadrat su: $V(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}, \quad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

Normalno ubrzanje određuje formula $a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2}$

gde je: $a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2, \quad |a_t| = |\dot{V}| = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right|$

Gornja formula može se izvesti sledećim diferenciranjem po vremenu:

$$\frac{d}{dt}\Big| V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \Rightarrow \quad 2V\dot{V} = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} \quad \Rightarrow \quad |a_t|$$

Primer 1.5

Jednačine kretanja tačke u ravni su (Vidi Primer 1.1.):

$$x = t \quad \text{i} \quad y = t^2$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu u trenutku $t=1s$? Odrediti ubrzanje u proizvoljnom trenutku? Odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku vremena t=1 s.

S obzirom da je u tom trenutku vremena

$$\dot{x} = 1\, m/s,\ \dot{y} = 2\, m/s,\ V = \sqrt{5}\, m/s,$$
$$\ddot{x} = 0,\quad \ddot{y} = 2\, m/s^2$$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left| \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V} \right| = \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{m}{s^2}$$

S obzirom da je u tom trenutku

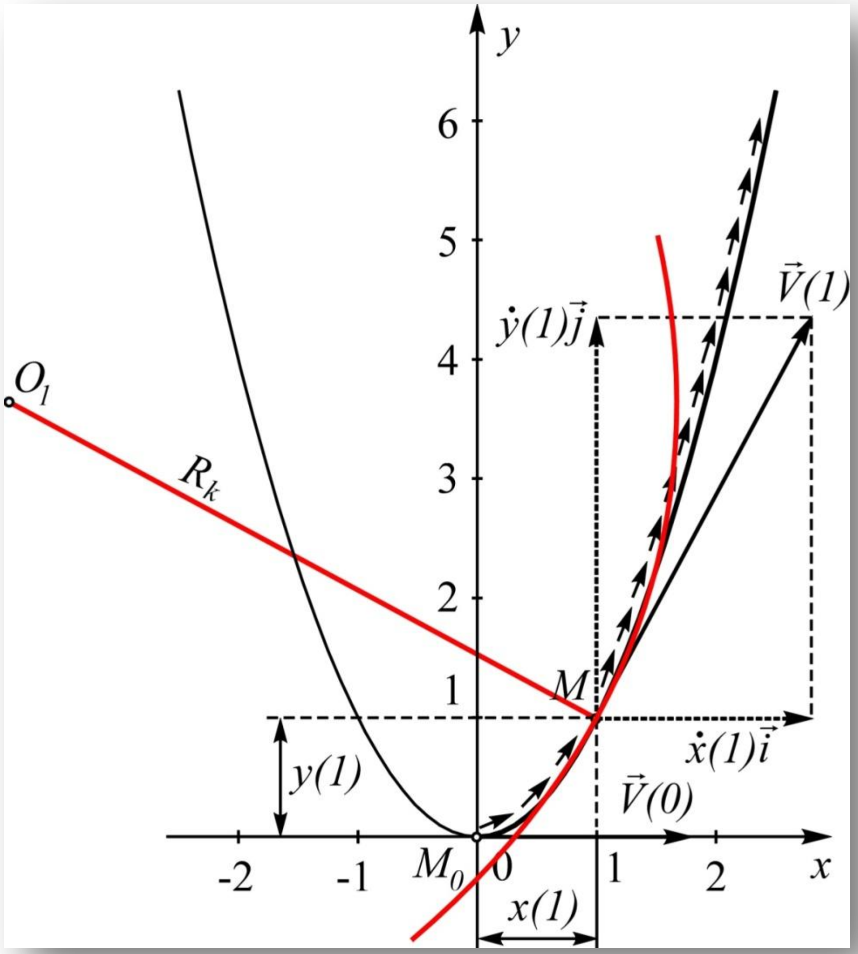
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\, m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5}{\left(2/\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}\, m \cong 5.59\, m$$



Primer 1.6

Jednačine kretanja tačke u ravni su (Vidi Primer 1.2.):

