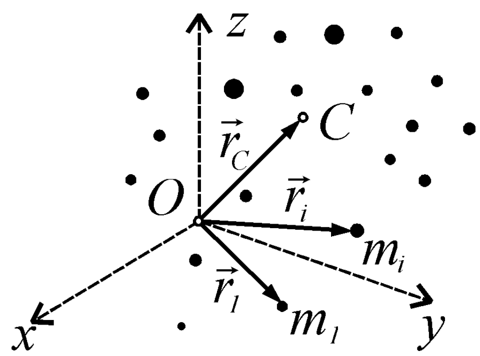
Središte sistema materijalnih tačaka.

Neka je proizvoljni sistem sačinjen od konačnog broja materijalnih tačaka čija međusobna rastojanja mogu biti i promenljiva. Svaka materijalna tačka sistema ima svoju masu i u svakom trenutku svoj vektor položaja u odnosu na nepokretni pravougli Dekartov koordinatni sistem.



Neka je za *i*-tu tačku sistema masa označena sa m_i, a vektor položaja sa $\vec{r}_i$. Projekcije vektora položaja $\vec{r}_i$ su odgovarajuće koordinate tačke x_i , y_i i z_i , pa imamo $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$.

Važna tačka ovako definisanog sistema je njegovo središte (centar) *C* koja je takođe, u svakom trenutku, određena svojim vektorom položaja $\vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$, čije su projekcije istovremeno i koordinate tačke *C*.

Masa sistema M je zbir masa svih njegovih tačaka: $M = \sum m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$

Vektor položaja sistema $\vec{r}_C$ određuje formula: $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots}{M}$.

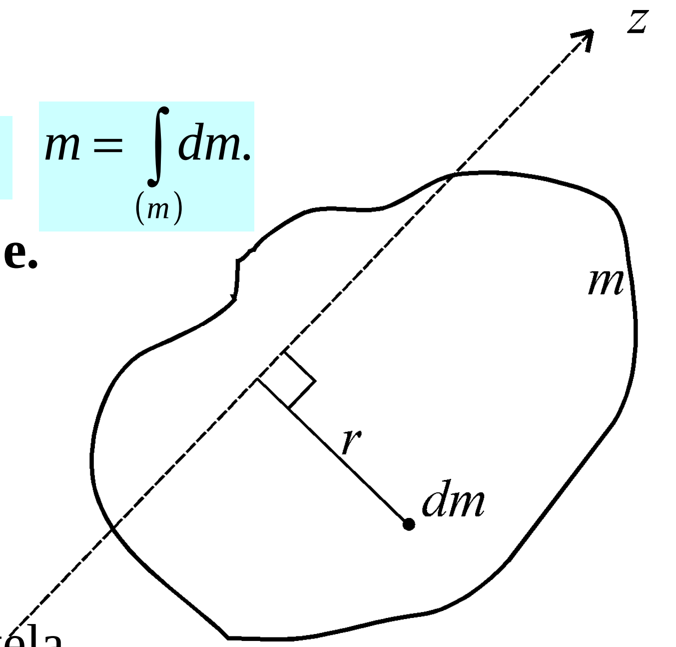
Projektovanjem ove vektorske jednakosti na koordinatne ose dobiće se formule koje određuju koordinate središta C:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}.$$

Za homogeno kruto telo: masa m_i, iz dobijenih formula, zamenjuje se sa masom elementarnog delića tela *dm*, koordinate *i*-te tačke x_i , y_i i z_i , zamenjuju se koordinatama *x*, *y* i *z* elementarnog delića, a suma prelazi u određeni integral po čitavoj masi krutog tela *m*, tako da te formule dobijaju oblik:

$$x_C = \frac{\int\limits_{(m)} x dm}{m}, \quad y_C = \frac{\int\limits_{(m)} y dm}{m}, \quad z_C = \frac{\int\limits_{(m)} z dm}{m}.$$

Na isti način, masu krutog tela *m* određuje formula $m = \int\limits_{(m)} dm.$

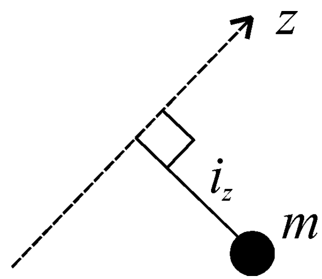


Moment inercije tela za osu. Poluprečnik inercije.

Da bi se definisao moment inercije tela mase *m* za neku osu, mora se znati da je moment inercije za istu osu elementarnog delića tela mase *dm*, jednak proizvodu njegove mase *dm* i kvadrata njegovog najkraćeg rastojanja *r* od te ose.

