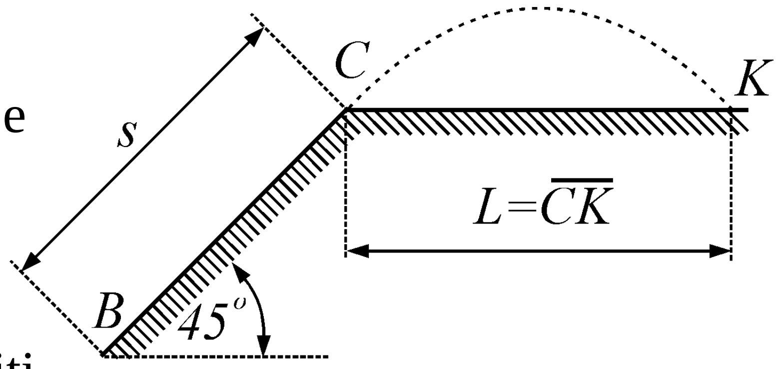
Primer 4.15 Na delu od *B* do *C* materijalna tačka mase *m* kreće se po glatkoj vezi (kretanje uz strmu ravan), dok se od *C* do *K* kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je brzina na početku kretanja iznosila V_0 odrediti domet *L* (rastojanje $\overline{CK}$)? Veličine V_0, *m*, *s* i *g* smartati poznatim?

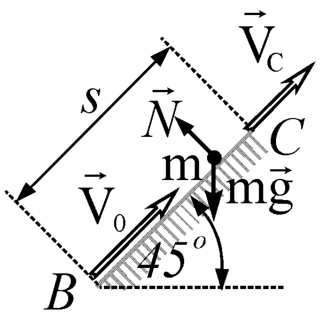


Brzinu tačke na mestu *C* najlakše ćemo odrediti primenom teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom kretanju po glatkoj vezi (od tačke *B* do tačke *C*) gde samo sila težine vrši rad (Sl.1):

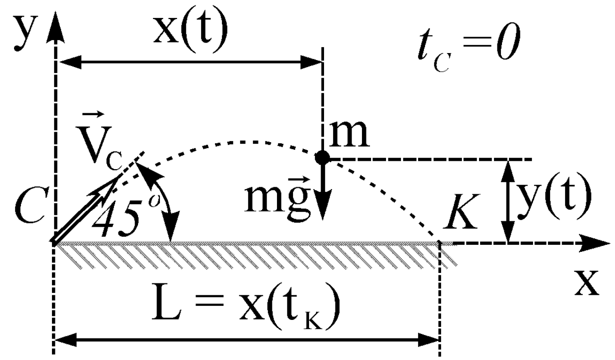
$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \; A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C}, \quad \frac{m}{2}V_C^{\,2} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = -mg \cdot s \sin 45^o \quad \Rightarrow$$

$$V_C^{\,2} = V_0^{\,2} - \sqrt{2}gs \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{V_0^{\,2} - \sqrt{2}gs}$$

Na slici 2 prikazana je, u proizvoljnom položaju, jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju u drugoj fazi (od tačke *C* do tačke *K*).

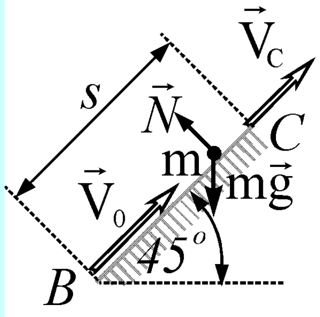


1)

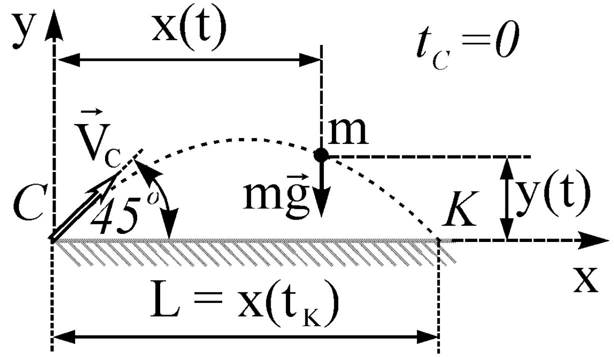


2)

U toj fazi kretanja početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu C, što znači da je $t_C = 0$ i svaka-ko $t_K > 0$. Za izabran koordinatni sistem i nacrtan vektor početne brzine $\vec{V}_C$, početni uslovi su:



1)



2)

$x(0) = 0,$ $y(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = V_C \cos 45^0 = V_C \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\dot{y}(0) = V_C \sin 45^o = V_C \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Projekcije drugog Njutnovog zakona na ose i integracije:

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \Rightarrow d\dot{y} = -gdt \Rightarrow \int d\dot{y} = -g\int dt \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_C \frac{\sqrt{2}}{2}$, zbog $\dot{y}(0) = V_C \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + V_C \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$dy = \left(-gt + V_C \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt \Rightarrow \int dy = \int\left(-gt + V_C \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + V_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $y(0) = 0 \Rightarrow$ $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_C \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t.$

$$m\ddot{x}=0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_3.$$ Konstanta $C_3=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}$, zbog $\dot{x}(0)=V_C\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\dot{x}(t)=V_C\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=V_C\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow dx=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot dt \Rightarrow \int dx=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\int dt \Rightarrow$$

$$x=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t+C_4.$$ Konstanta $C_4=0$, zbog $x(0)=0 \Rightarrow$ $x(t)=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t.$

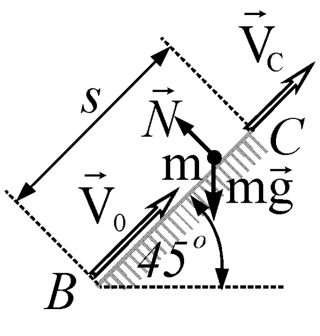
Određivanje dometa L:

$$L=x(t_K)=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_K \qquad \Rightarrow L=V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\frac{V_C}{g}=\frac{V_C^{\,2}}{g}=\frac{V_0^{\,2}}{g}-\sqrt{2}s.$$

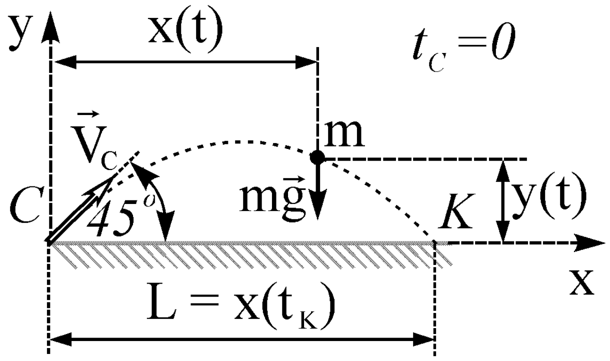
$$y(t_K)=0 \quad \Rightarrow \quad 0=-g\frac{t_K^{\,2}}{2}+V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_K \Rightarrow$$

$$0=\left(-g\frac{t_K}{2}+V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot t_K \quad \Rightarrow$$

