

# Mehanika

## Predavanja 1

D. Radomirović, M. Zuković  
Novi Sad, 2022.

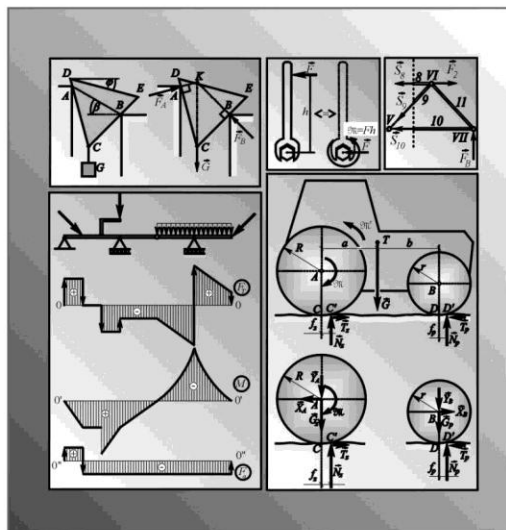
# Literatura

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
POLJOPRIVREDNI FAKULTET

Dragi Radomirović

## MEHANIKA

-prvi deo-



Novi Sad, 2001

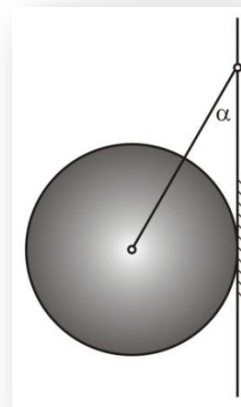
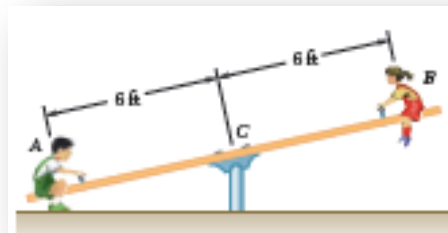
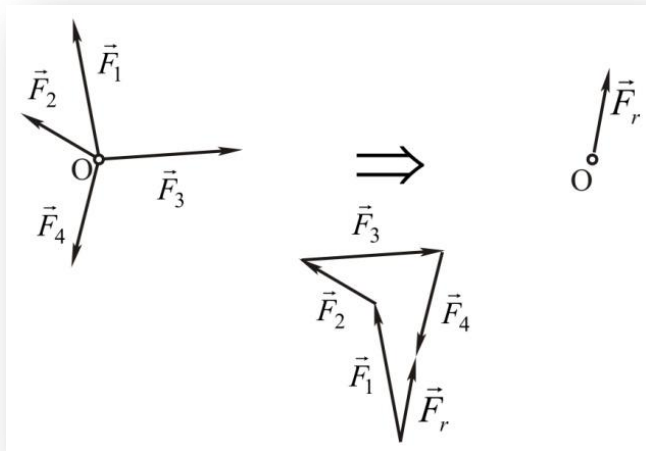
# Šta ćemo naučiti?

1. **Objekti posmatranja u mehanici. Kruto telo. Tačka.**
2. **Osnovna kretanja tela u trodimenzijskom prostoru. Translacija. Rotacija.**
3. **Sila i spreg kao mere mehaničkog dejstva.**
4. **Ekvivalentni sistemi sila i rezultanta**
5. **Aksiome statike.**
6. **Reakcije elementarnih veza (uže, laki štap, glatka veza, zglob, ukleštenje).**
7. **Kolinearni sistem sila. Njegova rezultanta. Uslov ravnoteže.**

# Statika

# Zadaci statike

- Zamena sistema sila i spregova, koji deluju na telo, nekim jednostavnijim sistemom, a **ekvivalentnim** u mehaničkom smislu
- Proučavanje uslova pod kojima se neko telo, koje se nalazi pod dejstvom sila i spregova, nalazi u **ravnoteži**

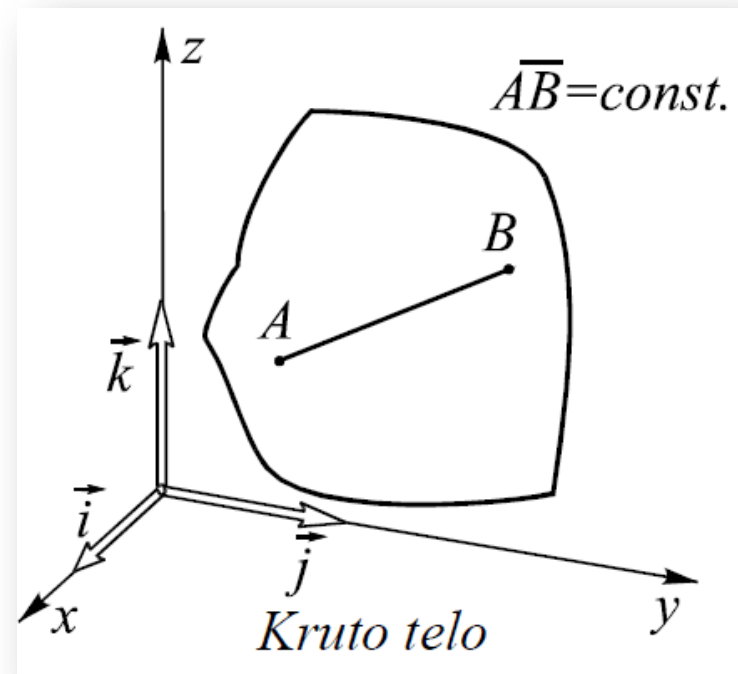


# 1. Objekti posmatranja u mehanici. Kruto telo. Tačka.

Pod materijalnim telom se podrazumeva deo prostora koji je neprekidno ispunjen materijom u čvrstom agregatnom stanju.

Telo sa dve dimenzije zanemarljive je štap. Ploča je telo sa jednom dimenzijom zanemarljivom.

Tačka u mehanici, obično je materijalna tačka, koja predstavlja telo nezanemarljive mase a zanemarljivih dimenzija i oblika.

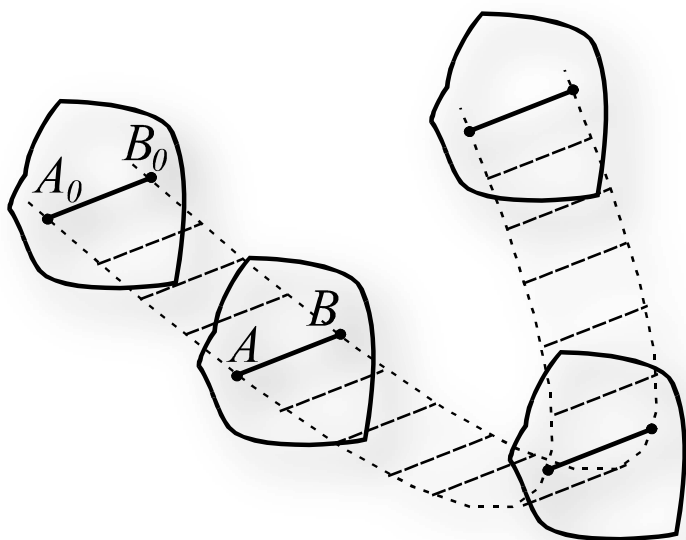


Za kruto telo je  $\overline{AB} = \text{const.}$   
Za deformabilno je  $\overline{AB} \neq \text{const.}$

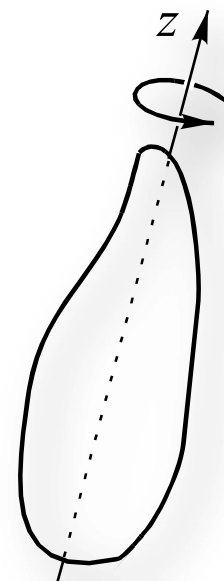
Prema jednoj veoma važnoj klasifikaciji tela u mehanici, tela su slobodna ili neslobodna (vezana). Telo koje nema fizički kontakt sa drugim telima je slobodno, i njemu ništa ne sužava mogućnosti za kretanjem. Nasuprot ovome, štap koji je naslonjen na zid a ima kontakt i sa podom je neslobodan. Pod i zid su za štap veze koje sužavaju mogućnosti njegovog kretanja.

U mehanici se proučavaju tela (najčešće materijalna), tačke i sistemi koji mogu da sadrže i tela i tačke.