$dJ_z = r^2 dm$ -moment inercije elementarnog delića tela

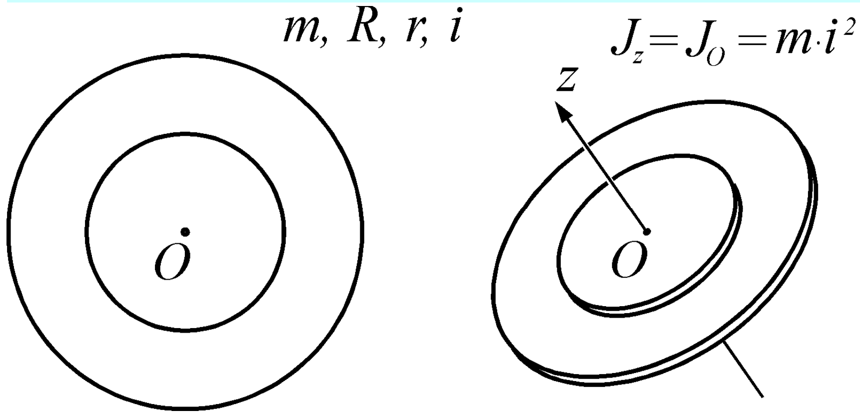
$J_z = \int\limits_{(m)} r^2 dm$ -moment inercije tela mase m za osu *z*



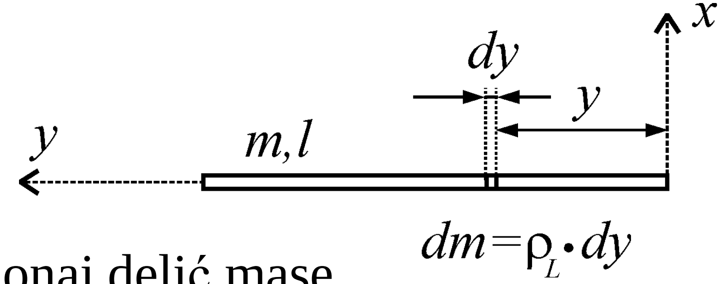
Sada se pitamo, na kom rastojanju od *z* ose (označimo ga sa i_z) bi trebala da se nalazi tačka mase *m* (jednake masi tela) da bi ta tačka imala isti moment inercije za *z* osu kao što ga ima telo.

$$J_z = m \cdot i_z^2 \quad \Rightarrow \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}}$$ - poluprečnik inercije tela za *z* osu

Poluprečnik inercije tela za neku osu, jednak je kvadratnom korenu iz količnika momenta inercije tela za tu osu i njegove mase.



Moment inercije doboša sa dva nivoa za osu simetrije *z* određivaćemo na osnovu zadate mase doboša *m* i odgovarajućeg poluprečnika inercije *i*.



Moment inercije homogenog štapa.

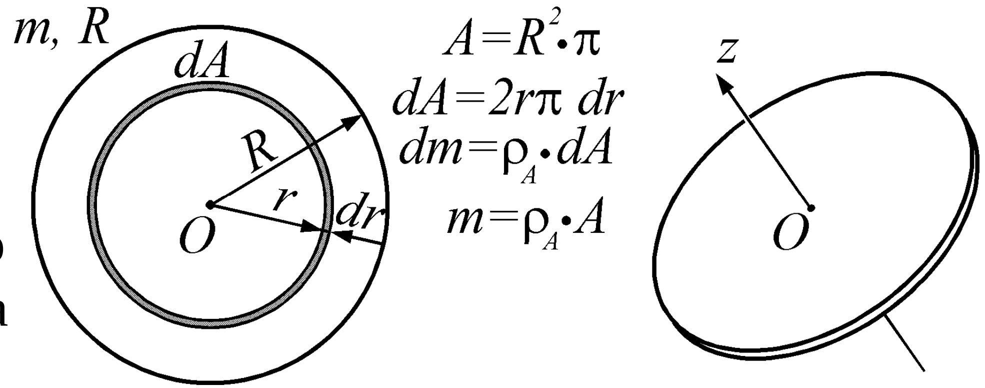
Za elementarnu masu štapa *dm* izabraćemo onaj delić mase koji je na rastojanju *y* od *x* ose i čija je dužina dy. Uvođenjem linijske gustine homogenog štapa ρ_L , tako da proizvod linijske gustine i dužine daje masu, imaćemo jednakosti: $m = \rho_L \cdot l, \;\; dm = \rho_L \cdot dy.$

$$J_x = \int_{(m)} y^2 dm = \int_0^l y^2 \rho_L dy = \rho_L \int_0^l y^2 dy = \rho_L \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^l \Rightarrow J_x = \frac{\rho_L}{3}\left(l^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}\underline{\rho_L \cdot l} \cdot l^2 \Rightarrow$$

$$J_x = \left(ml^2\right)/3.$$

Moment inercije homogenog kružnog diska.