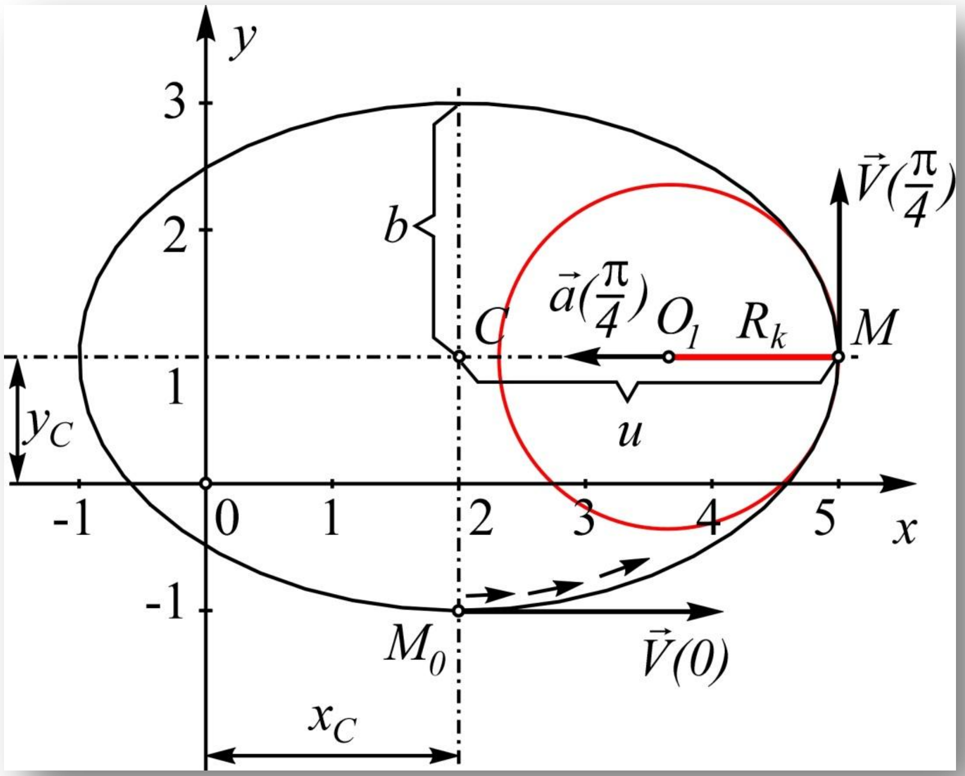
$$x = 2 + 3\sin 2t \qquad \text{i} \qquad y = 1 - 2\cos 2t$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti trajektoriju i skicirati je? Odrediti oblast kretanja? Odrediti i na putanji nacrtati brzinu i ubrzanje u trenutku $t = (\pi/4)\,\mathrm{s}$.

Odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara trenutku $t = (\pi/4)$.

S obzirom da je u tom trenutku vremena

$$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = 4\ m/s,\quad V = 4\ m/s,$$
$$\ddot{x} = -12\ m/s^2,\ \ddot{y} = 0,$$



tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left| \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V} \right| = 0$$

S obzirom da je u tom trenutku

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{12^2 + 0^2} = 12\ m/s^2$$

normalno ubrzanje iznosi

$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{12^2 - 0^2} = 12\ \frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}\ m \cong 1.33\ m$$

Do zaključka da je $a_t = 0,\ a = a_n = 12\ m/s^2$ itd. moglo se doći i na osnovu same slike

Primer 1.7

Jednačine kretanja tačke u ravni su (Vidi Primer 1.4.):

$$x = \sin t \quad \text{i} \quad y = \cos 2t$$

(t je u sekundama a x i y su u metrima). Odrediti liniju putanje i skicirati je? Odrediti trajektoriju i oblast kretanja? Odrediti brzinu i ubrzanje u proizvoljnom trenutku? Odrediti trenutak vremena $\bar{t}$ u kojem tačka prvi put menja smer kretanja?

Odrediti poluprečnik krivine putanje na mestu koje odgovara početnom trenutku vremena t=0 s.

S obzirom da je u tom trenutku vremena

$$\dot{x} = 1\ m/s,\ \dot{y} = 0,\ V = 1\,m/s,$$
$$\ddot{x} = 0,\ \ \ddot{y} = -4\,m/s^2,$$

tangencijalno ubrzanje iznosi

$$a_t = \left|\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{V}\right| = 0.$$

S obzirom da je u tom trenutku

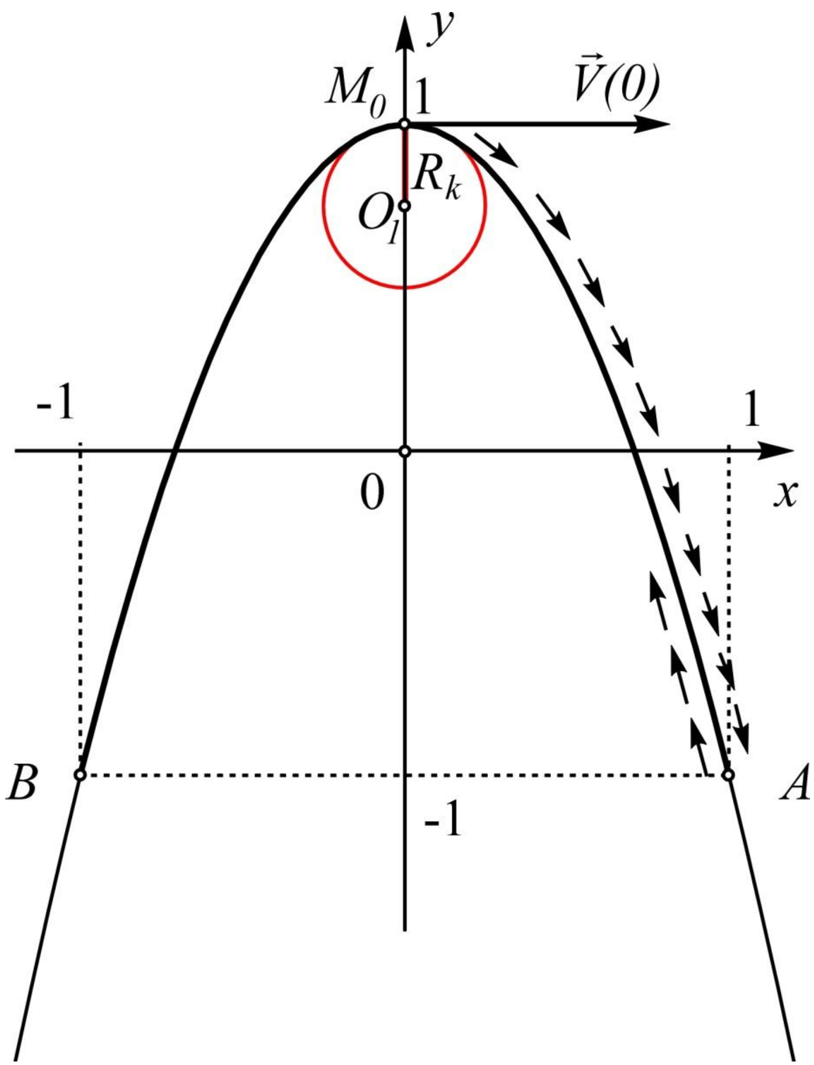
$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4\,m/s^2,$$