$t_K=\sqrt{2}\dfrac{V_C}{g}$, jer je $t_K>0.$

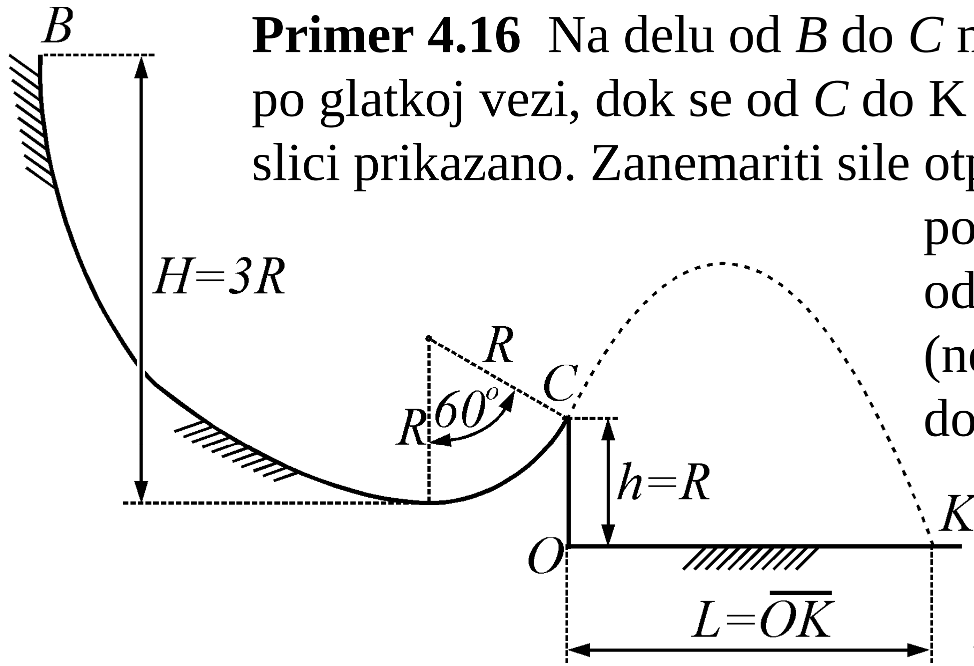


1)



2)

Primer 4.16 Na delu od B do C materijalna tačka mase m kreće se po glatkoj vezi, dok se od C do K kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je brzina na početku kretanja iznosila $V_0 = 2\sqrt{gR}$ odrediti reakciju veze na mestu C (neposredno pre napuštanja veze) i domet L (rastojanje $\overline{OK}$)? Veličine m, R i g smartati poznatim.



Brzina tačke na mestu C:

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}V_C^{\,2} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = mg\cdot\left(3R - \frac{R}{2}\right)$$

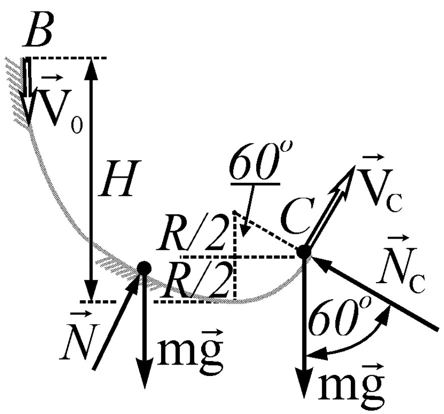
$$\Rightarrow V_C^{\,2} - 4gR = 5gR \Rightarrow \quad V_C = 3\sqrt{gR}$$

Drugi Njutnov zakon na mestu C:

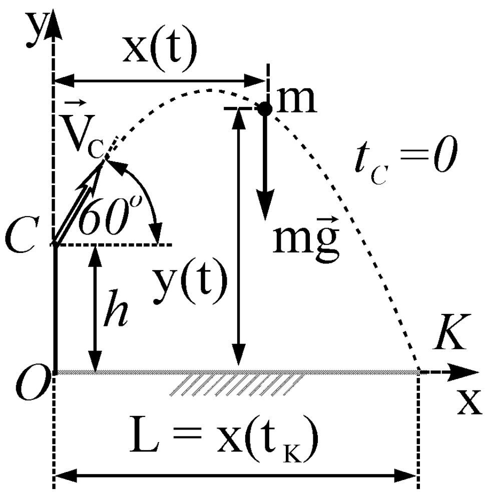
$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C, \quad a_{CN} = V_C^{\,2}/R = 9g$$

$$\vec{n}_0 \quad m\cdot 9g = N_C - mg\cos 60^0$$

$$\Rightarrow \quad N_C = \frac{19}{2}mg$$

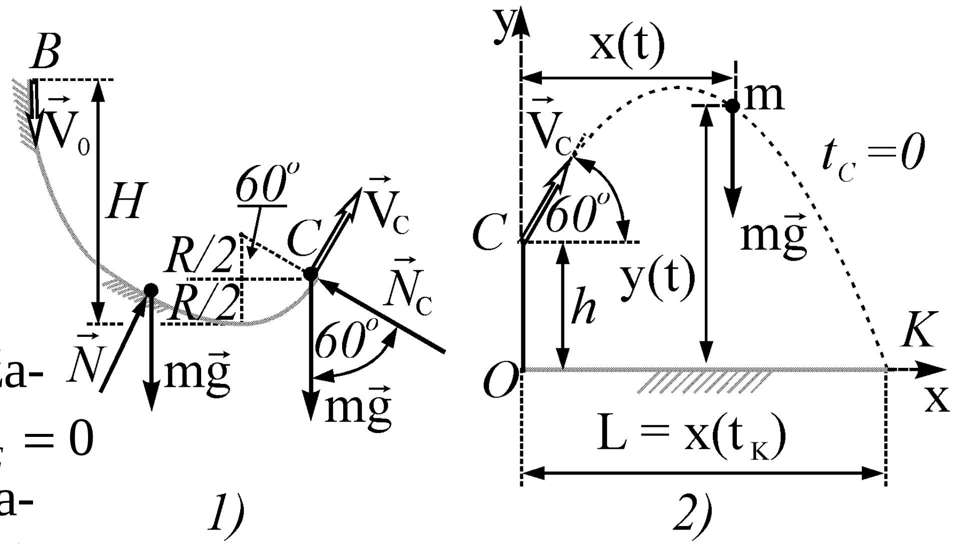


1)



2)

Na slici 2 prikazana je, u proizvoljnom položaju, jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju u drugoj fazi (od tačke *C* do tačke *K*). U toj fazi kretanja početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu *C*, što znači da je $t_C = 0$ i svakako $t_K > 0$. Za izabran koordinatni sistem i nacrtan vektor početne brzine $\vec{V}_C$, početni uslovi su: $x(0) = 0,\ y(0) = R,\ \dot{x}(0) = V_C \cos 60^0,\ \dot{y}(0) = V_C \sin 60^0.$



Projekcije drugog Njutnovog zakona na ose i integracije:

$$m\ddot{y} = -mg \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \;\Rightarrow\; d\dot{y} = -g dt \Rightarrow \int d\dot{y} = -g\int dt \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_C \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, zbog $\dot{y}(0) = V_C \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = -gt + V_C \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow$

$$dy = \left(-gt + V_C \frac{\sqrt{3}}{2}\right)dt \Rightarrow \int dy = \int\left(-gt + V_C \frac{\sqrt{3}}{2}\right)dt \;\Rightarrow\; y = -g\frac{t^2}{2} + V_C \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t + C_2$$

Konstanta $C_2 = R$, zbog $y(0) = R$ $\;\Rightarrow\;$ $y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + V_C \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot t + R$

$$m\ddot{x}=0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_3.$$ Konstanta $C_3=\frac{V_C}{2}$, zbog $\dot{x}(0)=\frac{V_C}{2} \Rightarrow$

$$\dot{x}(t)=\frac{V_C}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{V_C}{2} \Rightarrow dx=\frac{V_C}{2}\cdot dt \Rightarrow \int dx=\frac{V_C}{2}\int dt \Rightarrow x=\frac{V_C}{2}\cdot t+C_4.$$