Neka je masa homogenog kružnog diska označena sa *m*, a poluprečnik sa *R*. Izvedimo, prema definiciji, izraz za moment inercije homogenog kružnog diska za osu z koja prolazi kroz centar diska *O*, a upravna je na ravan diska.



Za elementarnu masu diska *dm* izabraćemo kružno - prstenasti deo poluprečnika r, debljine *dr*, površine *dA*. Površina *dA* je praktično ista kao i površina izdužernog pravougaonika dužine $2r\pi$ (kao što je obim kruga poluprečnika *r*) a širine *dr*, dakle $dA = 2r\pi \cdot dr.$

Ukupna površina kruga, poluprečnika R, koji definiše disk je $A = R^2\pi.$

Uvedimo površinsku gustinu homogenog diska ρ_A, tako da proizvod površinske gustine i površine daje masu. Za elementarnu masu diska i masu celog diska važe jednakosti: $dm = \rho_A \cdot dA = \rho_A \cdot 2r\pi \cdot dr,\quad m = \rho_A \cdot A = \rho_A \cdot R^2\pi.$

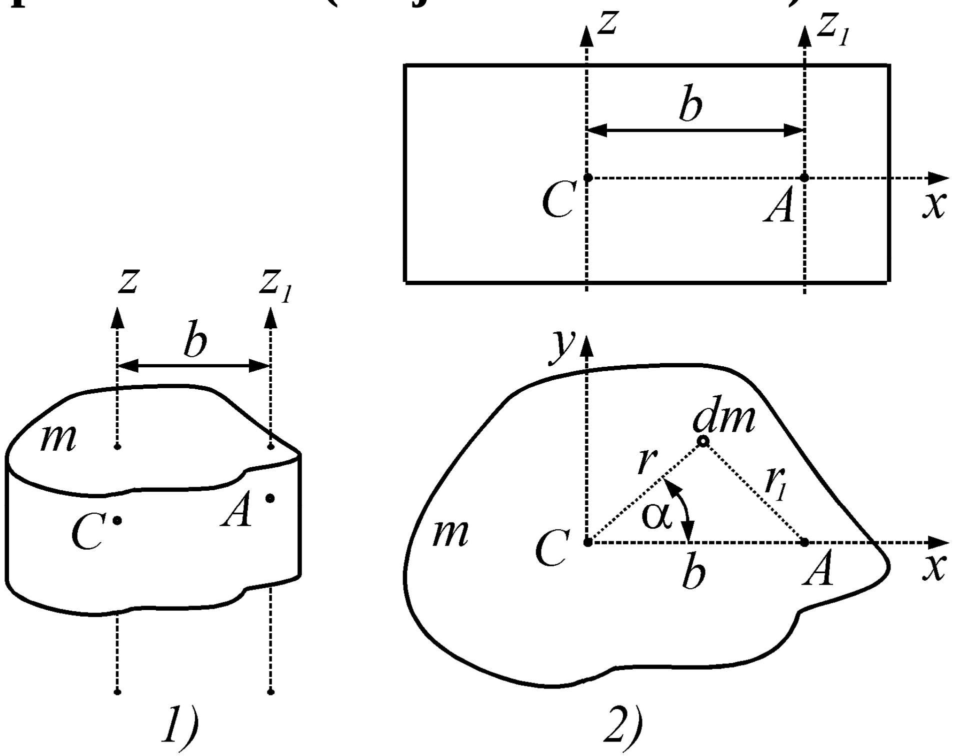
Da bi čitava masa diska bila obuhvaćena *r* koordinata ide u granicama od 0 do *R*.

$$J_z = \int_{(m)} r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho_A 2r\pi dr = \rho_A 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho_A 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{2} \cdot \rho_A \pi \cdot R^4$$

$$\Rightarrow \quad J_z = \frac{1}{2} \cdot \underline{\rho_A \cdot R^2 \pi} \cdot R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_z = \frac{1}{2} m R^2.}$$

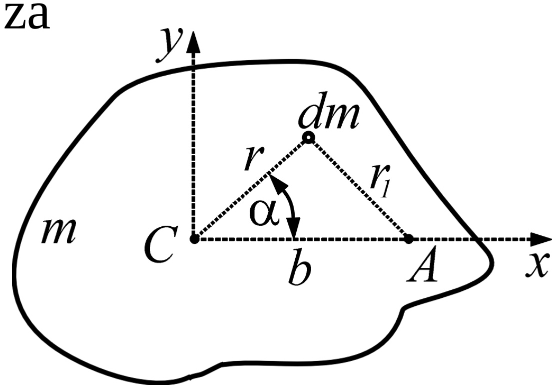
Veza između momenata inercije za paralelne ose (Štajnerova teorema).