normalno ubrzanje iznosi

$$a_n = \sqrt{a^2 - |a_t|^2} = \sqrt{4^2 - 0} = 4\,\frac{m}{s^2},$$

pa je traženi poluprečnik krivine

$$R_k = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}\,m.$$



I ovde se moglo doći do zaključka da je $a_t = 0$ itd. na osnovu same slike

68. Zakon pravolinijskog kretanja tačke. Projekcije brzine i ubrzanja na osu duž koje se vrši kretanje. Vektori brzine i ubrzanja

U dinamici se pri pravolinijskom kretanju materijalne tačke uvek jedna osa (na primer *x*) usvaja u pravcu kretanja dok je ona druga (*y* osa) upravna na pravac kretanja. Izložimo kinematiku takvog kretanja kao specijalni sličaj kretanja tačke u *yOx* ravni,

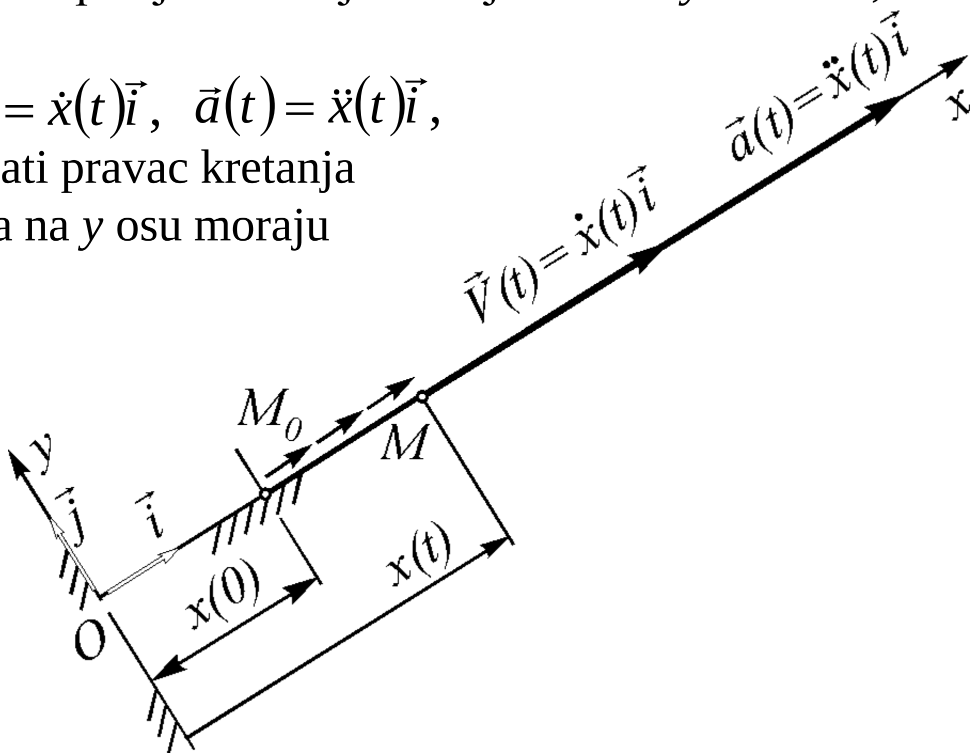
Vektore brzine i ubrzanja su $\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\vec{i}\,,\;\; \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i}\,,$

i ukoliko nisu nula vektori, moraju imati pravac kretanja (pravac *x* ose). Projekcije ovih vektora na *y* osu moraju biti jednake nuli

$$\dot{y}(t) = 0,\;\; \ddot{y}(t) = 0,$$

što daje i jednakost

$$y(t) = 0 = const.$$



Intenziteti vektora su:

$$V = |\dot{x}|, \quad a = |\ddot{x}|$$

$x(t)$ je jednačina (zakon) kretanja

Često će se za pravolinijsko kretanje tačke umesto $x(t)$ koristiti i druge slovne oznake, kao na primer $s(t)$, y, u, z,..., ali suština je ista. I tada će se brzine dobijati preko prvih izvoda tih koordinata a ubrzanja preko drugih.

Primer 1.8

Za pravolinijsko kretanje tačke jednačina (zakon) kretanja je:

$$\boxed{x(t) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{18}t^3}$$

(t je u *[s]*, x je u *[m]*).
Odrediti brzinu i ubrzanje u funkciji vremena i nacrtati vektore brzine i ubrzanja u trenucima $t_0 = 0$, $t_1 = 6$ i $t_2 = 9$ sekundi?

Nacrtati funkcije $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), s(t), \; V(t)$ i $a(t)$?