## 2. Osnovna kretanja tela u trodimenzijskom prostoru. Translacija. Rotacija.

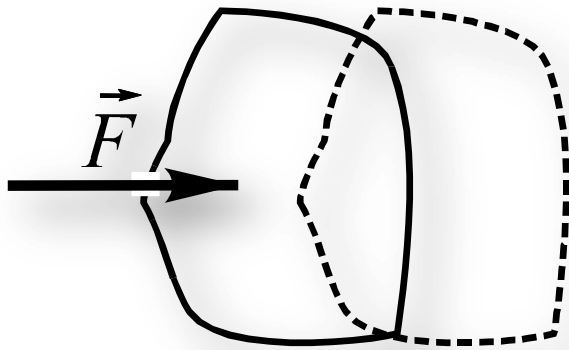


*Translatorno kretanje  
(translacija)*

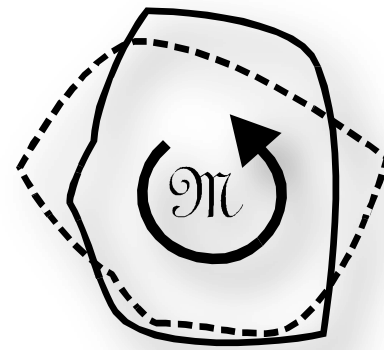


*Obrtanje oko ose  
(rotacija)*

### 3. Sila i spreg kao mere mehaničkog dejstva



1) *Sila*

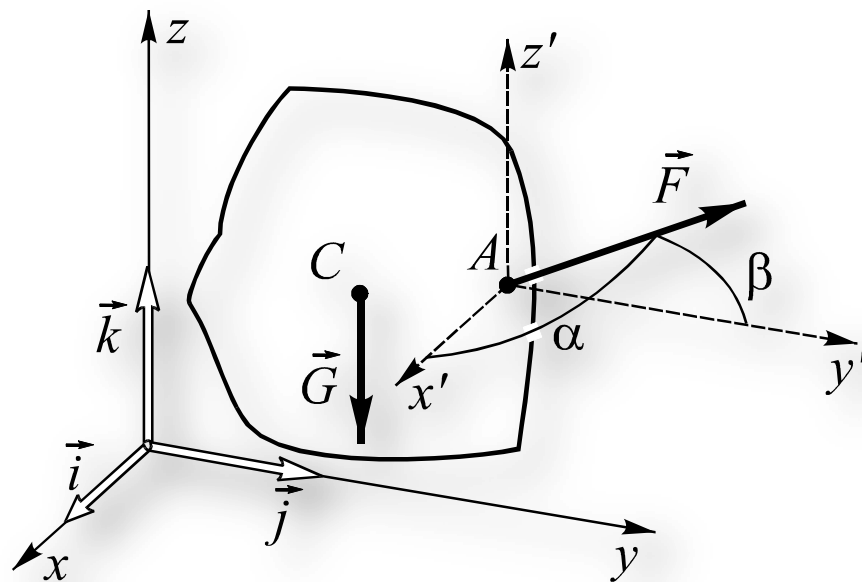


2) *Spreg*

Dva tela mogu da dejstvuju jedno na drugo bilo da su u direktnom kontaktu ili bez njega. Mere mehaničkog dejstva su sila, koja izaziva translatorno kretanje, i spreg, koji izaziva obrtanje

**Sila** je vektor koji je određen sa četiri podatka i to: pravac, smer, intenzitet i napadna tačka.

Napadna linija sile je prava na kojoj leži vektor sile i koja očigledno sadrži napadnu tačku te sile.



$$\vec{F} = X_F \vec{i} + Y_F \vec{j} + Z_F \vec{k}$$

$$X_F = F \cos \alpha, \quad Y_F = F \cos \beta, \quad Z_F = F \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

$$\vec{G} = X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + Z_G \vec{k}$$

$$X_G = 0, \quad Y_G = 0, \quad Z_G = -G$$

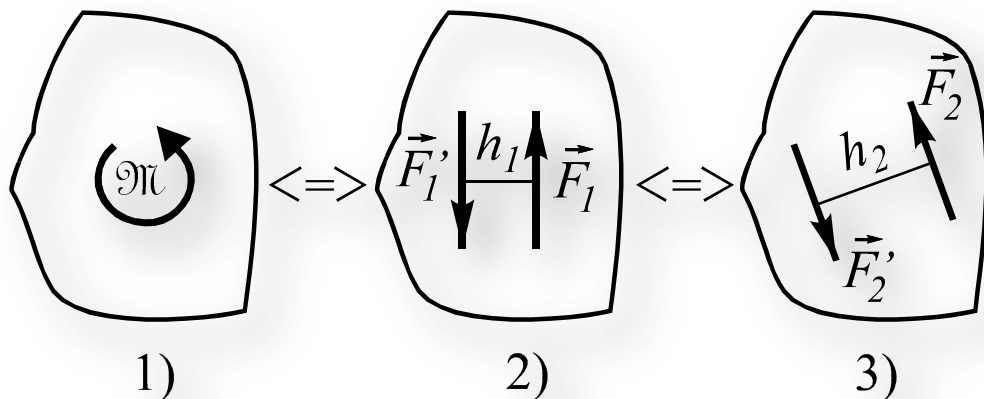
Silu, čije se dejstvo na telo prenosi u jednoj tački nazivamo koncentrisanom silom. Za mehaničko dejstvo koje se na telo prenosi u neprekidnom nizu tačaka koristi se naziv neprekidno raspoređene sile (kontinualno opterećenje).

Prema jednoj klasifikaciji sila i spregova u mehanici, mehanička dejstva (sile i spregovi) mogu biti aktivna i pasivna, a prema drugoj spoljašnja i unutrašnja.

Aktivna dejstva mogu da izazovu kretanje dok pasivna to ne mogu. Reakcije veza spadaju u pasivna dejstva i one upravo sprečavaju neka kretanja tela. Spoljašnja sila koja dejstvuje na telo potiče izvan tog tela. Dejstva jednog dela tela na drugi njegov deo nose naziv unutrašnja dejstva.

**Spreg** je određen svojom vrednošću  $\mathcal{M}$  (moment sprega), ravni dejstva i smerom. Ravan dejstva sprega je ravan u kojoj leži spreg i oznaka

Strelica na oznaci određuje smer dejstva sprega, odnosno, smer u kome taj spreg teži da okrene telo na koje dejstvuje.



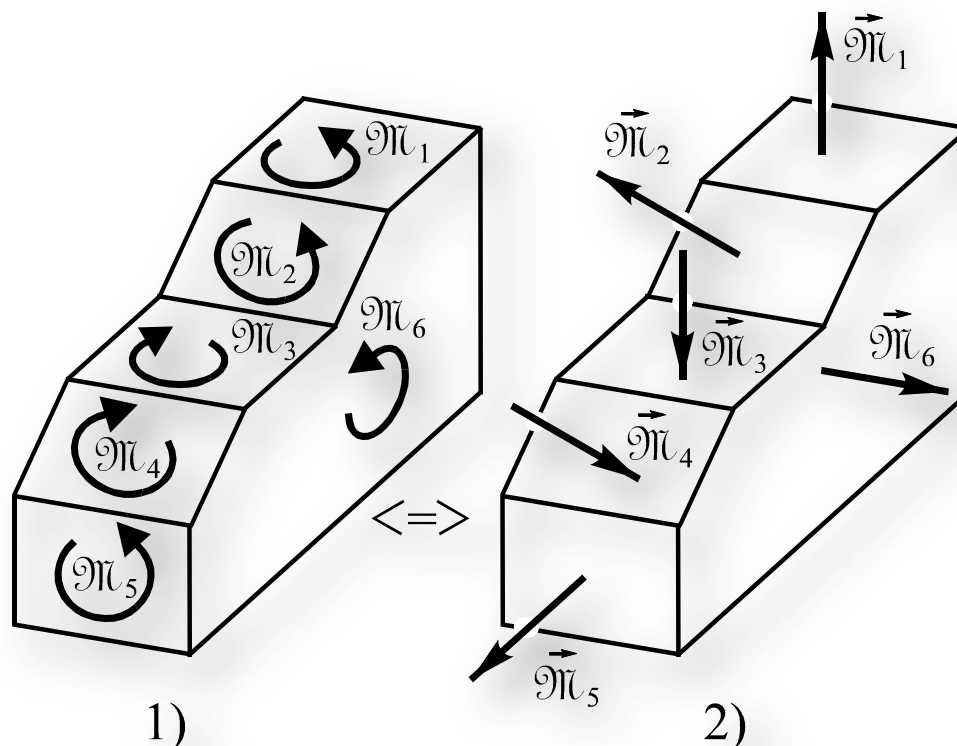
Ekvivalentan spregu je **spreg sile**, sačinjen od dve sile istog intenziteta i pravca a suprotnog smera.

$$\mathcal{M} = F_1 h_1 = F_2 h_2$$

Najkraće rastojanje napadnih linija tih sila nosi naziv krak sprega sile. Pri zameni sprega spregom sile, pravac sile može biti proizvoljno izabran, njihov intenzitet takođe ali proizvod odabrane sile i kraka sprega sile mora biti isti kao moment sprega  $\mathcal{M}$ .

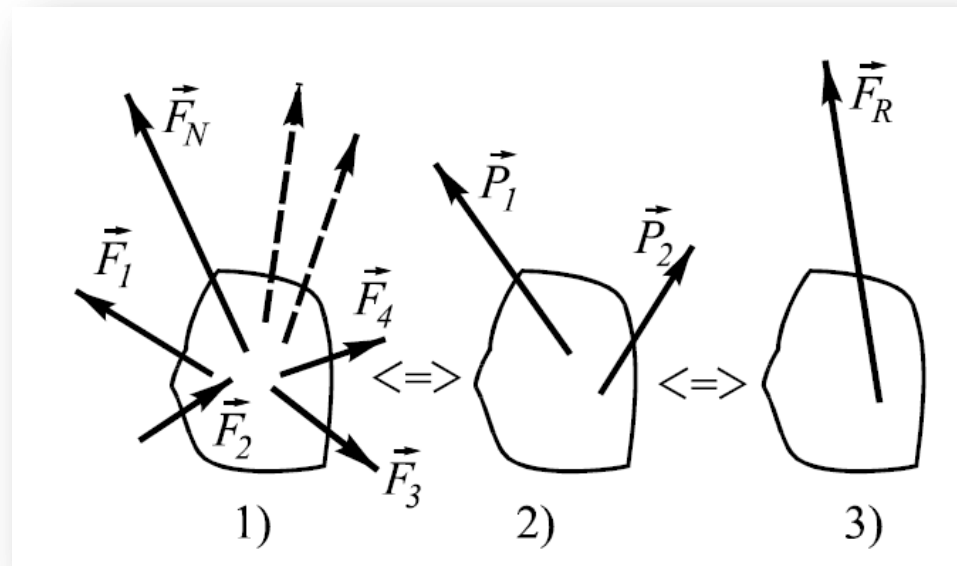
## PREDSTAVLJANJE SPREGA KAO VEKTORA

Pravac vektora sprega je upravan na njegovu ravan dejstva. Smer se može odrediti i pomoću pravila desne ruke prema kojem će palac odrediti smer vektora sprega ako se prsti desne ruke postave u smeru njegovog dejstva.