Ovde je cilj da se pokaže kako izračunati momemt inercije tela za osu koja je paralelna težišnoj, kada se zna masa tela, njegov moment inercije za težišnu osu i rastojanje tih osa. Za telo prikazano na slici: težišna osa je osa *z* (pošto prolazi kroz težište *C*), njoj paralelna osa je osa z_1, masa je m a rastojanje između osa, označeno je sa *b*.



Na slici 2 ovo telo je prikazano u dve projekcije, gde je u pogledu, u pravcu ose *z*, prikazana proizvoljna elementarna čestica tela, mase *dm*. U istoj projekciji vidi se u pravoj veličini rastojanje između osa *b*, kao i rastojanja *r* i r_1, što su rastojanja između te čestice i osa *z* i z_1 , respektivno. Svaka čestica ima svoje rastojanje *r*, kao i svoj ugao α, koji to *r* gradi sa pravcem ose *x* (Sl.2). Primetimo da *x* koordinatu proizvoljne čestice određuje formula $x = r\cos\alpha$.

Za dobijanje tražene veze kreće se od momenta inercije za osu z_1 : $J_{z_1} = \int\limits_{(m)} r_1^2 dm.$



Na osnovu kosinusne teoreme za trougao sa slike, veličina r_1^2, izražena preko veličina b, α i r, iznosi

$$r_1^2 = r^2 + b^2 - 2b\underline{r\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = r^2 + b^2 - 2b\underline{x} \quad \Rightarrow$$

$$J_{z_1} = \int\limits_{(m)} \left(r^2 + b^2 - 2bx\right) dm \quad \Rightarrow \quad J_{z_1} = \int\limits_{(m)} r^2 dm + b^2 \int\limits_{(m)} dm - 2b \int\limits_{(m)} xdm.$$

Zato što je težište tela C na osi z, imamo da je $x_C = 0$, pa je $\int\limits_{(m)} xdm = x_C \cdot m = 0.$

Integral od dm, po čitavoj masi m, jednak je masi tela, dakle $\int\limits_{(m)} dm = m.$

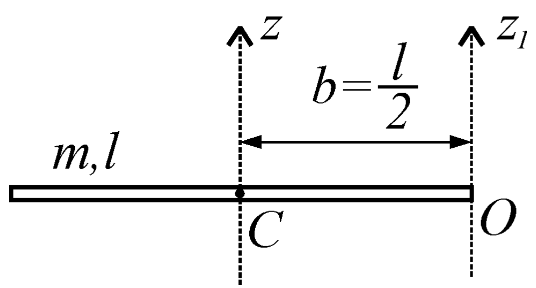
Konačno je $J_{z_1} = J_z + b^2 m$ - Štajnerova teorema

U tehničkoj terminologiji moment inercije za težišnu osu, kao što je ovde J_z, naziva se *sopstvenim momentom inercije*. Dalje, proizvod mase i kvadrata rastojanja između osa, kao što je ovde $b^2 m$, naziva se *položajnim momentom inercije*.

Dakle, Štajnerova teorema kaže da je moment inercije za osu paralelnu težišnoj, jednak zbiru sopstvenog i položajnog momenta inercije.

Česta je primena ove teoreme i u obrnutom smeru $J_z = J_{z_1} - b^2 m.$

Primer 5.1 Na osnovu izvedene formule $J_{z_1} = ml^2/3$ i Štajnerove teoreme odrediti sopstveni moment inercije homogenog štapa mase *m*, dužine *l* ?



Za traženi sopstveni moment inercije J_z koristićemo oznaku J_C , s obzirom da težišna osa prolazi kroz tačku *C*. Iz istog razloga umesto J_{z_1}, koristićemo oznaku J_O.

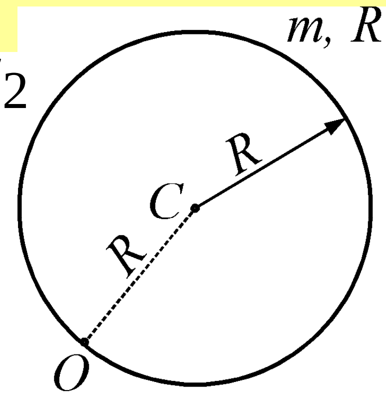
Položajni moment inercije ovde je $m \cdot b^2 = m \cdot \frac{l^2}{4}$.