Odrediti u kom trenutku vremena $\bar{t} = ?$ i na kom mestu $x(\bar{t}) = ?$ tačka menja smer kretanja?

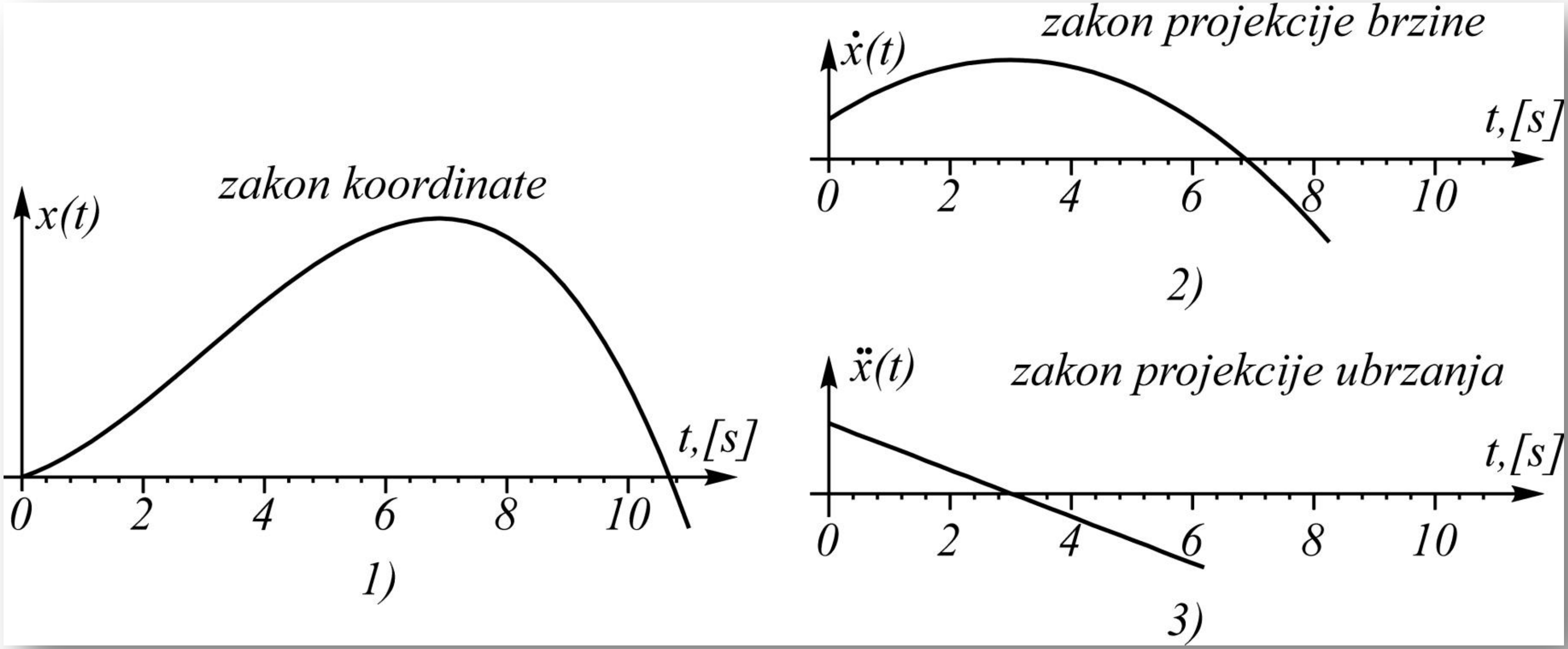
$$x(t) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{18}t^3$$