Konstanta $C_4=0$, zbog $x(0)=0 \Rightarrow$ $x(t)=\frac{V_C}{2}\cdot t.$

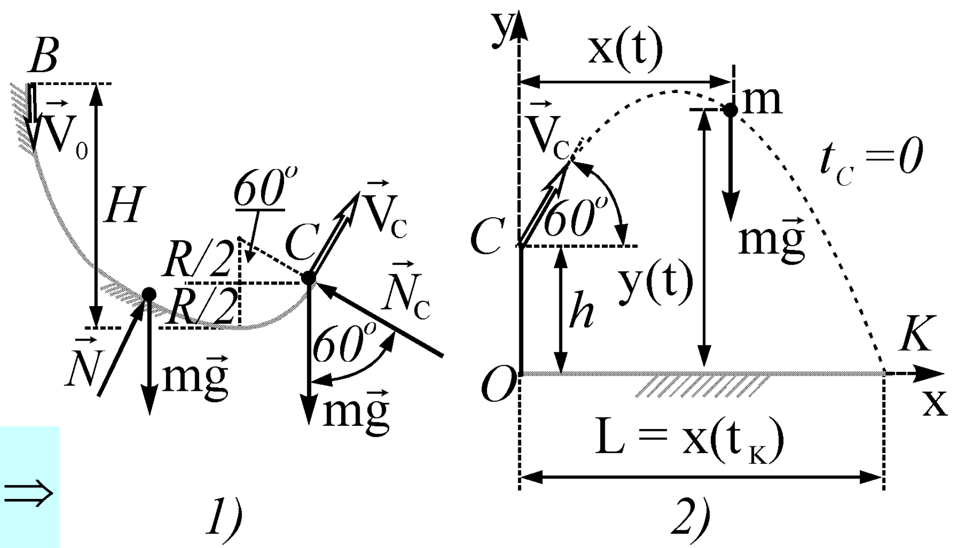
Određivanje dometa L:

$$y(t_K)=0 \Rightarrow$$

$$0=-g\frac{t_K^{\ 2}}{2}+3\sqrt{gR}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t_K+R \Rightarrow$$

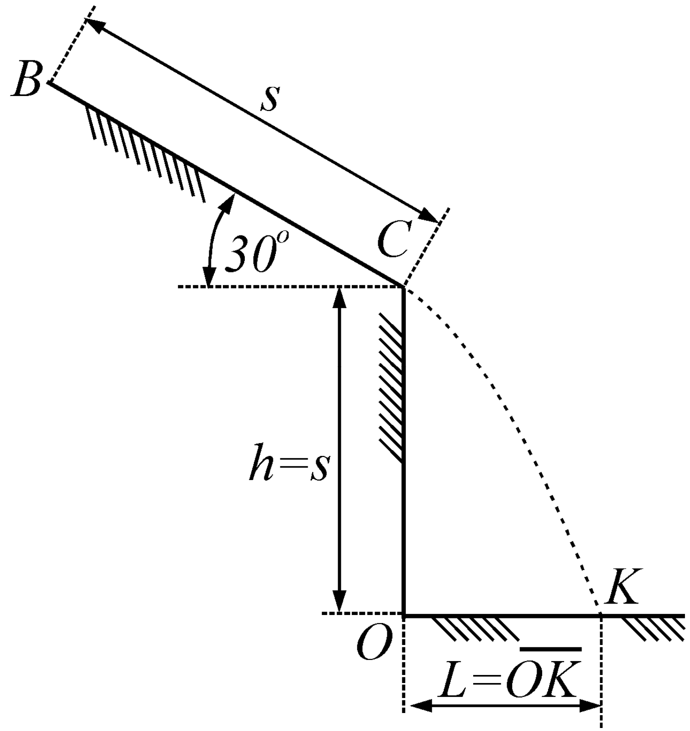
$$gt_K^{\ 2}-3\sqrt{3}\sqrt{gR}\cdot t_K-2R=0 \Rightarrow$$

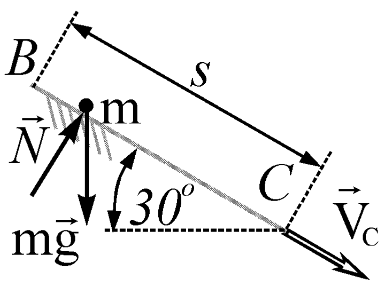
$$t_K=\frac{1}{2g}\left(3\sqrt{3}\sqrt{gR}\pm\sqrt{27gR+8gR}\right) \Rightarrow$$



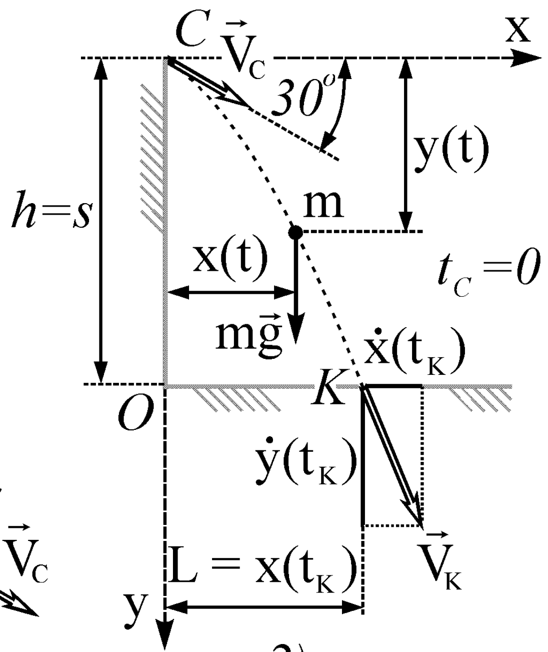
$$t_K=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{35}\right) \Rightarrow L=x(t_K)=\frac{V_C}{2}\cdot t_K \Rightarrow L=\frac{3}{4}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{35}\right)R$$

Primer 4.17 Na delu od *B* do *C* materijalna tačka mase *m* kreće se po glatkoj vezi (kretanje niz strmu ravan), dok se od *C* do *K* kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je tačka započela kretanje bez početne brzine odrediti brzinu na mestu *K* (neposredno pre pada na podlogu) i domet *L* (rastojanje $\overline{OK}$)? Veličine *h*, *m*, *s* i *g* smartati poznatim?