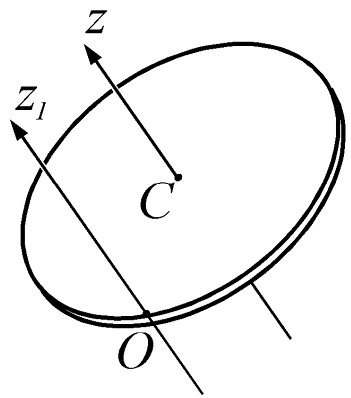
Pošto je sopstveni moment inercije razlika između momenta inercije za osu paralelnu težišnoj i položajnog momenta inercije, imamo

$$J_C = J_O - m \cdot b^2 = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2.$$

Dakle, moment inercije homogenog štapa, za osu upravnu na štap koja prolazi kroz njegov centar *C*, jednak je jednoj dvanaestini proizvoda mase štapa i kvadrata njegove dužine.

Primer 5.2 Na osnovu formule $J_z = mR^2/2$ i Štajnerove teoreme, odrediti moment inercije homogenog kružnog diska, mase *m*, poluprečnika *R*, za osu paralelnu osi simetrije diska koja prolazi kroz tačku *O*.

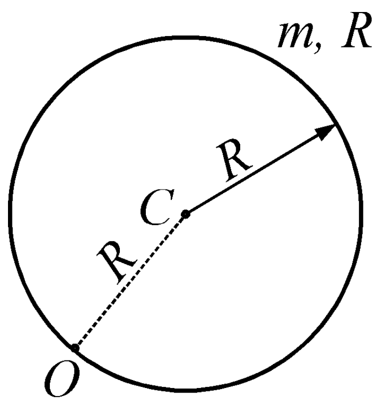


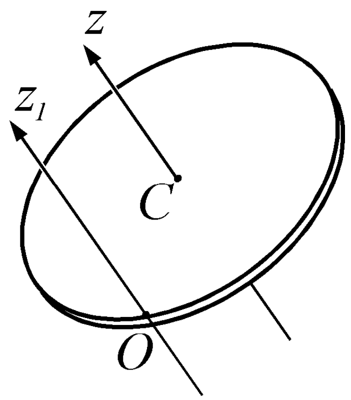


I ovde ćemo, umesto oznake J_z, koristiti oznaku J_C, a umesto J_{z_1}, oznaku J_O.

Položajni moment inercije ovde je

$$m \cdot b^2 = m \cdot R^2.$$





Pošto je moment inercije za osu paralelnu težišnoj jednak zbiru sopstvenog i položajnog momenta inercije, imamo

$$J_O = J_C + m \cdot b^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Kinetička energija za slučaj njegovog translatornog kretanja, obrtanja oko ose i ravnog kretanja.

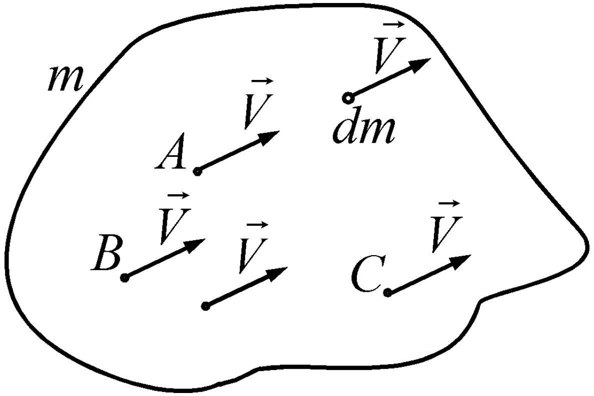
TRANSLATORNO KRETANJE

Kod translatornog kretanja tela brzina svake njegove tačke je ista. Neka u trenutku traženja kinetičke energije ona iznosi *V*. Ako je telo mase *m*, elementarna čestica tela ima masu *dm*, a kinetička energija elementarne čestice je