Intenzitet vektora nekog sprega, jednak je momentu tog sprega

# 4. Ekvivalentni sistemi sila i rezultanta



1) Zadati (originalni) sistem sila, 2) Ekvivalentni sistem sila zadatom, 3) Rezultanta

Ako je stanje tela (misli se na ravnotežu ili kretanje) na koje djeluje neki zadati sistem sila potpuno isto sa njegovim stanjem kada na njega djeluje drugi, jednostavniji sistem sila, onda se taj drugi sistem naziva jednostavnijim ekvivalentnim dejstvom zadatom sistemu.

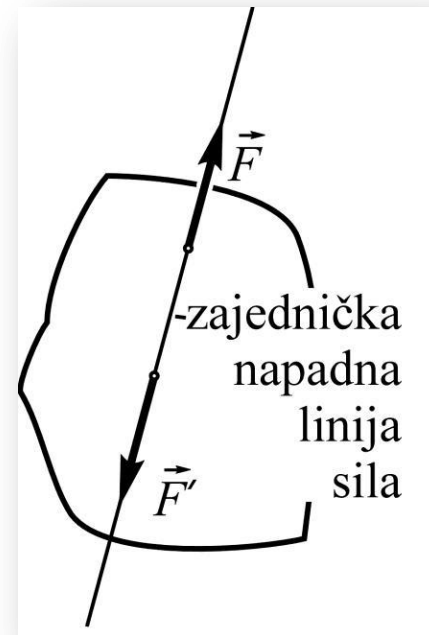
Ako je najjednostavnije ekvivalentno dejstvo nekom sistemu sila samo jedna onda se ta sila naziva **rezultantom** zadatom sistemu sila.

## 5. Aksiome statike

Sve teoreme i jednačine statike izvode se iz nekoliko osnovnih postavki, koje se usvajaju bez matematičkih dokazivanja i nazivaju se *aksiomama* ili *principima statike*. Aksiome statike predstavljaju rezultat uopštavanja mnogobrojnih opita i opažanja utvrđenih praktičnim iskustvom pri posmatranju ravnoteže ili kretanja tela. Izvestan broj ovih aksioma je posledica osnovnih zakona mehanike.

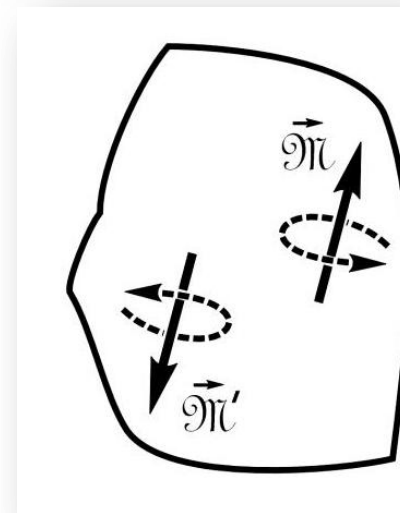
## Prva aksioma

Ako na jedno slobodno kruto telo dejstvuju samo dve sile, onda to telo može da se nalazi u ravnoteži, tada i samo tada, ako te dve sile dejstvuju duž iste napadne linije i ako imaju jednake intenzitete a suprotne smerove.



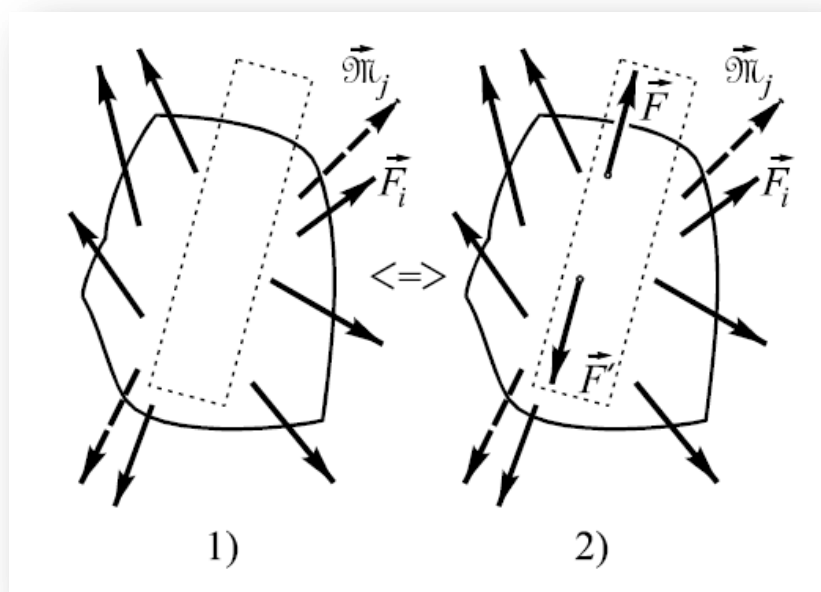
## Druga aksioma

Ako na jedno slobodno kruto telo dejstvuju samo dva sprega, onda to telo može da se nalazi u ravnoteži, tada i samo tada, ako su vektori ta dva sprega paralelni i ako imaju jednake intenzitete a suprotne smerove.

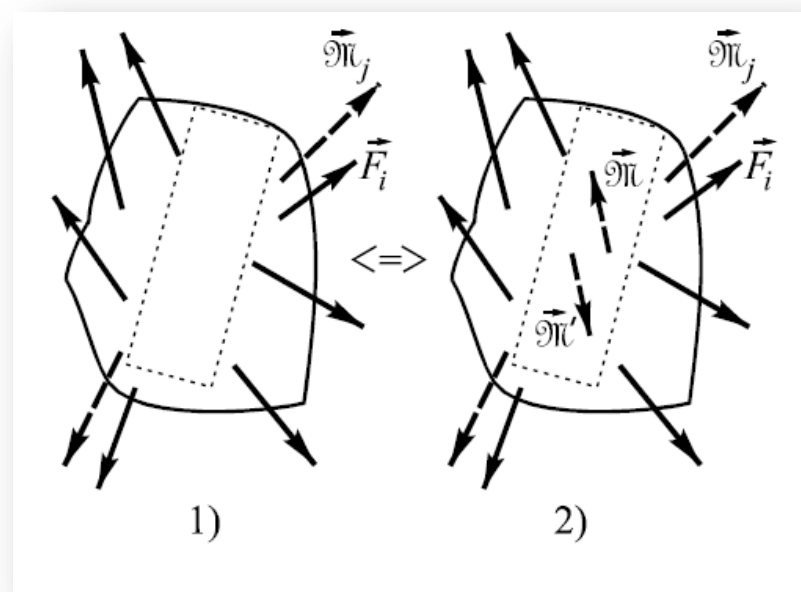


## Treća aksioma

Stanje krutog tela na koje dejstvuju zadate sile i spregovi se ne menja, ako se tom sistemu sila i spregova dodaju ili oduzmu dve uravnotežene sile ili dva uravnotežena sprega.



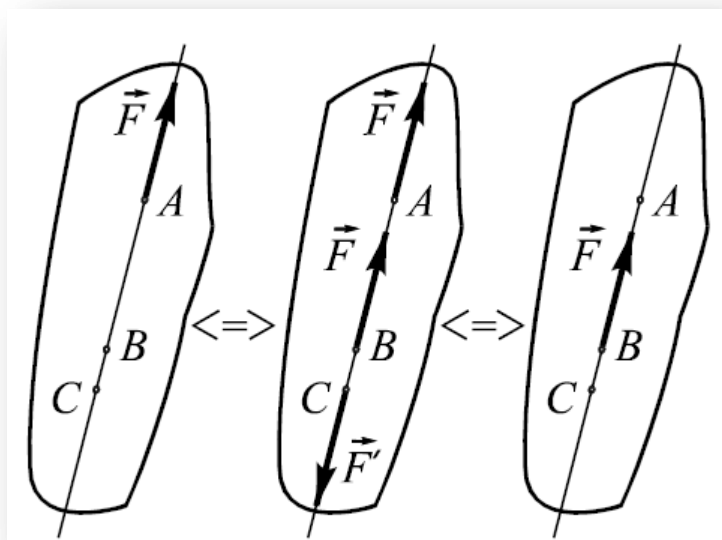
*Ekvivalentnost sistema koji se razlikuju za dve uravnotežene sile*



*Ekvivalentnost sistema koji se razlikuju za dva uravnotežena sprega*

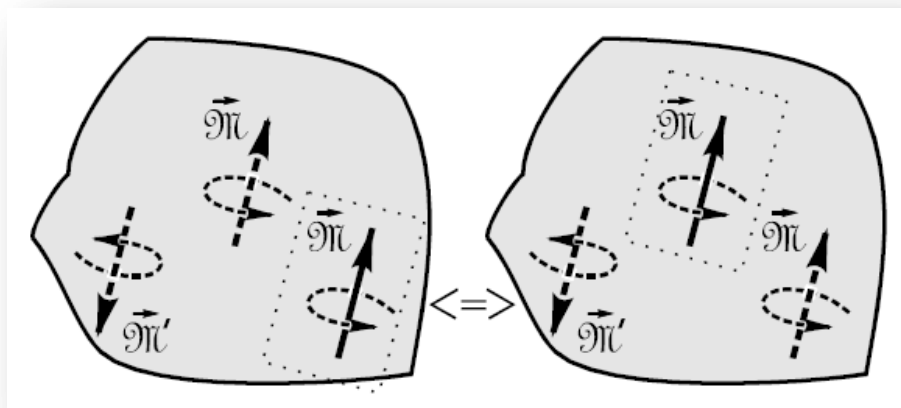
# Posledice treće aksiome

## Dokaz da je sila klizeći

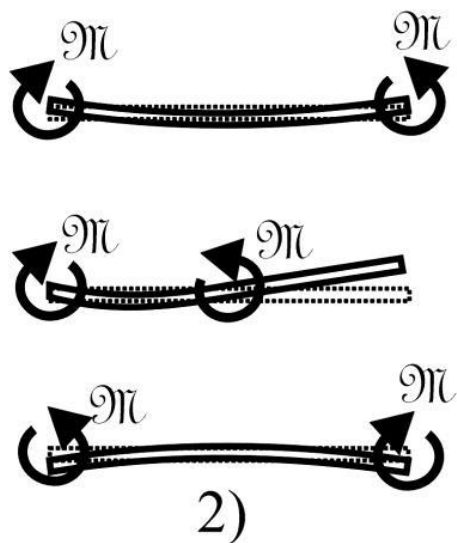
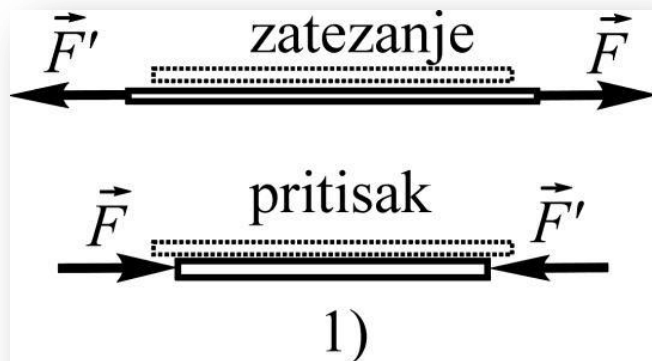