1)



2)

Brzina tačke na mestu C:

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C},$$

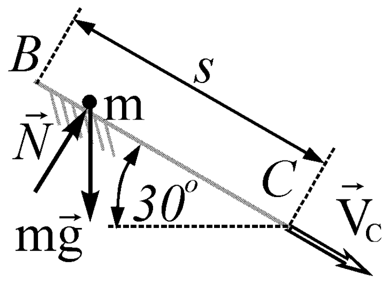
$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2} V_C^{\,2} - 0 = mg \cdot s \sin 30^0$$

$$\Rightarrow \quad V_C^{\,2} = gs \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{gs}$$

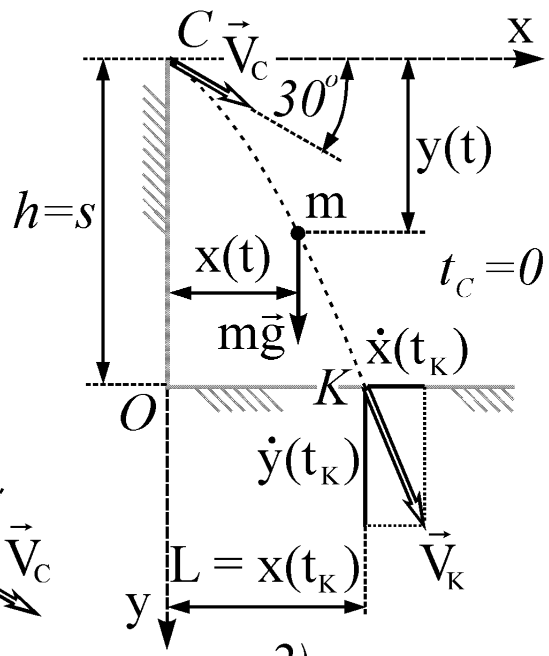
Na slici 2 prikazana je, u proizvoljnom položaju, jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju u drugoj fazi (od tačke C do tačke K). U toj fazi kre tanja početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu C, što znači da je $t_C = 0$ i svakako $t_K > 0$. Za izabran koordinatni sistem i nacrtan vektor početne brzine $\vec{V}_C$, početni uslovi su:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = V_C \cos 30^0, \quad \dot{y}(0) = V_C \sin 30^0.$$



1)



2)

Projekcije drugog Njutnovog zakona na ose i integracije:

$$m\ddot{y} = mg \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = g \;\Rightarrow\; d\dot{y} = g\,dt \Rightarrow \int d\dot{y} = g\int dt \Rightarrow \dot{y} = gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = \dfrac{V_C}{2}$, zbog $\dot{y}(0) = \dfrac{V_C}{2}$ $\Rightarrow \; \dot{y}(t) = gt + \dfrac{V_C}{2} = gt + \dfrac{\sqrt{gs}}{2} \;\Rightarrow$

$$dy = \left(gt + \frac{V_C}{2}\right)dt \;\Rightarrow\; \int dy = \int\left(gt + \frac{V_C}{2}\right)dt \;\Rightarrow\; y = g\frac{t^2}{2} + \frac{V_C}{2}\cdot t + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $y(0) = 0$ $\;\Rightarrow\;$ $y(t) = g\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{V_C}{2}\cdot t$

$$m\ddot{x}=0 \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow \dot{x}=C_3.$$ Konstanta $C_3=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}$, zbog $\dot{x}(0)=V_C\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\dot{x}(t)=V_C\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=V_C\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad dx=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot dt \Rightarrow \quad \int dx=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\int dt \Rightarrow$$

$$x=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t+C_4.$$ Konstanta $C_4=0$, zbog $x(0)=0 \Rightarrow$ $x(t)=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t.$

Određivanje dometa L:

$$y(t_K)=s \quad \Rightarrow \quad g\cdot t_K^{\,2}+V_C\cdot t_K-2s=0 \quad \Rightarrow \quad g\cdot t_K^{\,2}+\sqrt{gs}\cdot t_K-2s=0 \quad \Rightarrow$$

$$t_K=\frac{1}{2g}\left(-\sqrt{gs}+\sqrt{gs+8gs}\right)=\sqrt{\frac{s}{g}}$$

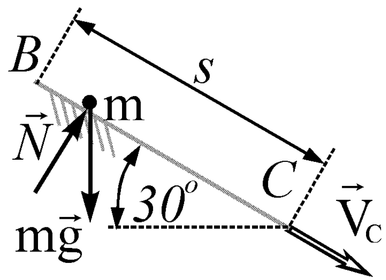
$$L=x(t_K)=V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t_K \quad \Rightarrow \quad L=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{gs}\cdot\sqrt{\frac{s}{g}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s$$

Brzina na mestu K (neposredno pre pada):

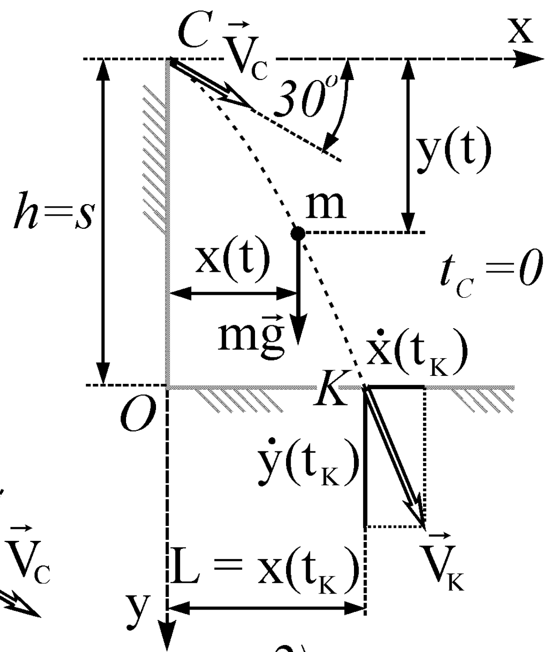
$$\dot{x}(t_K)=\sqrt{gs}\,\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \dot{y}(t_K)=g\sqrt{\frac{s}{g}}+\frac{\sqrt{gs}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_K=\vec{V}(t_K)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{gs}\,\vec{i}+\frac{3}{2}\sqrt{gs}\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad V_K=\sqrt{\dot{x}(t_K)^2+\dot{y}(t_K)^2}=\sqrt{3gs}$$

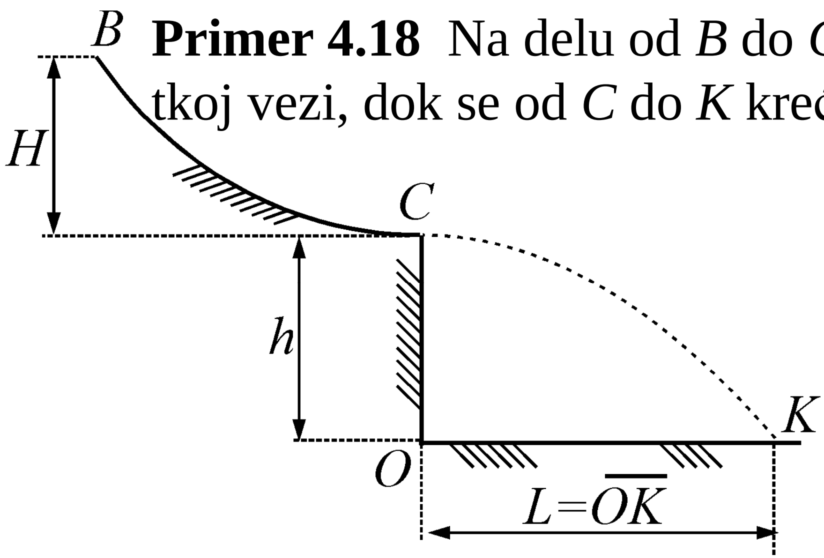


1)



2)

Primer 4.18 Na delu od B do C materijalna tačka mase m kreće se po glatkoj vezi, dok se od C do K kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je tačka započela kretanje bez početne brzine odrediti domet L (rastojanje $\overline{OK}$)? Veličine m, H, h i g smartati poznatim.