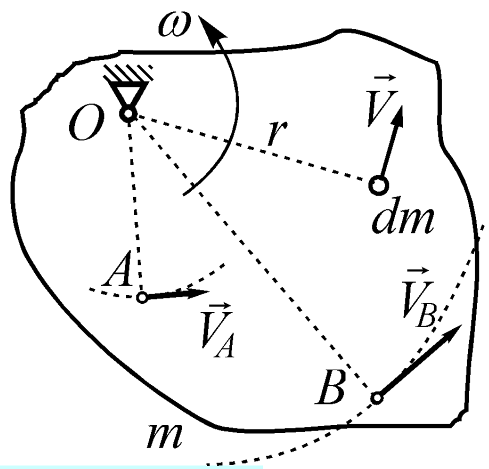
$$dE_k = \frac{1}{2} dmV^2.$$

Nakon integracije ovog izraza po čitavoj masi, s obzirom da *V*, kao konstantno za svaku česticu, ide ispred integrala, kinetičku energiju čitavog tela, koje vrši translatorno kretanje, određuje formula

$$E_k = \frac{1}{2} mV^2.$$



OBRTANJE OKO NEPOMIČNE OSE



Kod obrtanja krutog tela oko nepomične ose brzina elementarne čestice tela jednaka je proizvodu ugaone brzine tela i rasojanju r između te čestice i ose obrtanja. Kinetička energija elementarne čestice mase dm je

$$dE_k = \frac{1}{2} dmV^2 = \frac{1}{2} dm(r \cdot \omega)^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 dm.$$

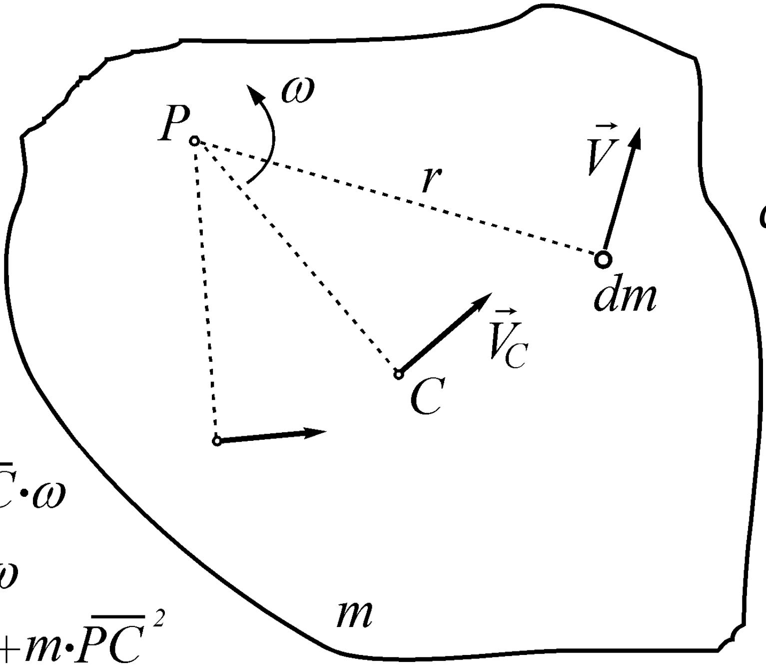
Integracija prethodnog izraza daje $E_k = \frac{\omega^2}{2} \int\limits_{(m)} r^2 dm,$

gde je ω, kao globalna karakteristika, stavljena ispred integrala.

Integral koji figuriše u ovom izrazu predstavlja moment inercije tela za osu obrtanja (označićemo ga sa J_O). Konačno, kinetičku energiju tela koje vrši obrtanje oko nepomične ose određuje formula $E_k = \frac{1}{2} J_O \omega^2.$

RAVNO KRETANJE

Kod ravnog kretanja krutog tela brzina elementarne čestice tela jednaka je proizvodu ugaone brzine tela i rasojanju r između te čestice i trenutnog pola brzine P. Pretpostavimo da su poznati masa tela m, ugaona brzina ω, brzina centra (težišta) V_C i moment inercije tela J_C za osu, upravnu na ravan kretanja, koja prolazi kroz centar C.



$V_C = \overline{PC} \cdot \omega$

$V = r \cdot \omega$

$J_P = J_C + m \cdot \overline{PC}^2$

Kinetička energija elementarne čestice mase *dm* je

$$dE_k = \frac{1}{2} dmV^2 = \frac{1}{2} dm(r \cdot \omega)^2 = \frac{\omega^2}{2} \cdot r^2 dm.$$

Integracija prethodnog izraza, daje

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \int_{(m)} r^2 dm \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2} J_P \omega^2.$$

Pošto je ova formula u mnogim problemima manje pogodna za određivanje kinetičke energije, izrazimo J_P po Štajnerovoj teoremi: $J_P = J_C + m \cdot \overline{PC}^2$.