Sila je vektor koji je pomerljiv duž napadne linije

## Dokaz da je spreg slobodan vektor



Ovo potvrđuje da je za kruto telo spreg slobodan vektor i da se može proizvoljno paralelno prenositi sa jednog na drugo mesto tela na koje dejstvuje.

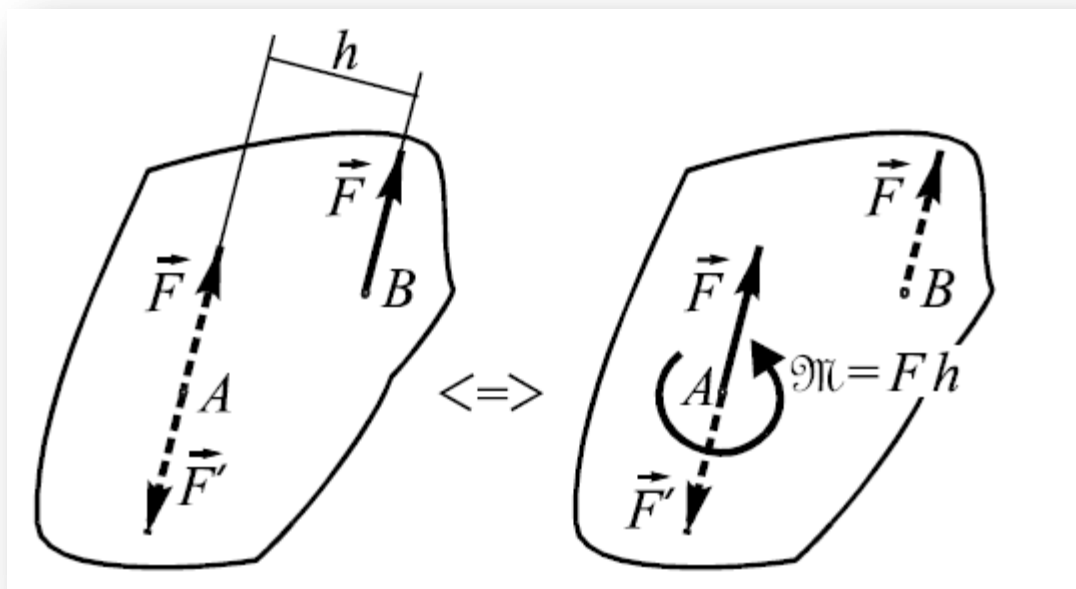


Recimo i to da je za deformabilno telo, u nekim slučajevima, pogrešno silu tretirati kao klizeći vektor i spreg kao slobodan vektor.

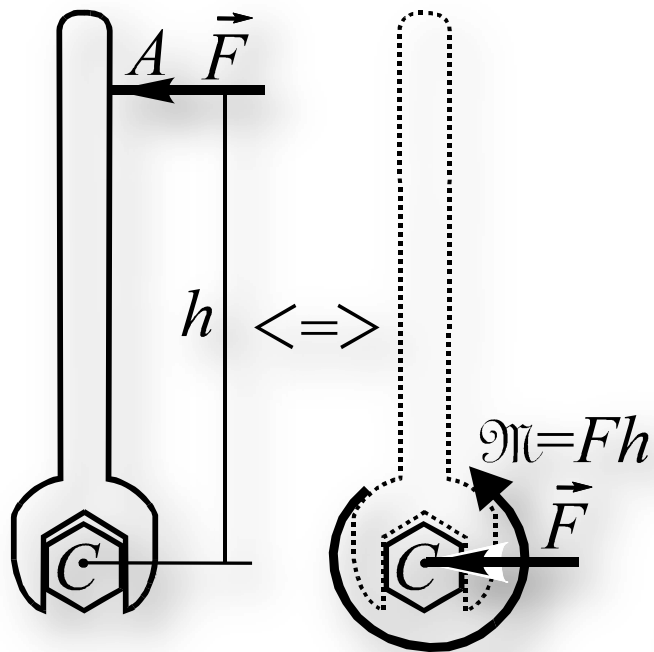
Pri analizi deformacija deformabilnog tela ne sme se sila tretirati kao klizeći vektor i spreg kao slobodan vektor. Slično tome, redukcija sile na tačku je takođe nedopustiva pri proučavanju deformacija deformabilnog tela.

*Za deformabilno telo sila ne mora biti klizeći a spreg slobodan vektor.*

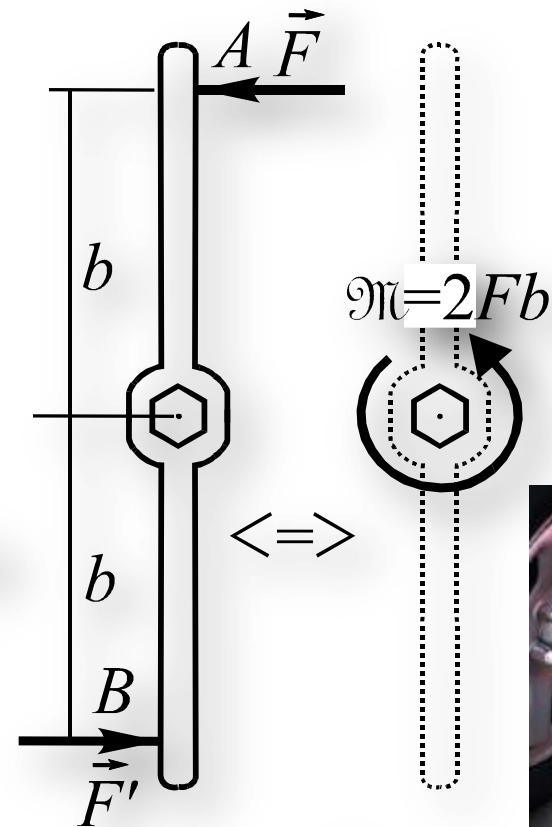
## Redukcija sile na zadatu tačku



Redukcija sile na tačku



1)



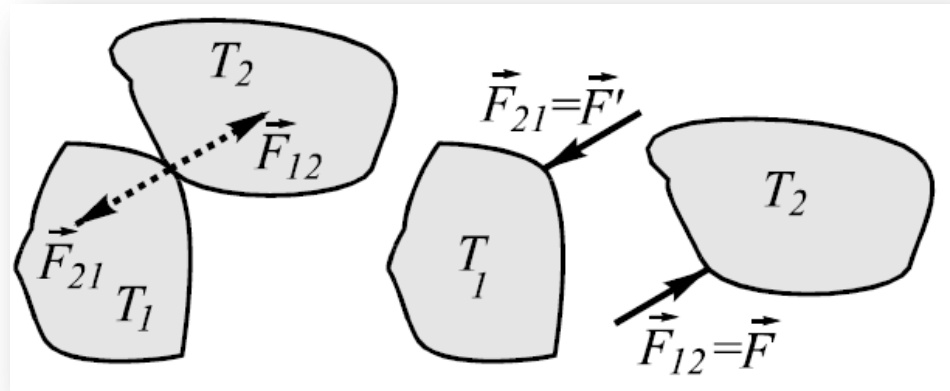
2)



Prenošenje dejstva sa ključa na zavrtnanj

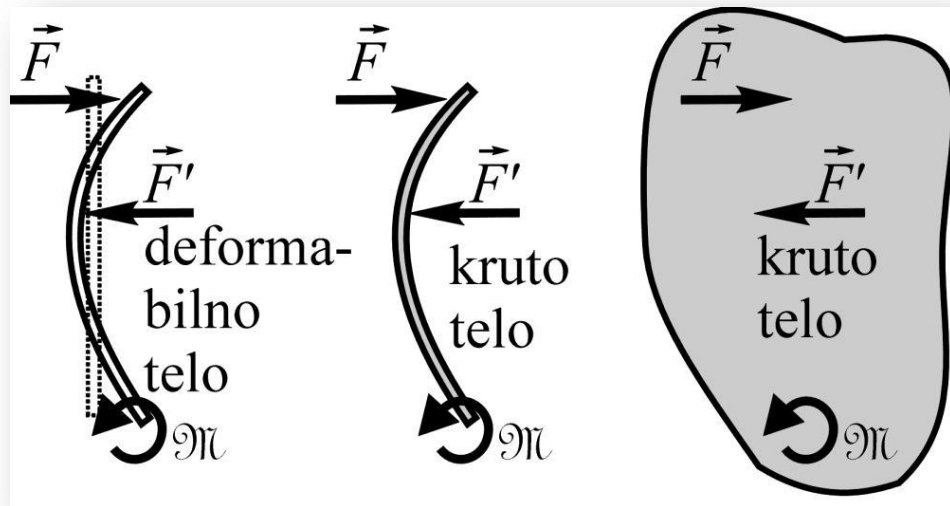
## Četvrta aksioma (Princip dejstva i protivdejstva)

Svakom dejstvu odgovara protivdejstvo jednako po veličini i pravcu, a suprotnog smera. Ova aksioma se naziva i zakonom akcije i reakcije i predstavlja jedan od osnovnih zakona mehanike, poznat kao treći Njutnov zakon.