Brzina tačke na mestu C:

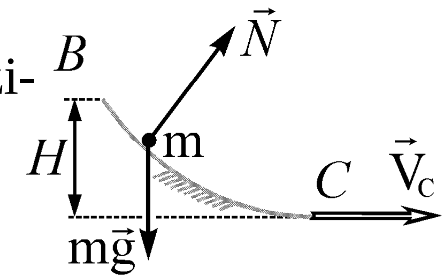
$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C},$$

$$\frac{m}{2}V_C^{\,2} - 0 = mg \cdot H \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{2gH}$$

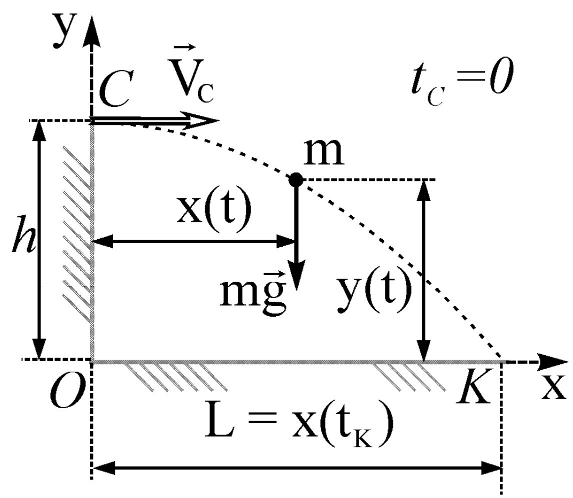
Na slici 2 prikazana je, u proizvoljnom položaju, jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju u drugoj fazi (od tačke C do tačke K). U toj fazi kre tanja početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu C, što znači da je $t_C = 0$ i svakako $t_K > 0$. Za izabran koordinatni sistem i nacrtan vektor početne brzine $\vec{V}_C$, početni uslovi su:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h,$$

$$\dot{x}(0) = V_C, \quad \dot{y}(0) = 0.$$



1)



2)

Projekcije drugog Njutnovog zakona na ose i integracije:

$$m\ddot{y} = -mg \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \;\Rightarrow\; d\dot{y} = -gdt \Rightarrow \int d\dot{y} = -g\int dt \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = 0$, zbog $\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt \;\Rightarrow dy = -gtdt \Rightarrow \int dy = -g\int tdt$

$\Rightarrow \quad y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2$. Konstanta $C_2 = h$, zbog $y(0) = h \;\Rightarrow\; y(t) = h - g\dfrac{t^2}{2}$

$m\ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x} = C_3$. Konstanta $C_3 = V_C$, zbog $\dot{x}(0) = V_C \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = V_C$

$$\frac{dx}{dt} = V_C \;\Rightarrow\; dx = V_C dt \;\Rightarrow\; \int dx = V_C\int dt \;\Rightarrow\; x = V_C \cdot t + C_4.$$

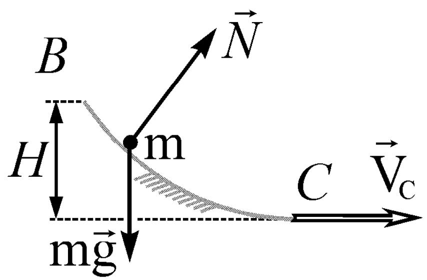
Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = V_C \cdot t.$

Određivanje dometa L: $y(t_K) = 0 \;\Rightarrow$

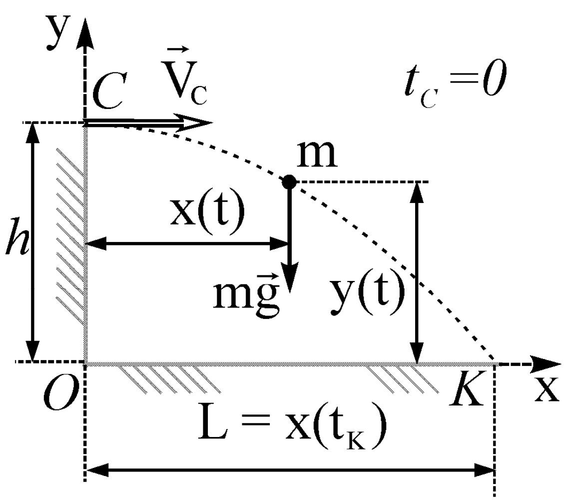
$$0 = h - g\frac{t_K^{\,2}}{2} \;\Rightarrow\; t_K = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$L = x(t_K) = V_C \cdot t_K \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{2gH}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{Hh}$$

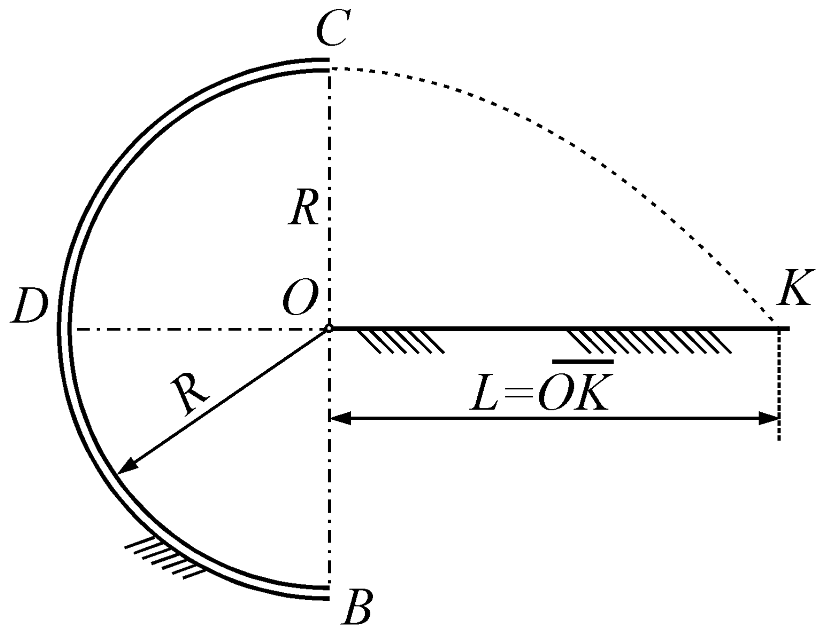


1)



2)

Na delu od *B* do *C* materijalna tačka mase *m* kreće se kroz glatku cev, dok se od *C* do *K* kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je brzina na početku kretanja iznosila $V_0 = \sqrt{5gR}$ odrediti reakcije na mestima *D* i *C* (neposredno pre napuštanja veze) i domet *L* (rastojanje $\overline{OK}$)? Veličine *m*, *R* i *g* smartati poznatim.