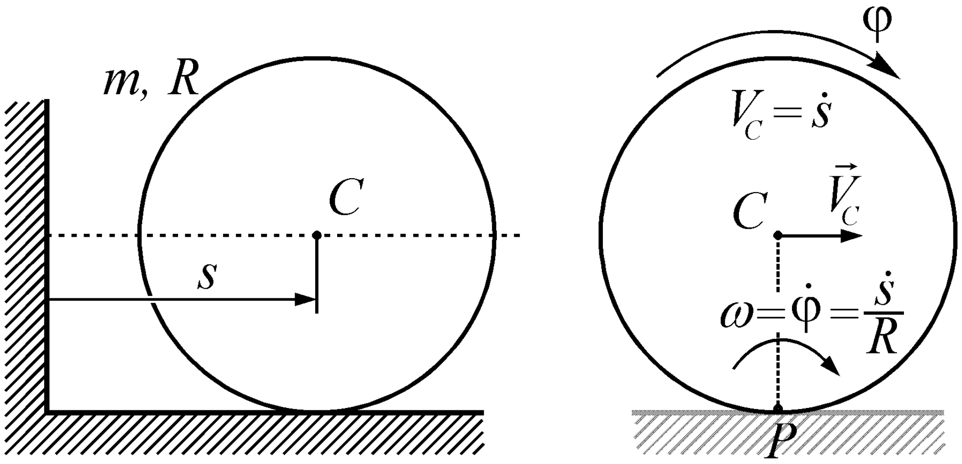
$$\Rightarrow \; E_k = \frac{1}{2}\left(J_C + m \cdot \overline{PC}^2\right) \cdot \omega^2 \;\Rightarrow\; E_k = \frac{1}{2} m \cdot \left(\overline{PC} \cdot \omega\right)^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2, \quad \left(\overline{PC} \cdot \omega\right)^2 = V_C^{\,2} \Rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot V_C^{\,2} + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2$$

- Kenigova teorema

Pošto ravno kretanje predstavlja istovremeno odvijanje translacije i rotacije, prvi sabirak u ***Kenigovoj teoremi*** se tumači kao kinetička energija usled translatornog dela kretanja, dok se drugi sabirak tumači kao kinetička energija usled rotacije oko centra *C*.

Primer 5.3 Korišćenjem Kenigove teoreme odrediti kinetičku energiju homogenog kružnog diska mase *m* poluprečnika *R* koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi? Koordinata koja određuje položaj diska je koordinata *s*.



1) 2)

Može se osim zadate koordinate *s* uvesti i pomoćna koordinata (ugao rotacije diska) φ (Sl.2). Neophodno je znati da izvod koordinate *s* po vremenu (dakle $\dot{s}$) predstavlja brzinu tačke *C*, kao i da izvod koordinate φ po vremenu (dakle $\dot{\varphi}$) predstavlja ugaonu brzinu diska ω. Takođe je neophodno znati, da količnik, brzine tačke *C* i rastojanja $\overline{CP} = R$, predstavlja ugaonu brzinu diska, pisanu kao ω, ili $\dot{\varphi}$. Dakle

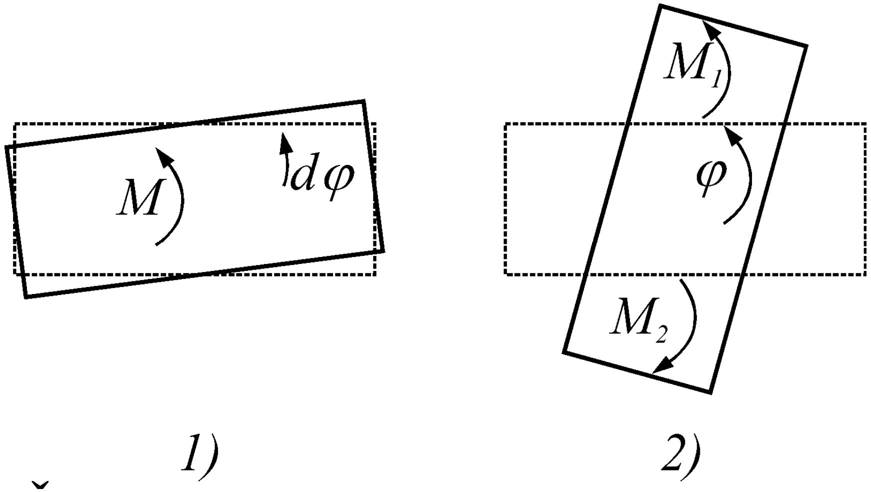
$$V_C = \dot{s}, \quad \omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R}.$$

Sada, prema Kenigovoj teoremi i poznatim formulama imamo:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \underline{J_C} \cdot \underline{\underline{\dot{\varphi}^2}} \quad \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \underline{\frac{1}{2} mR^2} \cdot \underline{\underline{\frac{\dot{s}^2}{R^2}}} \quad \Rightarrow E_k = \frac{3}{4} m \cdot \dot{s}^2$$

Rad i snaga sprega.