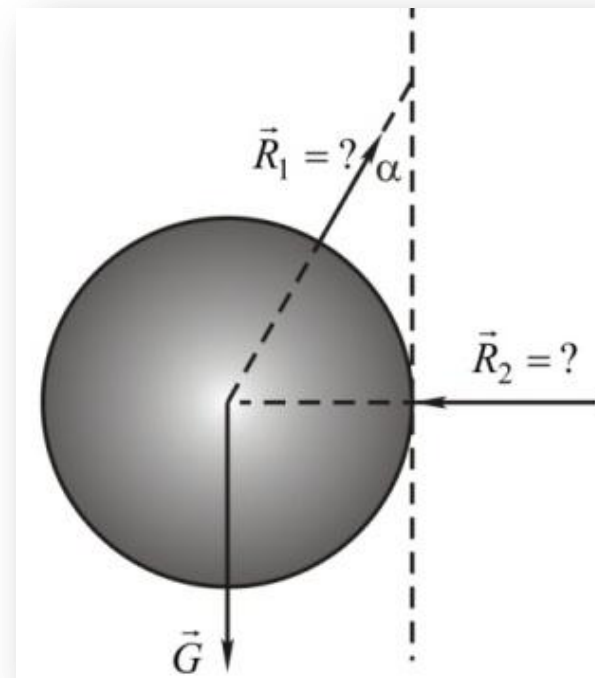
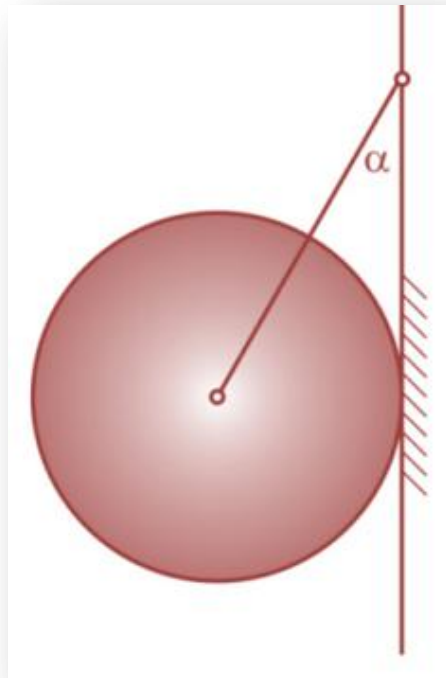
## Peta aksioma (Princip solidifikacije)

Uravnotežen sistema sila (odnosno, sila i spregova) koji dejstvuje na neko deformabilno telo bio bi uravnotežen i pri ukrućivanju tela



## Šesta aksioma (Aksioma o vezama)

Svako neslobodno (vezano) telo može se smatrati slobodnim ako se veze uklone, a njihovo dejstvo zameni odgovarajućim reakcijama veza. Pod vezom se podrazumeva telo koje posmatranom telu sprečava neka kretanja.

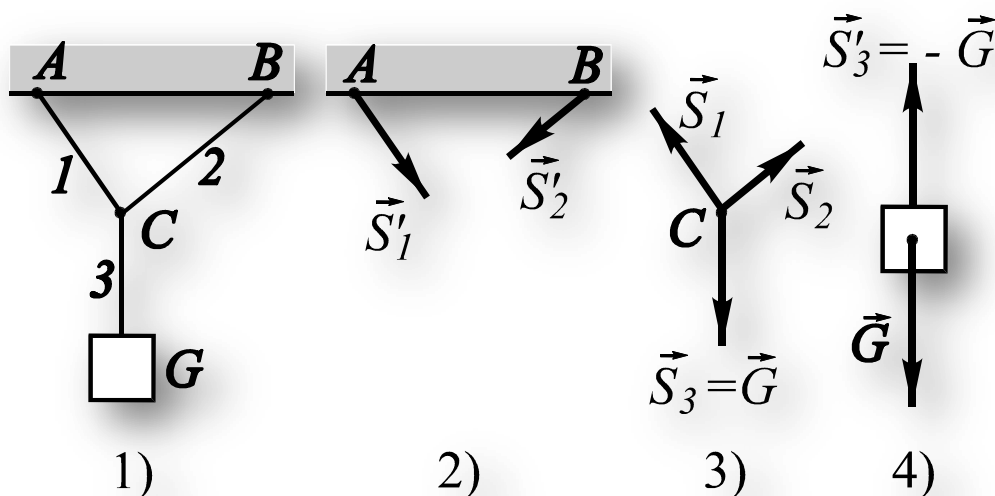
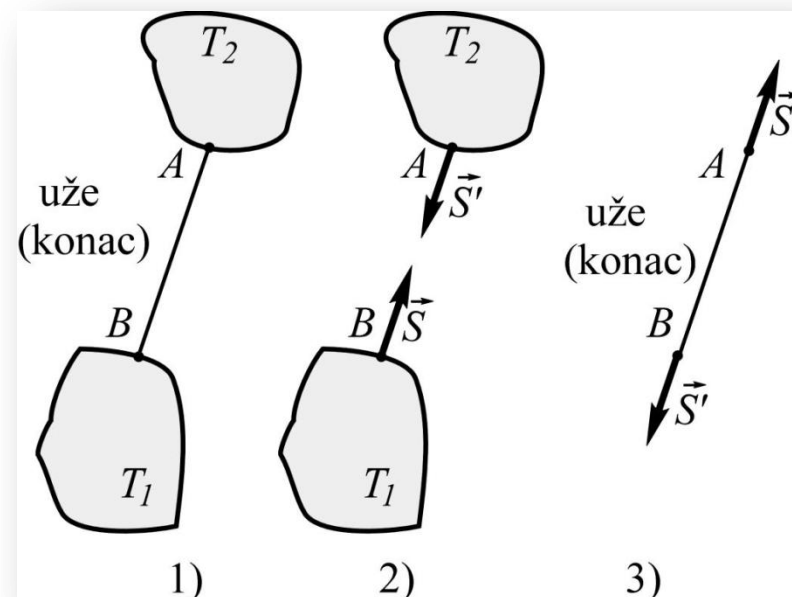


## 6. Reakcije elementarnih veza (uže, laki štap, glatka veza, zglob, ukleštenje)

U ovom odeljku će biti opisane samo one najelementarnije veze koje se sreću u prvom delu knjige. Ostale veze važne za ovaj kurs opisivaće se kasnije postepeno.

## Uže (konac)

Reakcije užeta, kojima ono dejstvuje na tela koja povezuje su u pravcu užeta, istih intenziteta, a suprotnih smerova (kakvi su prikazani na slici).

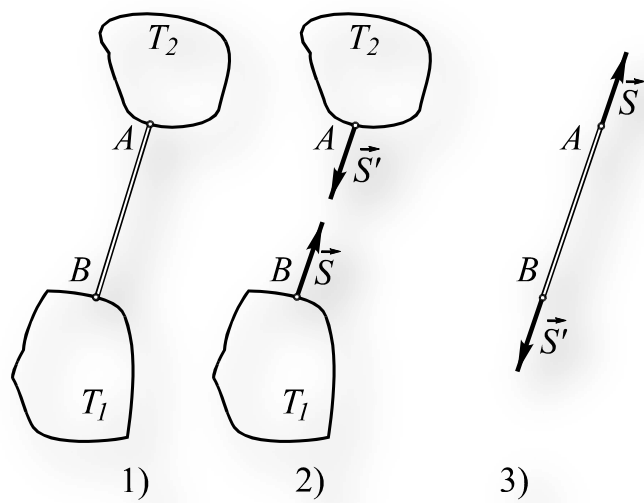


2) Sile kojima užad 1 i 2 dejstvuju na okolinu

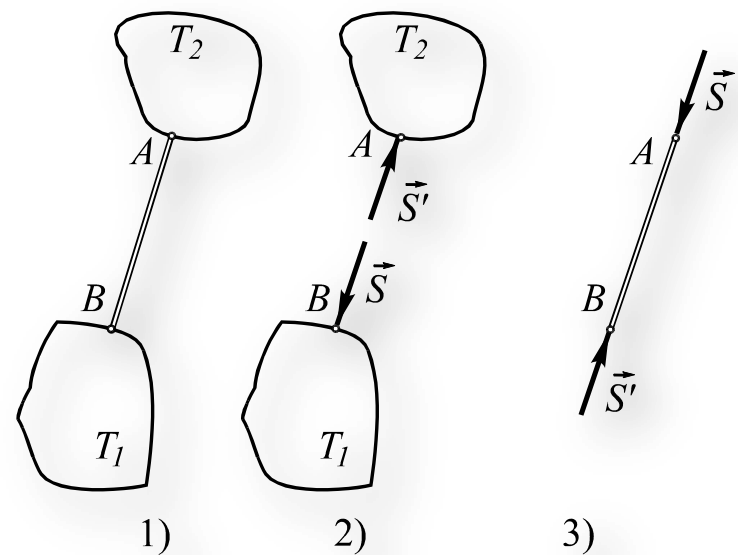
3) Uravnoteženi sistem sila koji dejstvuje na tačku C