Brzine tačke na mestima C i D:

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C}$$

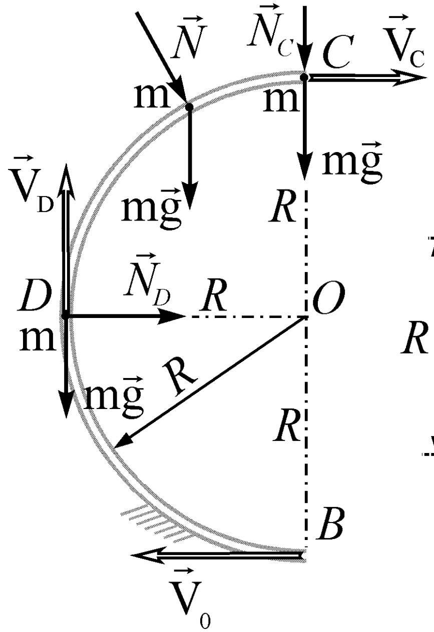
$$\Rightarrow \frac{m}{2}V_C^{\,2} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = -mg \cdot 2R \Rightarrow$$

$$V_C^{\,2} - 5gR = -4gR \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{gR}$$

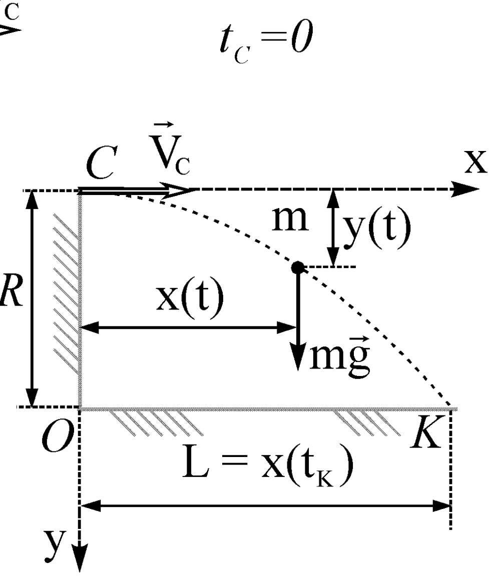
$$E_{kD} - E_{kB} = A_{B-D}, \quad A_{B-D} = A(m\vec{g})_{B-D}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}V_D^{\,2} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = -mg \cdot R \Rightarrow$$

$$V_D^{\,2} - 5gR = -2gR \Rightarrow \quad V_D = \sqrt{3gR}$$



1)



2)

Drugi Njutnov zakon na mestu C:

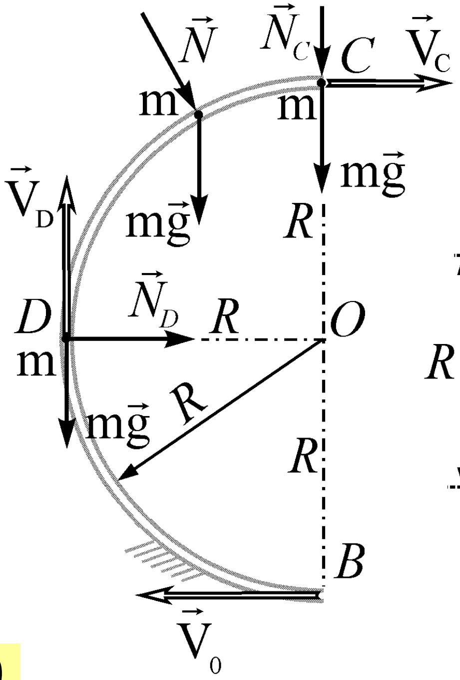
$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C,\ \ a_{CN} = V_C^{\,2}/R = g$$

$$\Rightarrow m\cdot g = N_C + mg \Rightarrow \ N_C = 0$$

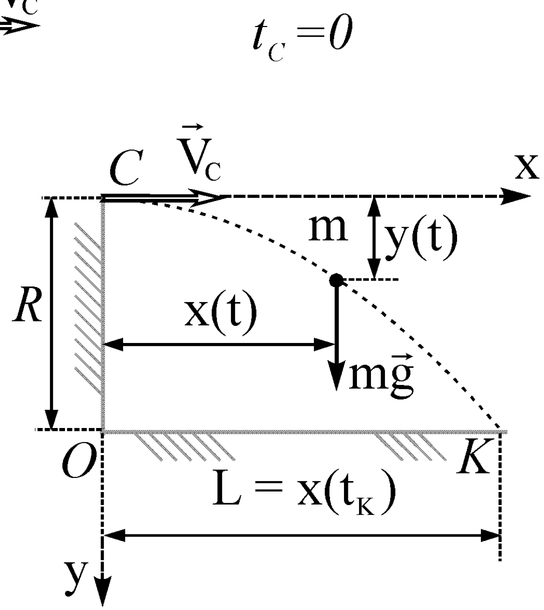
Drugi Njutnov zakon na mestu D:

$$m\vec{a}_D = m\vec{g} + \vec{N}_D, a_{DN} = V_D^{\,2}/R = 3g$$

$$\Rightarrow m\cdot 3g = N_D + 0 \Rightarrow \ N_D = 3mg$$



1)



2)

Druga faza kretanja (od *C* do *K*):

$$x(0)=0,\ y(0)=0,\ \dot{x}(0)=V_C,\ \dot{y}(0)=0.$$

$$m\ddot{y} = mg \ \Rightarrow \ \frac{d\dot{y}}{dt} = g \ \Rightarrow \ d\dot{y} = gdt \Rightarrow \int d\dot{y} = g\int dt \Rightarrow \dot{y} = gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = 0$, zbog $\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = gt \Rightarrow dy = gtdt \Rightarrow \ \int dy = g\int tdt \Rightarrow$

$y = g\dfrac{t^2}{2} + C_2$. Konstanta $C_2 = 0$, zbog $y(0) = 0 \ \Rightarrow y(t) = g\dfrac{t^2}{2}$.

$m\ddot{x} = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ \dot{x} = C_3$. Konstanta $C_3 = V_C$, zbog $\dot{x}(0) = V_C \ \Rightarrow \ \dot{x}(t) = V_C$

$$\frac{dx}{dt} = V_C \ \Rightarrow \ dx = V_C dt \ \Rightarrow \ \int dx = V_C \int dt \ \Rightarrow \ x = V_C\cdot t + C_4.$$

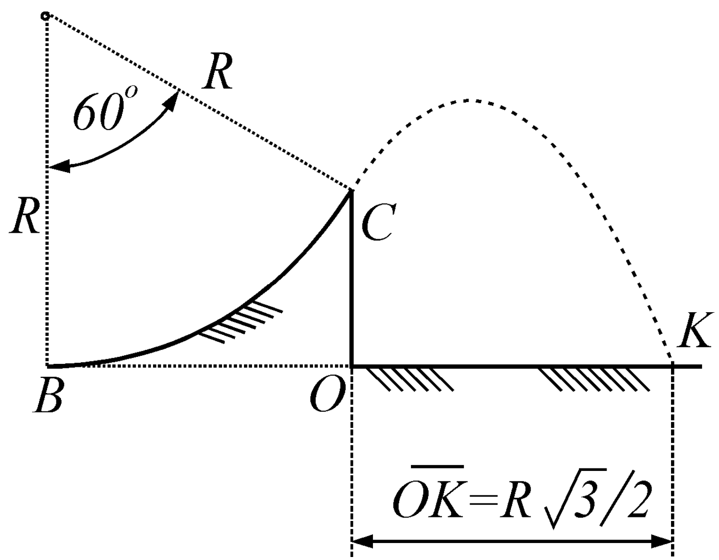
Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = V_C \cdot t.$

Određivanje dometa L:

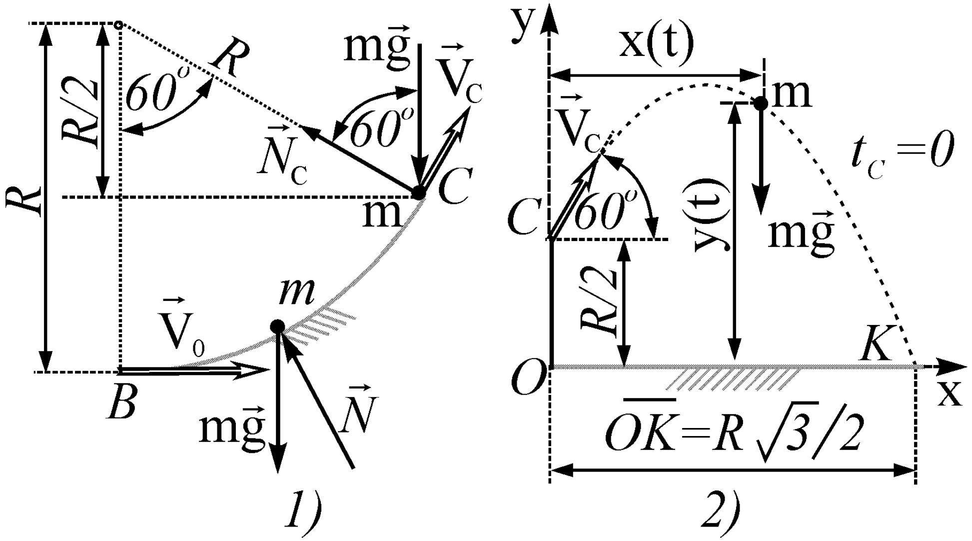
$$y(t_K) = R \quad \Rightarrow \quad R = g\frac{t_K^2}{2} \Rightarrow t_K = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$L = x(t_K) = V_C \cdot t_K \Rightarrow L = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{2}R$$

Primer 4.20 Na delu od *B* do *C* materijalna tačka mase m kreće se po glatkoj kružnoj vezi, dok se od *C* do *K* kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Ako je $\overline{OK} = R\sqrt{3}/2$ odrediti kolika je morala biti brzina V_0 na početku kretanja (na mestu *B*) i koliko iznosi reakcija veze na mestu *C* (neposredno pre napuštanja veze). Veličine *m*, *R* i *g* smartati poznatim.



Da bi iskoristili činjenicu što je domet poznat proučimo prvo drugu fazu kretanja (kosi hitac). Na slici 2 prikazana je, u proizvoljnom položaju, jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju u toj fazi (od tačke *C* do tačke *K*). Pri ovom kosom hicu početni trenutak odgovara položaju tačke na mestu *C*, što znači da je $t_C = 0$ i svakako $t_K > 0$. Za izabran koordinatni sistem i nacrtan vektor početne brzine $\vec{V}_C$, početni uslovi su:



$$x(0) = 0, \quad y(0) = \frac{R}{2}, \quad \dot{x}(0) = V_C \cos 60^0 = \frac{V_C}{2}, \quad \dot{y}(0) = V_C \sin 60^0 = V_C \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Projekcije drugog Njutnovog zakona na ose i integracije:

$$m\ddot{y} = -mg \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \;\Rightarrow\; d\dot{y} = -gdt \Rightarrow \int d\dot{y} = -g\int dt \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_C \frac{\sqrt{3}}{2}$, zbog $\dot{y}(0) = V_C \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\Rightarrow$ $\dot{y}(t) = -gt + V_C \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \quad dy = \left(-gt + V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad dy = \left(-gt + V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$\int dy = \int\left(-gt + V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad y = -g\frac{t^2}{2} + V_C\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t + C_2.$$

Konstanta $C_2 = \dfrac{R}{2}$, zbog $y(0) = \dfrac{R}{2}$ $\Rightarrow$ $y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + V_C\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot t + \dfrac{R}{2}$

$m\ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x} = C_3.$ Konstanta $C_3 = \dfrac{V_C}{2}$, zbog $\dot{x}(0) = \dfrac{V_C}{2} \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = \dfrac{V_C}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_C}{2} \;\Rightarrow\; dx = \frac{V_C}{2}dt \;\Rightarrow\; \int dx = \frac{V_C}{2}\int dt \;\Rightarrow\; x = \frac{V_C}{2}\cdot t + C_4.$$

Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = \dfrac{V_C}{2}\cdot t.$

Određivanje brzine tačke na mestu C:

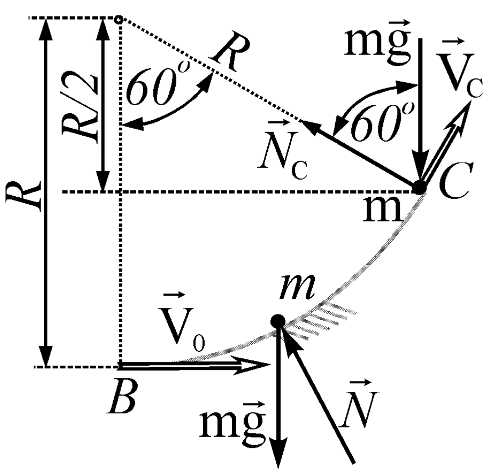
$x(t_k) = \overline{OK} = R\sqrt{3}/2$, $y(t_k) = 0 \;\Rightarrow\;$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R = \dfrac{V_C}{2}\cdot t_K$, $\quad 0 = -g\dfrac{t_K^{\,2}}{2} + V_C\cdot t_K\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R}{2}$

Ako na osnovu prve, u drugu jednačinu uvrstimo da je $V_C\cdot t_K = R\sqrt{3}$, dobićemo:

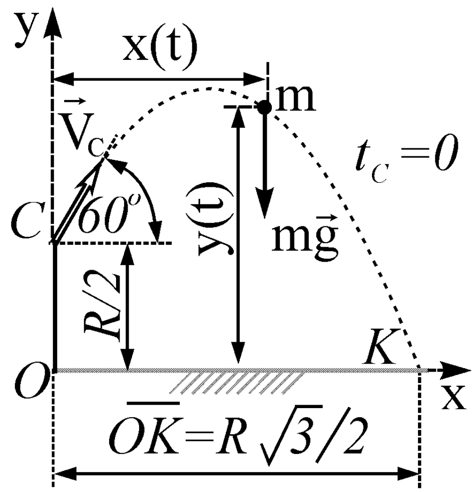
$$g t_K^{\,2} = 4R \;\Rightarrow\; t_K = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \;\Rightarrow\; V_C = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{gR}.$$

Sada, kada se zna brzina tačke na mestu C, brzinu tačke na mestu B najlakše ćemo odrediti primenom teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom kretanju po glatkoj vezi (od tačke B do tačke C) gde samo sila težine vrši rad:

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C}$$



1)



2)

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}V_C^{\,2} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = -mg \cdot \left(R - \frac{R}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad V_C^{\,2} - V_0^{\,2} = -gR \quad \Rightarrow$$

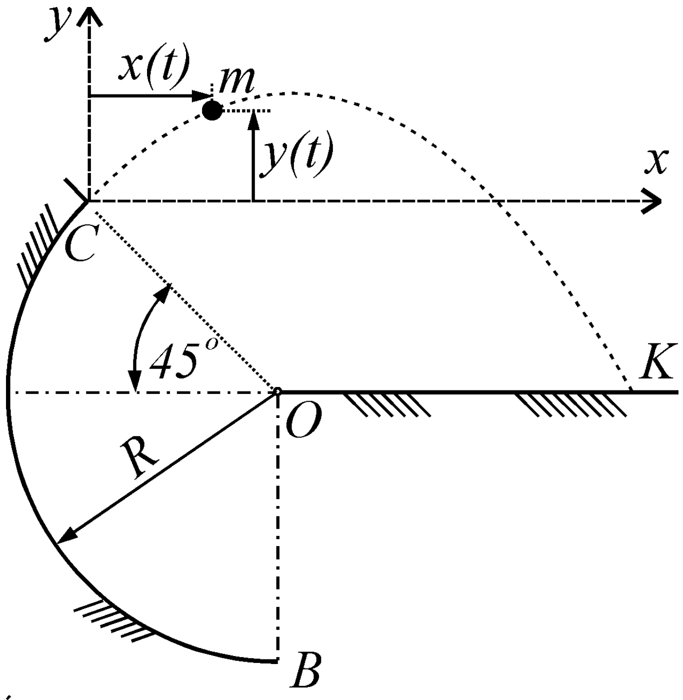
$$V_0^{\,2} = \frac{3}{4}gR + gR \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{gR}.}$$

Određivanje reakcije veze na mestu C: Drugi Njutnov zakon na mestu C, neposredno pre napuštanja veze (Sl.1), daje $m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C$.