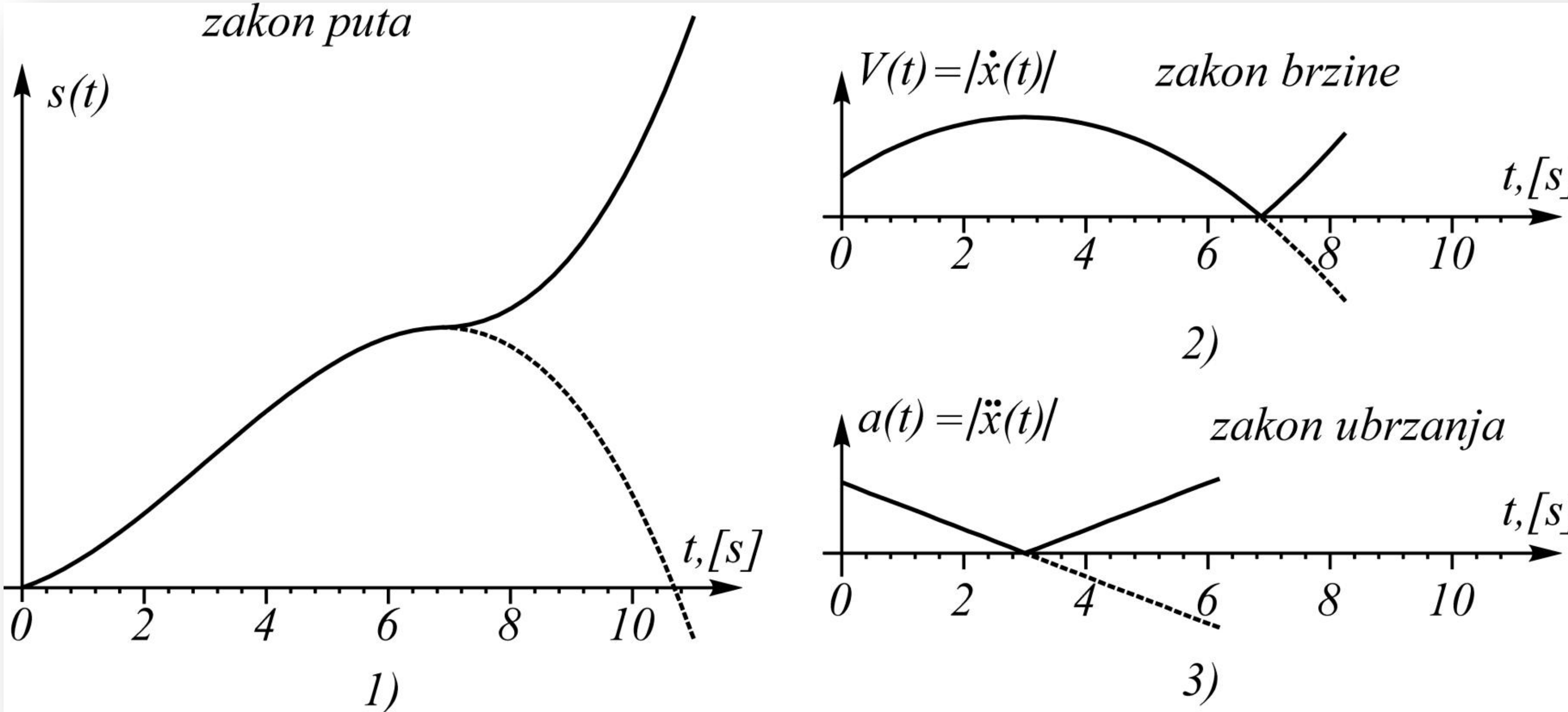
Projekcija brzine:

$$\dot{x}(t) = 1 + t - \frac{1}{6}t^2$$

Projekcija ubrzanja:

$$\ddot{x}(t) = 1 - \frac{1}{3}t$$

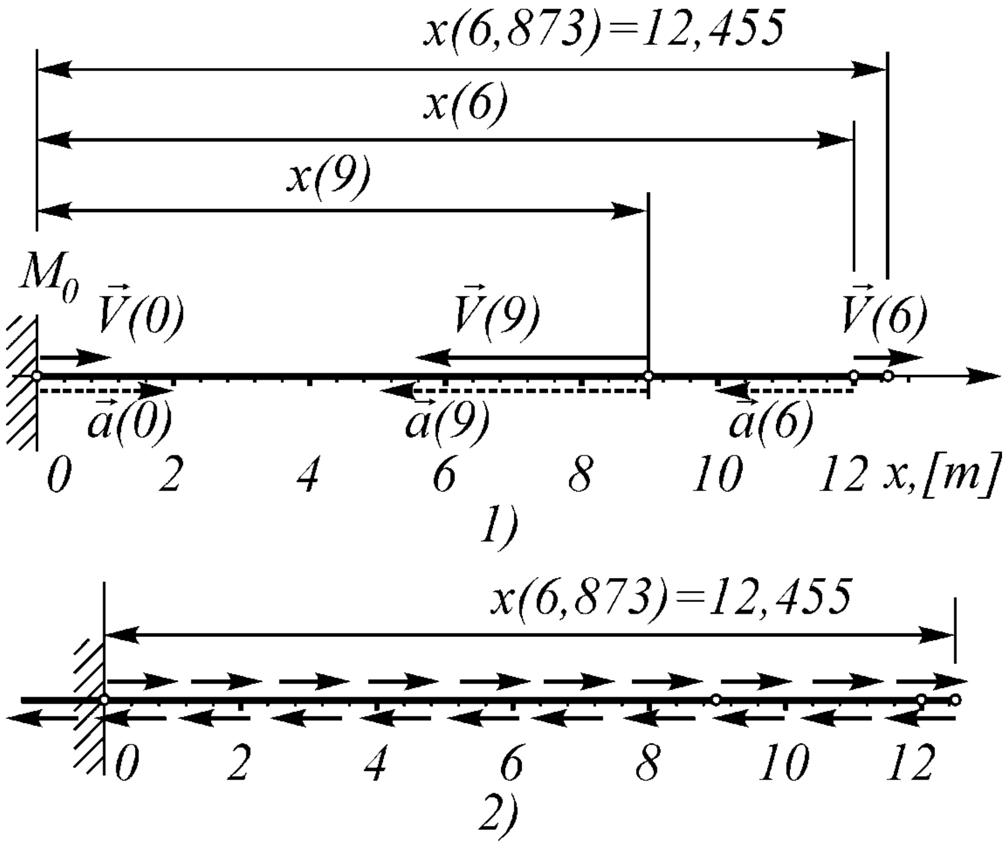




Uvrstimo sada u izraze za $x(t)$, $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ umesto vremena *t* vrednosti 0, 6 i 9 kako bi dobili položaj, brzinu i ubrzanje u tim vremenskim trenucima:

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1\,m/s,\ \ddot{x}(0)=1\,m/s^2,\ x(6)=12\,m,\ \dot{x}(6)=1\,m/s,\ \ddot{x}(6)=-1\,m/s^2,$$

$$x(9)=9\,m,\ \dot{x}(9)=-3.5\,m/s,\ \ddot{x}(9)=-2\,m/s^2.$$



Za $t=0$ kretanje je ubrzano

Za $t=6s$ kretanje je usporeno

Za $t=9s$ kretanje je ubrzano

ali se tačka kreće u suprotnom smeru od porasta x koordinate

Tačka menja smer kretanja u trenutku $\bar{t}$ kada joj je brzina jednaka nuli, tj.

$$\dot{x}(\bar{t})=0 \Rightarrow 1+\bar{t}-\frac{1}{6}\bar{t}^{2}=0 \Rightarrow \quad \bar{t}=3+\sqrt{15},\ \ \bar{t}\approx 6{,}873\,s \Rightarrow x(\bar{t})=12{,}455\,m$$

69. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog pravolinijskog i krivolinijskog kretanja

Jednoliko (ravnomerno) pravolinijsko kretanje

$$\boxed{\dot{x} = V = const.}$$

$$\boxed{dx = Vdt}$$ - diferencijalna jednačina

$$\boxed{x(0) = 0}$$ - početni uslov

$$\boxed{x(t) = V \cdot t}$$ - Zakon kretanja (Zakon puta)

Jednako (ravnomerno) promenljivo pravolinijsko kretanje

Ovde je *a* (ubrzanje, usporenje) konstantno

$\ddot{x} = a > 0$ (jednako ubrzano), *a*-ubrzanje ili
$\ddot{x} = -a < 0$ (jednako usporeno), *a*-usporenje

Neka su početni uslovi:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = V_0$$

$\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = a = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = V_0 + at$ -Zakon brzine

$dx = (V_0 + at)dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = V_0 \cdot t + a \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako ubrzano

$\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = -a = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = V_0 - at$ -Zakon brzine

$dx = (V_0 - at)dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = V_0 \cdot t - a \cdot \dfrac{t^2}{2}$ -Zakon puta

} jednako usporeno

70. Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog krivolinijskog kretanja

Jednoliko (ravnomerno) krivolinijsko kretanje

$$\boxed{\dot{s} = V = const.}$$

$$\boxed{ds = Vdt}$$ - diferencijalna jednačina

$$\boxed{s(0) = 0}$$ - početni uslov

$$\boxed{s(t) = V \cdot t}$$ - Zakon kretanja (Zakon puta)

Jednako (ravnomerno) promenljivo krivolinijsko kretanje

Ovde je a_T (tangencijalno ubrzanje/usporenje) konstantno

Početni uslovi:

$\ddot{s} = a_T > 0$ (jednako ubrzano), a_T- tangencijalno ubrzanje ili

$\ddot{s} = -a_T < 0$ (jednako usporeno), a_T- tangencijalno usporenje

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = V_0$$

Jednako ubrzano:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = a_T = const. \Rightarrow \dot{s}(t) = V_0 + a_T t$$ -Zakon brzine

$$ds = (V_0 + a_T t)dt \Rightarrow s(t) = V_0 \cdot t + a_T \cdot \frac{t^2}{2}$$ -Zakon puta

jednako ubrzano

Jednako usporeno:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = -a_T = const. \Rightarrow \dot{s}(t) = V_0 - a_T t$$ -Zakon brzine

$$ds = (V_0 - a_T t)dt \Rightarrow s(t) = V_0 \cdot t - a_T \cdot \frac{t^2}{2}$$ -Zakon puta

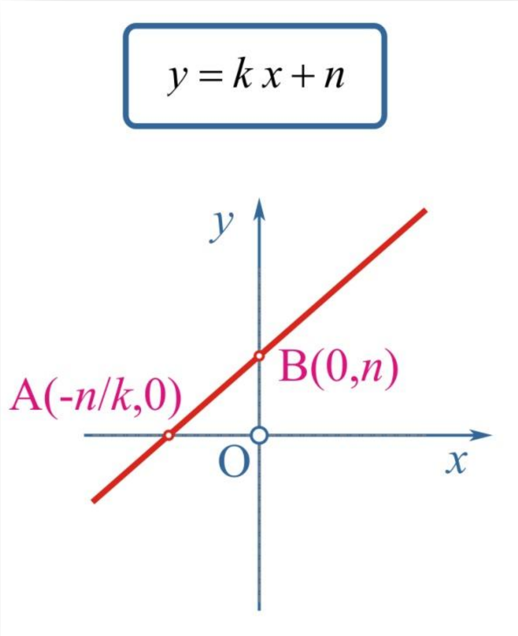
jednako usporeno

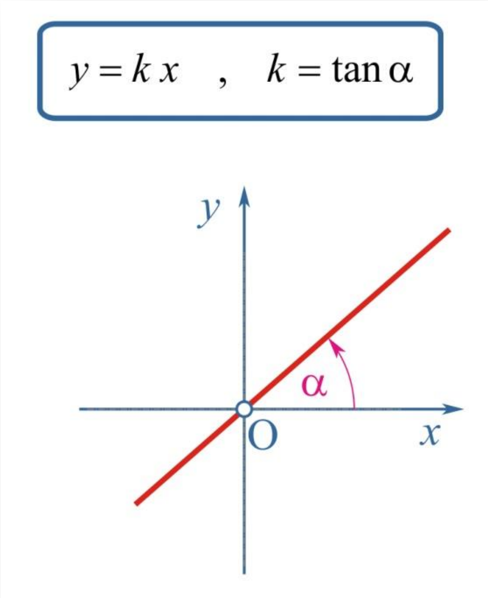
Šta smo naučili?