4) Uravnoteženi sistem sila koji dejstvuje na teg težine G

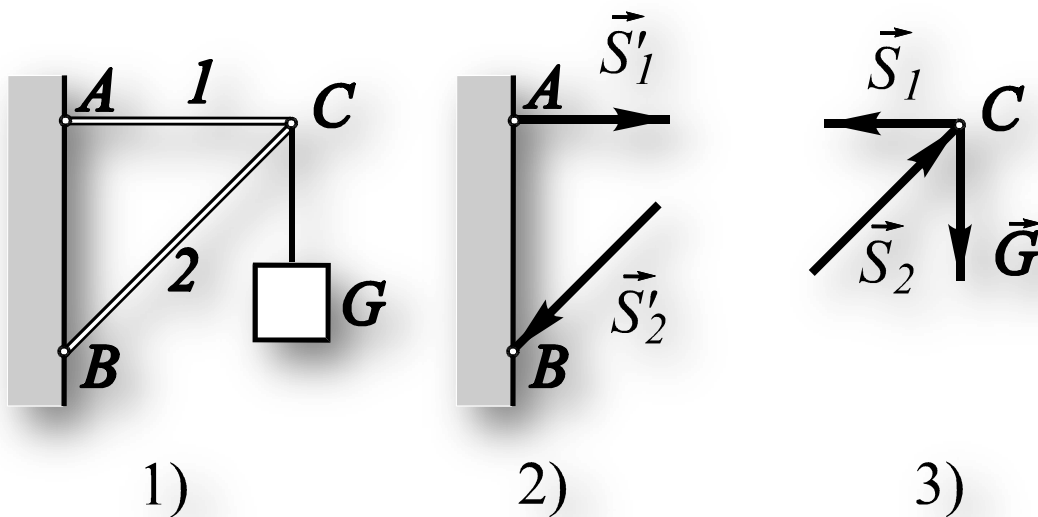
## Laki štap



*Zategnut laki štap*



*Pritisnut laki štap*



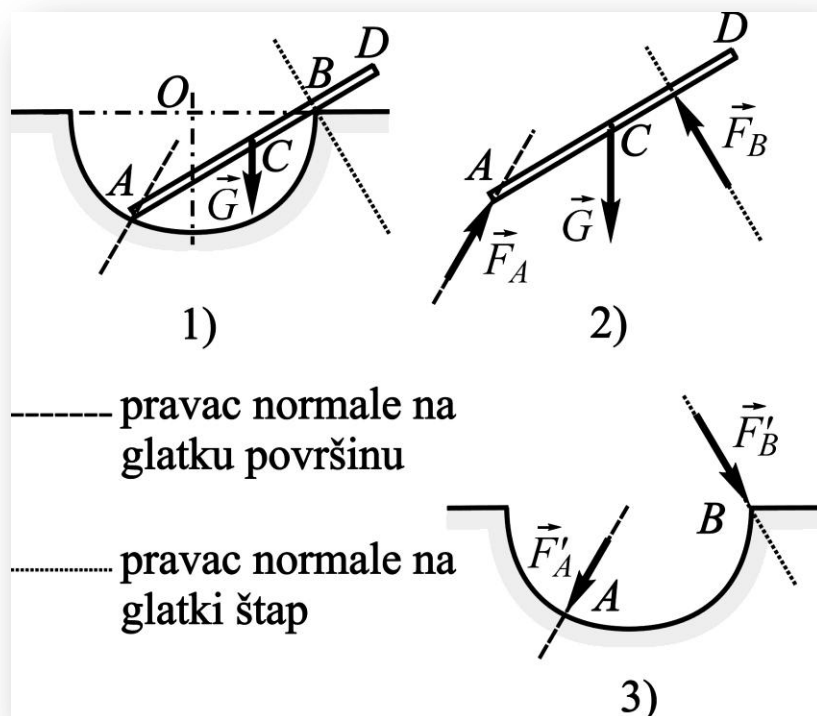
3) Uravnoteženi sistem sila koji djeluje na tačku C

Pretpostavljeno da je štap 1 zategnut a štap 2 pritisnut

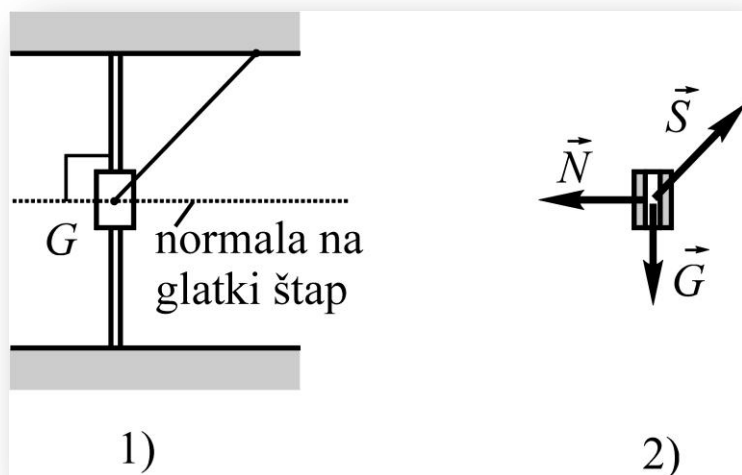
*Ravnotežni sistem sa dva laka štapa*

## Glatka površina

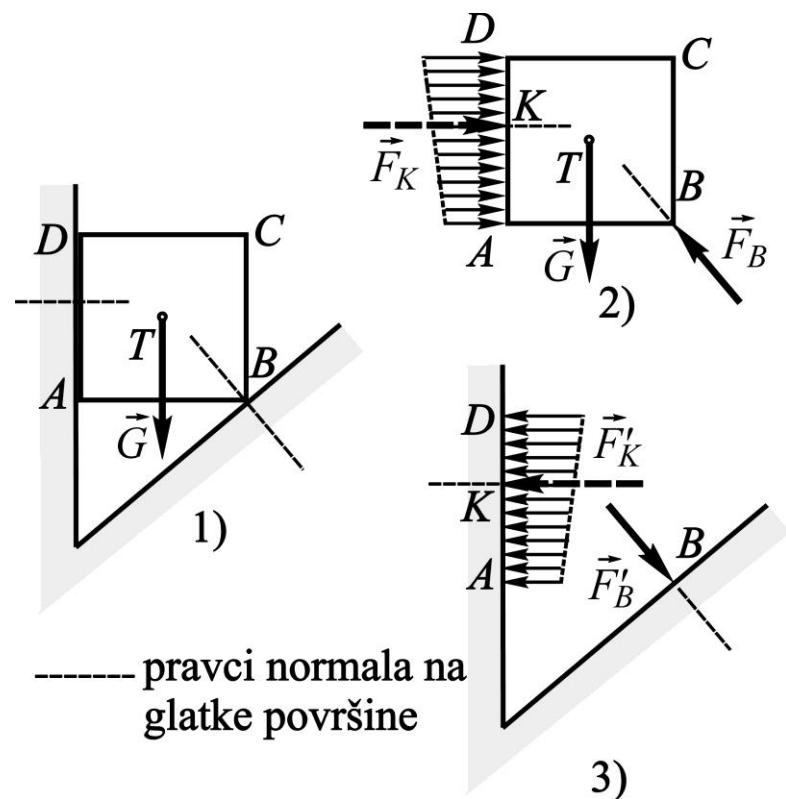
S obzirom da glatka površina nema mogućnost da spreči kretanje u pravcu glatke površine, u tom pravcu i ne može postojati reakcija. Dakle, pri kontaktu dva tela od kojih je jedno u kontaktu svojom glatkom površinom, reakcija mora biti upravna na tu glatku površinu.



*Štap naslonjen na ivicu B a krajnjom tačkom A na glatku cilindričnu površinu*



*Teški klizač za koji je vezano užo nalazi se na glatkom štapu*



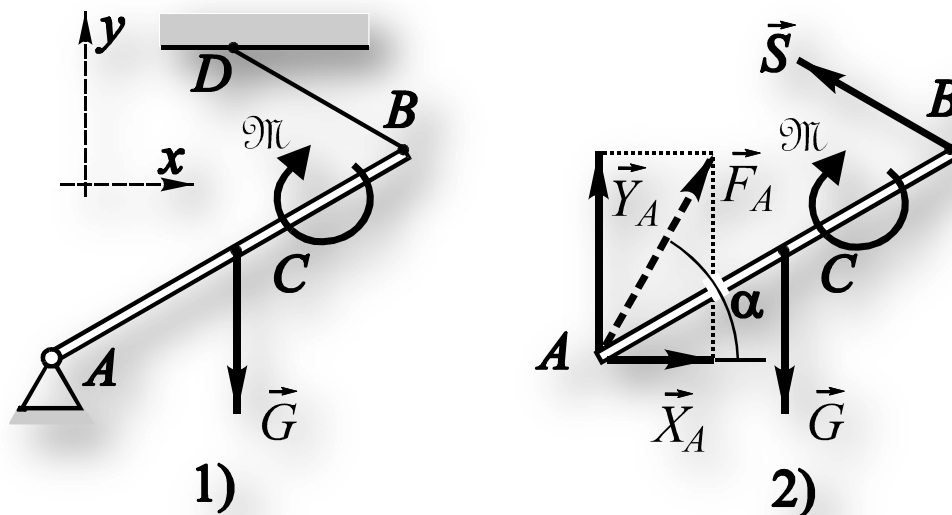
*Slučaj kada glatka površina jednog tela ima linijski kontakt sa drugim telom*

# Zglob

Okolina putem zgloba sprečava kretanje tački A u  $x$  pravcu reakcijom  $\vec{X}_A$  i u  $y$  pravcu reakcijom  $\vec{Y}_A$

Ove dve, međusobno upravne, reakcije su komponente reakcije zgloba  $\vec{F}_A$

Reakciju zgloba, u jednoj varijanti, određuju ugao  $\alpha$ , koji vektor te reakcije gradi sa pozitivnim delom  $x$  ose, i intenzitet reakcije  $F_A$  a u drugoj varijanti veličine  $\vec{X}_A$  i  $\vec{Y}_A$