Kao što ima smisla govoriti o radu sile, kada se njena napadna tačka pomera, tako ima smisla govoriti o radu sprega, kada se telo na koje spreg dejstvuje obrće. Ogradimo se na definisanje rada sprega kod ravanskih problema, gde i spreg i rotacija tela na koje spreg dejstvuje leže u ravni crteža.



Elementarni rad sprega *M*, na elementarnoj rotaciji za ugao $d\varphi$, tela na koje spreg dejstvuje, jednak je proizvodu *M* i $d\varphi$ (Sl.1), dakle $dA(M) = M \cdot d\varphi.$

Ako bi spreg *M*, bio poznata funkcija koordinate φ, mogao bi se odrediti konačan rad sprega *M*, integraljenjem prethodnog izraza, u odgovarajućim granicama za φ (na primer, od φ_1 do φ_2):

$$A(M) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi.$$

U problemima koji će se rešavati u ovom kursu tražiće se uvek radovi konstantnih spregova za koje važi formula $A(M) = \pm M \cdot \varphi$, gde ugao φ predstavlja ugao obrtanja tela na koje dejstvuje spreg. Predznak će biti „+“ ako su smer sprega *M* i smer rotacije tela isti, dok će biti „-“ ako su ovi smerovi suprotni. Na slici 2 su prikazani konstantni spregovi M_1 i M_2 čiji radovi na rotaciji tela za ugao φ iznose

$A(M_1) = +M_1 \cdot \varphi, \quad A(M_2) = -M_2 \cdot \varphi.$

Slično kao i kod snage sile, ***snagu sprega M***, u ovakvim problemima, određuje formula

$$P(M) = \frac{dA(M)}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad P(M) = \pm M\omega.$$

U dobijenoj formuli, predznak će biti „+“ ako su smer sprega M i smer ugaone brzine tela isti, dok će biti „-“ ako su ovi smerovi suprotni.

Grubo rečeno, snaga sile se dobija množenjem sile i brzine, dok se snaga sprega dobija množenjem sprega i ugaone brzine.

Teorema o promeni kinetičke energije sistema.

Teorema o promeni kinetičke energije sistema u ovom kursu najčešće ćemo koristiti u obliku $E_k - E_{k0} = A,$ gde je:

E_k - kinetička energija sistema u proizvoljnom položaju;

E_{k0} - kinetička energija sistema u početnom položaju;

A - sumu radova svih sila i spregova, koji vrše rad pri premeštanju sistema iz njegovog početnog u proizvoljni položaj.

U tipskim problemima, koji će u najvećoj meri biti rešavani, sistemi će imati jedan stepen slobode kretanja i biće postavkom zadatka definisana jedna koordinata. Podrazumevaće se da je u početnom položaju vrednost te kordinate jednaka nuli.

Skiciran položaj sistema, u kojem ta koordinata ima proizvoljnu vrednost, je njegov proizvoljan položaj. Osim te definisane koordinate, obično će se u zadatim sistemima, pri rešavanju zadataka, uvoditi i pomoćne koordinate (gotovo uvek, pravolinijske i ugaone).

Podrazumevaće se, da su pomoćne koordinate na takav način izabrane, da svaka od njih, u početnom položaju ima vrednost nula. Prvi izvodi svih tih koordinata (kako zadatih, tako i pomoćnih) po vremenu, najčešće će predstavljati brzine nekih tačaka (tela) sistema ili ugaone brzine pojedinih njegovih elemenata, dok će drugi izvodi predstavljati ubrzanja ili ugaona ubrzanja. Biće neophodno tražiti veze između prvih izvoda koordinata (to jest, veze između brzina i ugaonih brzina pojedinih elemenata). Dobijene veze će se preslikati na same koordinate i na druge izvode koordinata (to jest, veze između ubrzanja i ugaonih ubrzanja).

Nakon nalaženja veza, neophodno je iz izraza za E_k i A eliminisati pomoćne koordinate (samim tim njihove izvode po vremenu) na račun zadate.

Kinetička energija sistema E_k će se dobijati sabiranjem kinetičkih energija svih elemenata koji imaju masu a kreću se na neki način. Kinetička energija sistema u početnom položaju E_{k0} biće samo brojka (konstanta), a ne funkcija, i u takvim tipskim zadacima neće trebati da se određuje. Za razliku od nje, ako bi zadata koordinata bila s, funkcije E_k i A bi bile $E_k = E_k(\dot{s}) = B \cdot \dot{s}^2$, $A = A(s) = D \cdot s$, gde su B i D konstante.