63. **Krivolinijsko kretanje tačke u ravni opisano u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. Jednačine kretanja. Linija putanje. Putanja.**
64. **Vektori brzine i ubrzanja tačke u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu i njihove projekcije na koordinatne ose.**
65. **Krivolinijska koordinata. Jedinični vektori tangente i normale. Vektor brzine izražen preko njegove projekcije na tangentu i njegov intenzitet.**
66. **Tangencijalno i normalno ubrzanje.**
67. **Određivanje poluprečnika krivine putanje (kinematički način).**
68. **Zakon pravolinijskog kretanja tačke. Projekcije brzine i ubrzanja na osu duž koje se vrši kretanje. Vektori brzine i ubrzanja.**
69. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog pravolinijskog i krivolinijskog kretanja.**
70. **Zakoni kod jednolikog i jednako promenljivog krivolinijskog kretanja.**

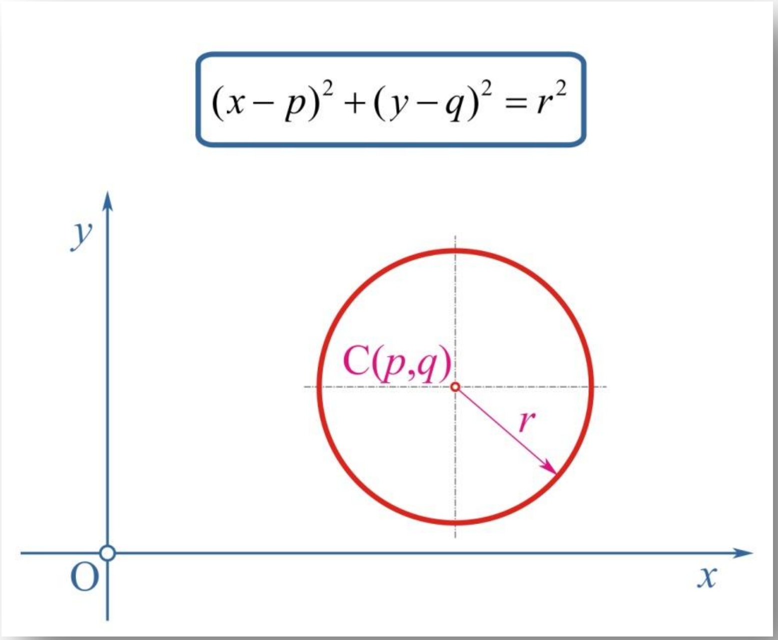
Podsetnik

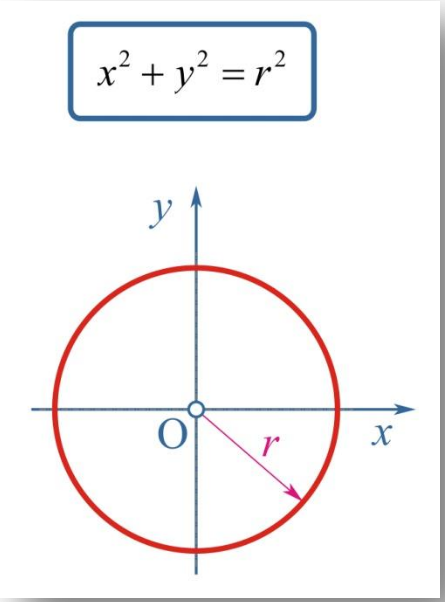
Prava



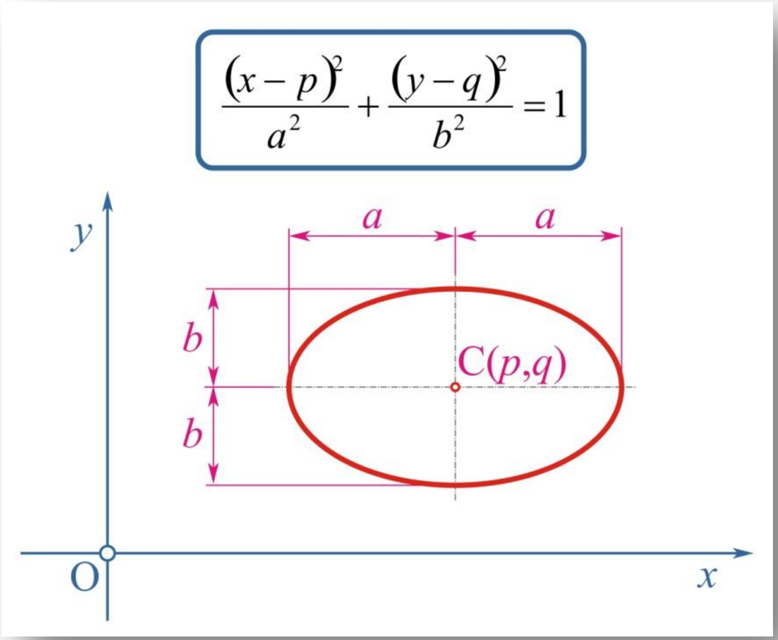


Kružnica

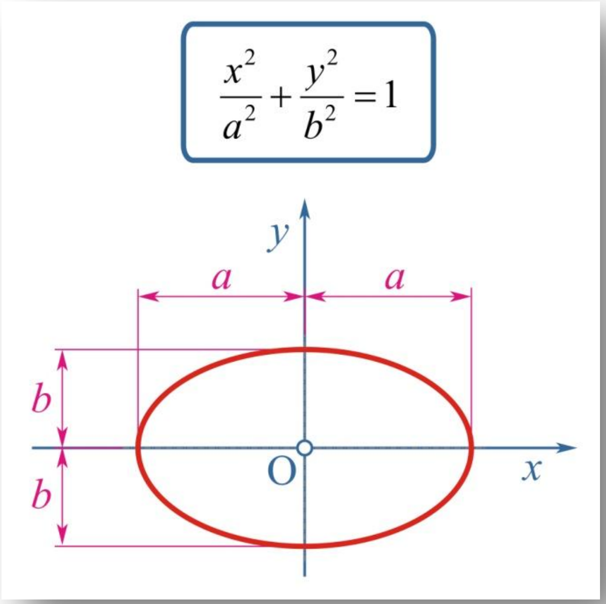




Elipsa

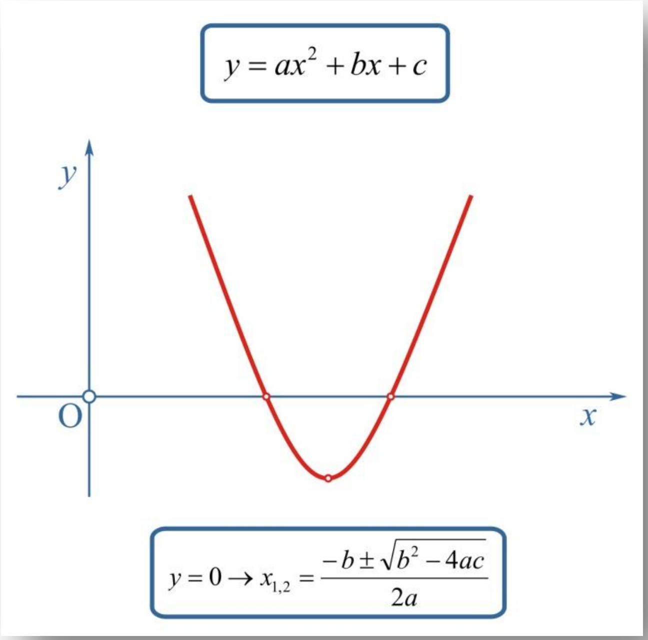


$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$
y
a
a
b
C(p,q)
b
O
x

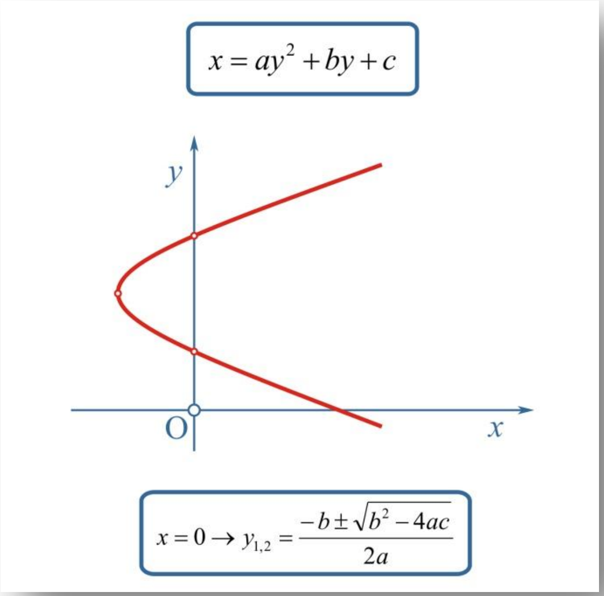


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
y
a
a
b
O
x
b

Parabola



$y = ax^2 + bx + c$
y
O
x
$y = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



$x = ay^2 + by + c$
y
O
x