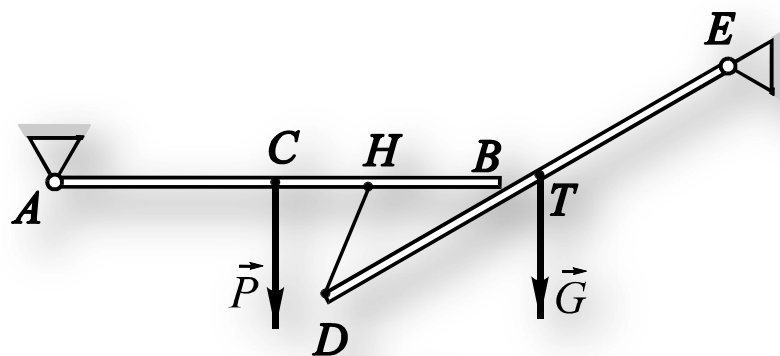


*Ravnotežni sistem koji sadrži i zglob kao vezu*

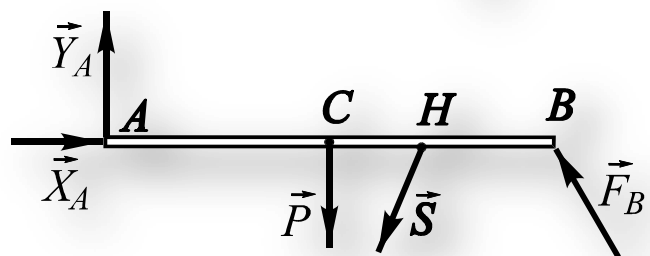
Veze između veličina  $\alpha$  i  $F_A$ , sa jedne strane, i  $X_A$  i  $Y_A$ , sa druge

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{Y_A}{X_A}$$

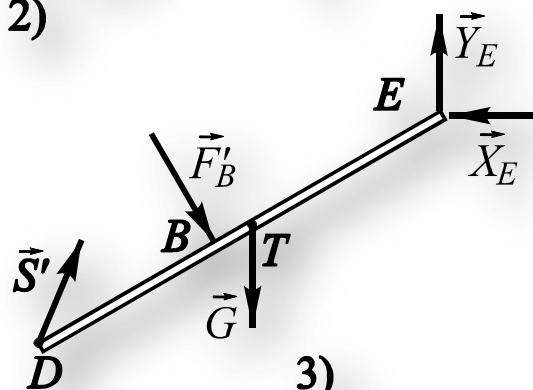
$$X_A = F_A \cos \alpha, \quad Y_A = F_A \sin \alpha$$



1)

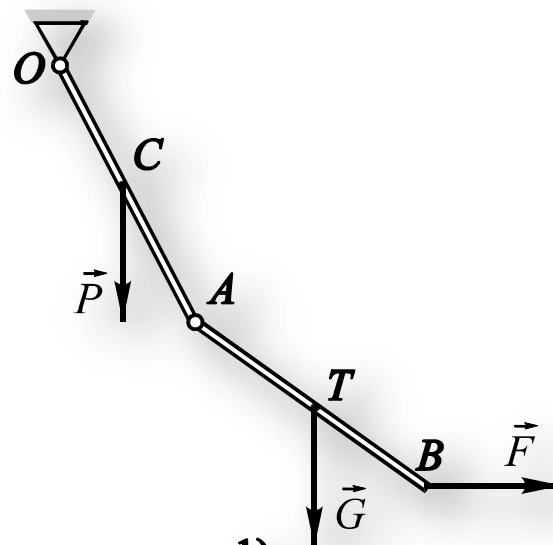


2)

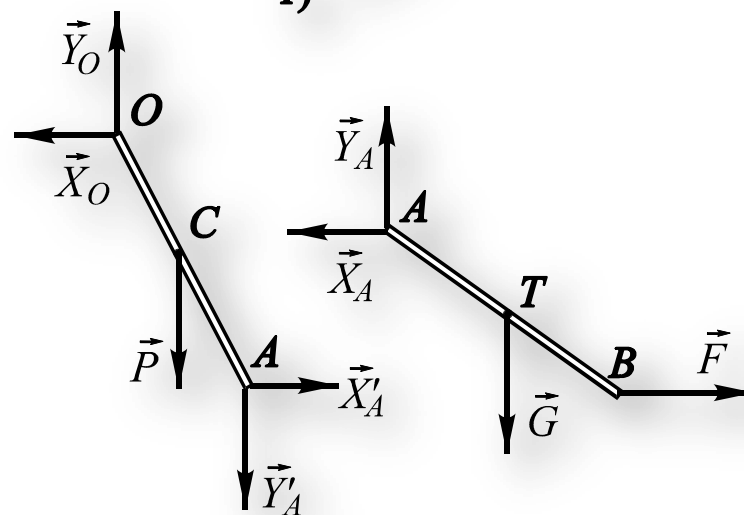


3)

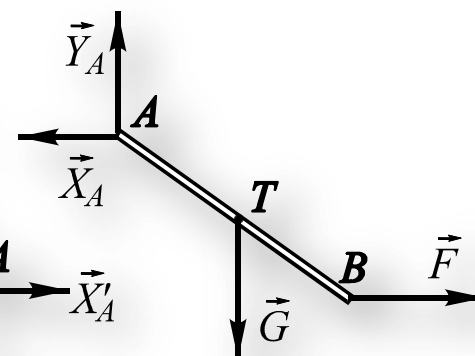
*Jedan ravnotežni sistem koji  
sadrži dva teška štapa*



1)



2)

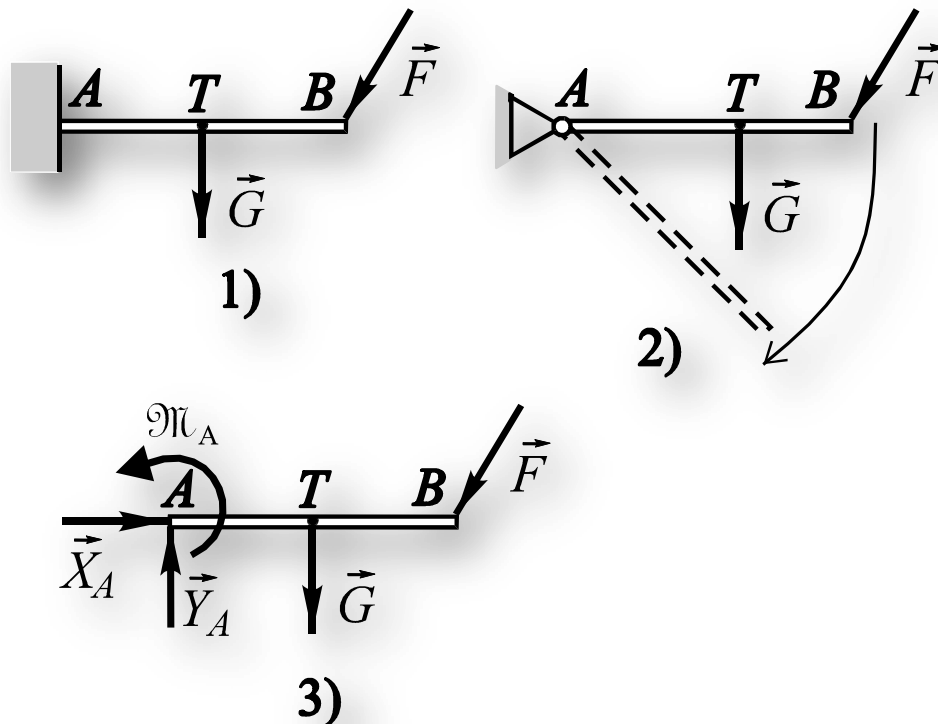


3)

*Ravnotežni sistem koji sadrži zglobovu  
vezu između dva elementa*

## Ukleštenje

Za štap koji je uzidan ili na neki drugi način kruto vezan za okolinu kaže se da je uklešten u nju. Veza ukleštenje, ukleštenoj tački sprečava kretanje u bilo kom pravcu a takođe sprečava i rotaciju.

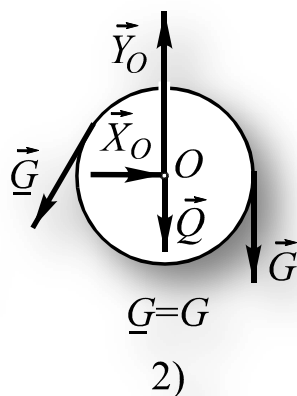
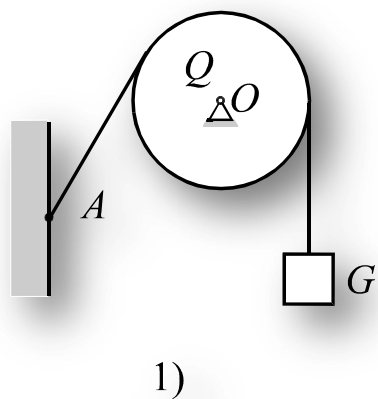
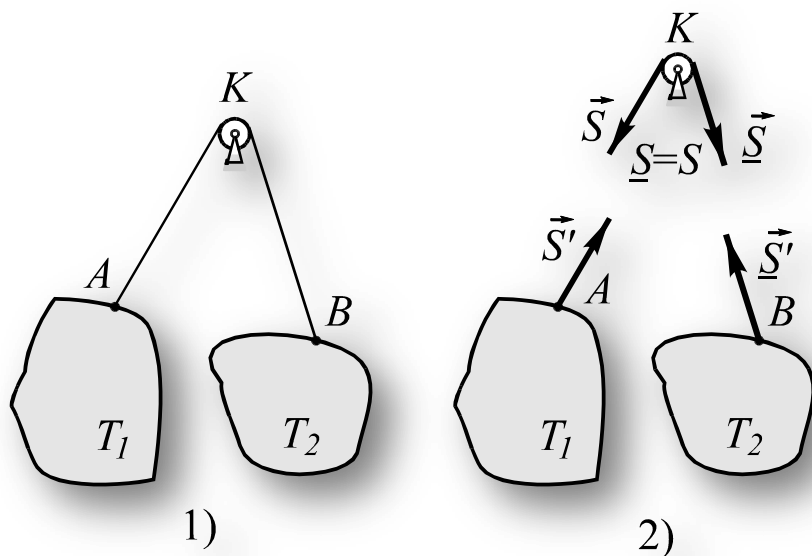


### U OVOM PRIMERU

Okolina putem ukleštenja sprečava kretanje tački A u x pravcu reakcijom a u y pravcu reakcijom

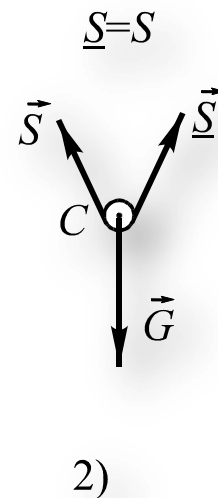
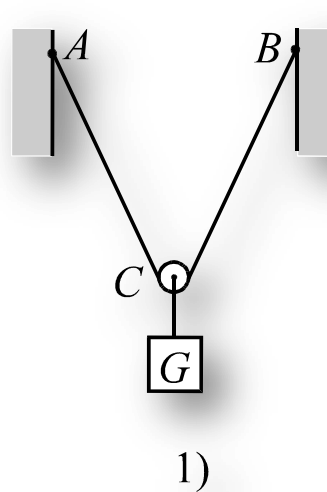
Okolina (zid) takođe sprečava i obrtanje štapa oko tačke A trećom reakcijom - reaktivnim spregom  $\mathcal{M}_A$  (obično nazivanim momentom ukleštenja)

## Napomena koja se tiče idealnog kotura



Za idealni kotur oko kojeg je prebačeno uže (ili konac) važi da je intenzitet sile u užetu sa jedne strane kotura jednak onome sa druge strane.

$$S' = \underline{S}' = \underline{S} = S$$



*Ravnotežni sistem koji sadrži idealni kotur zanemarljivih dimenzija*

# 7. Kolinearni sistem sila. Njegova rezultanta. Uslov ravnoteže

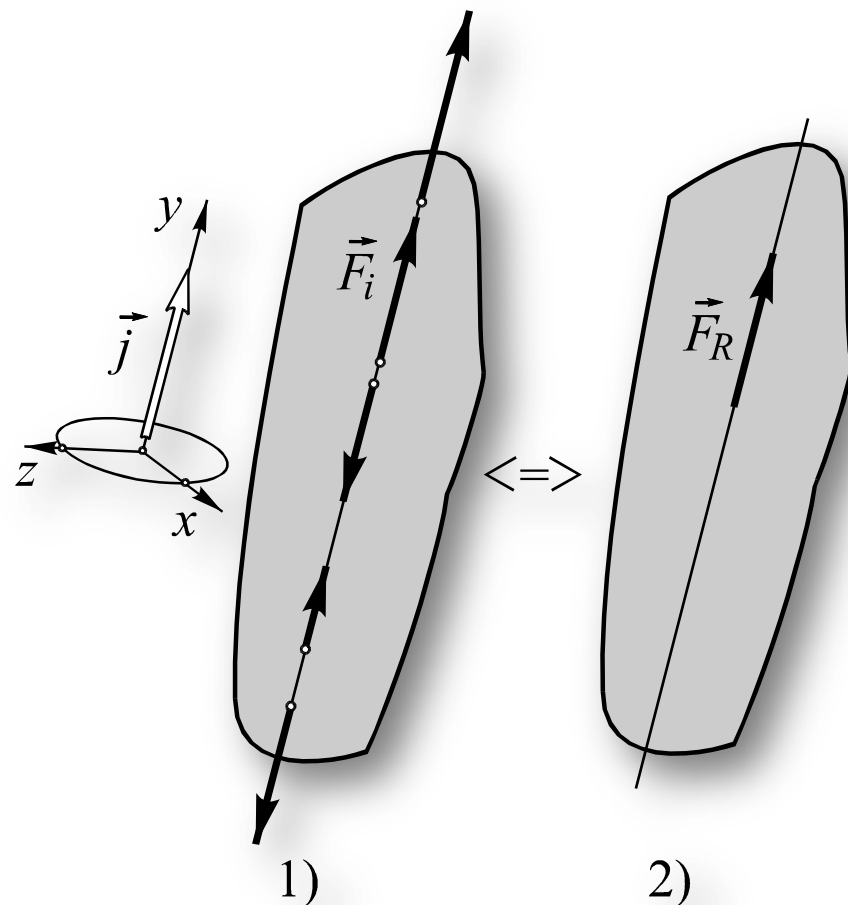
Ako je sistem sila sačinjen od ma koliko sila koje imaju istu napadnu liniju onda se on naziva **kolinearnim** sistemom sila.

Izaberimo osu  $y$  paralelnu vektorima sila ovog sistema. Svaka od sila će se projektovati samo na  $y$  osu, i to cela sa predznakom “plus” ili “minus”.

Kolinearni sistem sila ima rezultantu koja se dobija sabiranjem vektora kolinearnih sila, dakle:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$Y_R = \sum Y_i$$



Kolinearni sistem sila i njegova rezultanta

Kolinearne sile i dobijena rezultanta moraju imati istu napadnu liniju.

$$\vec{F}_i = Y_i \vec{j}, \quad \vec{F}_R = Y_R \vec{j}$$

# RAVNOTEŽA KOLINEARNOG SISTEMA SILA

Telo na koje djeluje kolinearni sistem sila biće u ravnoteži ako je

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

To nas dovodi do “analitičkog uslova ravnoteže kolinearnog sistema sila”

$$\sum Y_i = 0$$

## Primer 3.3

$$2) \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_3 - G = 0$$

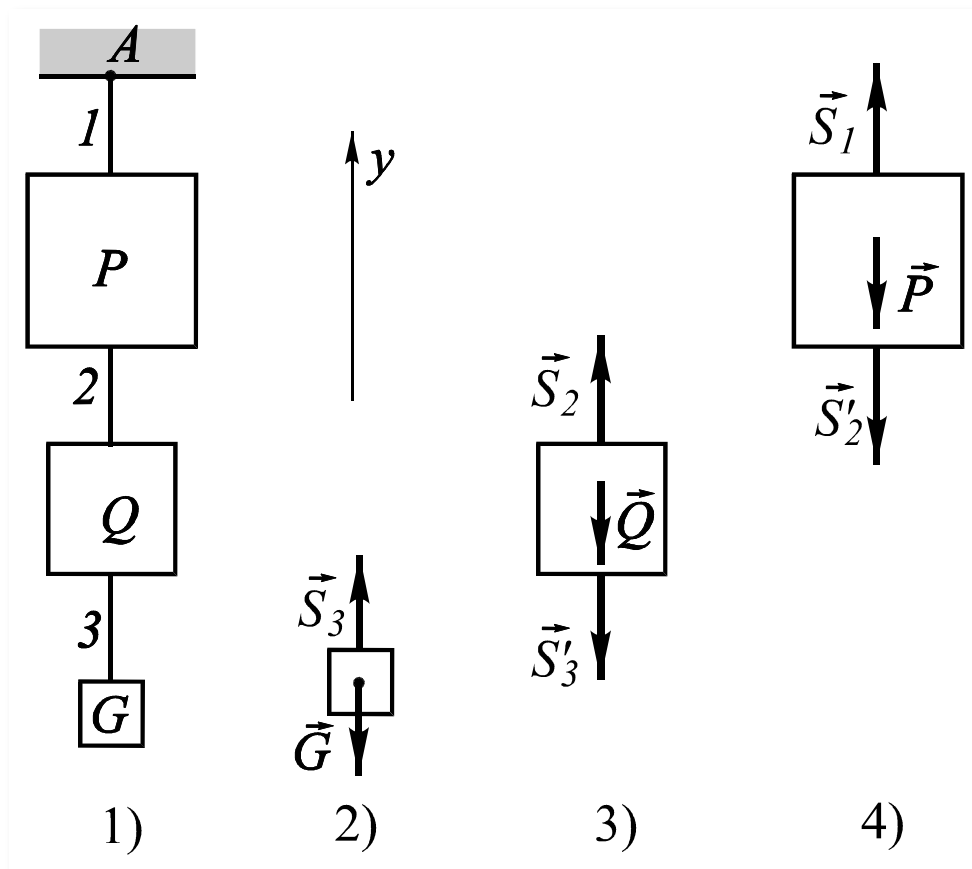
$$\Rightarrow S_3 = G$$

$$3) \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_2 - S_3 - Q = 0$$

$$\Rightarrow S_2 = G + Q$$

$$4) \Rightarrow \sum Y_i = 0 \Rightarrow S_1 - S_2 - P = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = G + Q + P$$



*Uravnoteženi kolinearni sistemi sila*

# Šta smo naučili?

1. **Objekti posmatranja u mehanici. Kruto telo. Tačka.**
2. **Osnovna kretanja tela u trodimenzijskom prostoru. Translacija. Rotacija.**
3. **Sila i spreg kao mere mehaničkog dejstva.**
4. **Ekvivalentni sistemi sila i rezultanta**
5. **Aksiome statike.**
6. **Reakcije elementarnih veza (uže, laki štap, glatka veza, zglob, ukleštenje).**
7. **Kolinearni sistem sila. Njegova rezultanta. Uslov ravnoteže.**

# Mehanika

## Predavanja 1

D. Radomirović, M. Zuković  
Novi Sad, 2022.