$x = 0 \rightarrow y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\left.\begin{aligned} x &= p + a\sin(kt) \\ y &= q + b\cos(kt) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x-p}{a} &= \sin(kt) \\ \frac{y-q}{b} &= \cos(kt) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 &= \sin^2(kt) \\ \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 &= \cos^2(kt) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 &= \sin^2(kt) \\ \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 &= \cos^2(kt) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\frac{x-p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 = \sin^2(kt) + \cos^2(kt)$$

$$\boxed{\left(\frac{x-p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-q}{b}\right)^2 = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = at \\ y = bt^2 + ct + d \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} t = \dfrac{x}{a} \\ y = bt^2 + ct + d \end{array}\right\} \to y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2 + c\frac{x}{a} + d$$

$$\left.\begin{array}{l} x = bt^2 + ct + d \\ y = at \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} x = bt^2 + ct + d \\ t = \dfrac{y}{a} \end{array}\right\} \to x = b\left(\frac{y}{a}\right)^2 + c\frac{y}{a} + d$$

$$\left.\begin{array}{l} x = at + b \\ y = ct + d \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} t = \dfrac{x-b}{a} \\ y = ct + d \end{array}\right\} \to y = c\frac{x-b}{a} + d$$

Mehanika
Predavanja 10

D. Radomirović, M. Zuković

Novi Sad, 2022.