Projekcija drugog Njutnovog zakona na normalu, s obzirom da je $a_{CN} = V_C^{\,2} / R = 3g/4$, daje

$$m \cdot \frac{3g}{4} = N_C - mg\cos 60^0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_C = \frac{5}{4}mg.}$$

Primer 4.21 Na delu od *B* do *C* materijalna tačka mase *m* kreće se po glatkoj kružnoj vezi, dok se od *C* do *K* kreće kroz vazduh, kako je to na slici prikazano. Zanemariti sile otpora pri kretanju. Reakcija veze na mestu *C*, neposredno pre napuštanja veze, iznosi $N_C = mg\sqrt{2}/2$. Odrediti jednačine kretanja na delu od *C* do *K* (vreme t na mestu *C* usvojiti da iznosi nula) za kordinatni sistem prikazan na slici i kolika je morala biti brzina V_0 na početku kretanja (na mestu *B*)? Veličine *m*, *R* i *g* smartati poznatim.

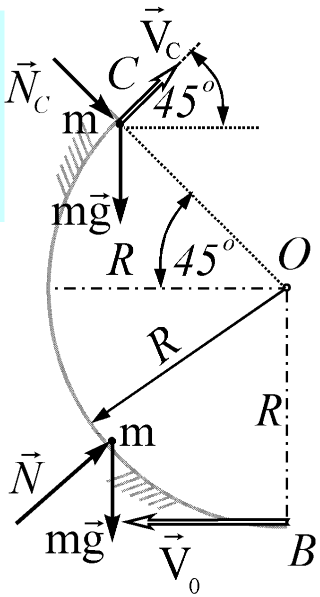


Za određivanje brzine na mestu *C*, napišimo drugi Njutnov zakon na tom mestu, neposredno pre napuštanja veze (Sl.1):

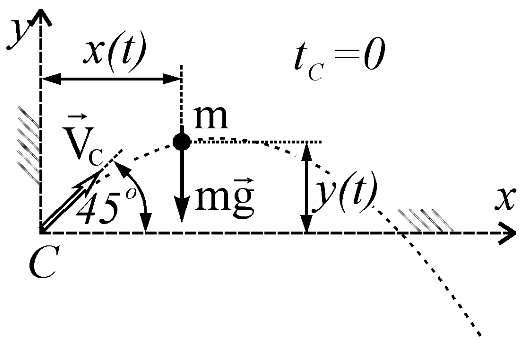
$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N}_C, \quad a_{CN} = V_C^{\,2}/R \quad \Rightarrow$$

$$m \cdot \frac{V_C^{\,2}}{R} = N_C + mg\sin 45^0 \quad \Rightarrow$$

$$m \cdot \frac{V_C^{\,2}}{R} = mg\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad V_C = \sqrt{\sqrt{2}gR}.$$

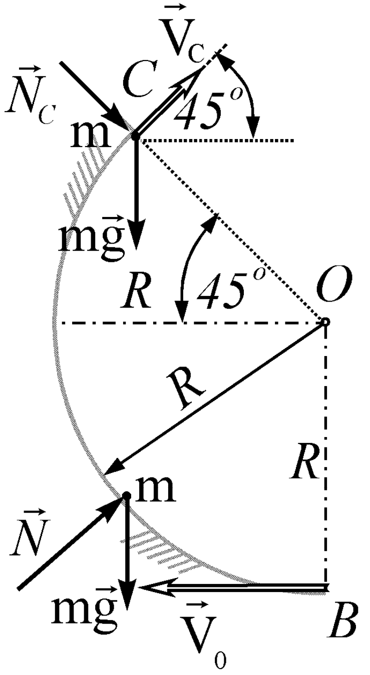


1)

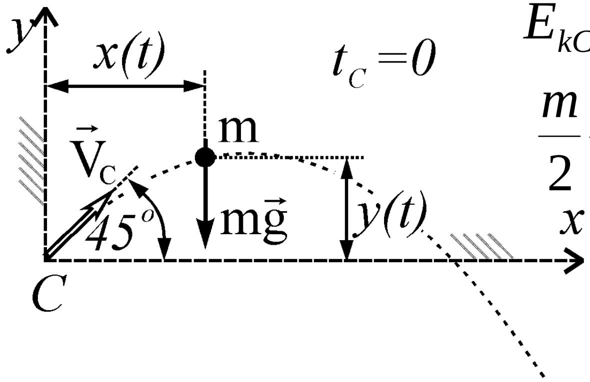


2)

Sada kada se zna V_C, brzinu tačke na mestu *B* najlakše ćemo odrediti primenom teoreme o promeni kinetičke energije pri njenom kretanju po glatkoj vezi (od tačke *B* do tačke *C*) gde samo sila težine vrši rad (Sl.1):



1)



2)

$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \; A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C} \Rightarrow$$

$$\frac{m}{2}\sqrt{2gR} - \frac{m}{2}V_0^{\,2} = -mg\cdot\left(R + R\sin 45^0\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2gR} - V_0^{\,2} = -g\cdot R\left(2+\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$V_0^{\,2} = 2gR\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{2gR\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

Druga faza kretanja (kosi hitac):

$$x(0)=0,\; y(0)=0,\; \dot{x}(0)=V_C\cos 45^0 = V_C\frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{y}(0) = V_C \sin 45^o = V_C\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$m\ddot{y} = -mg \;\Rightarrow\; \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \;\Rightarrow\; d\dot{y} = -gdt \Rightarrow \int d\dot{y} = -g\int dt \Rightarrow \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, zbog $\dot{y}(0) = V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = -gt + V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow$

$$dy = \left(-gt + V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt \Rightarrow \int dy = \int\left(-gt + V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt \;\Rightarrow\; y = -g\frac{t^2}{2} + V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $y(0) = 0 \Rightarrow$ $y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + \sqrt{\sqrt{2}gR}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot t.$

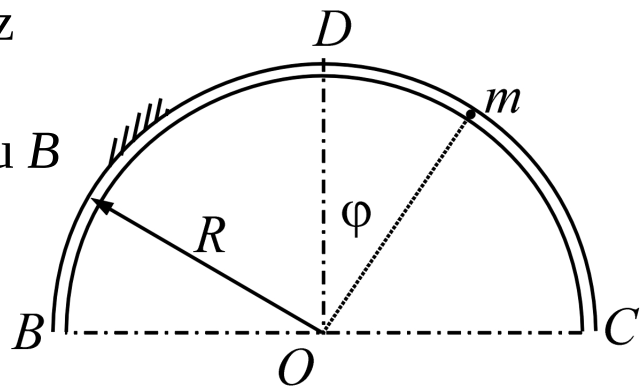
$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{x} = C_3.$ Konstanta $C_3 = V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, zbog $\dot{x}(0) = V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = V_C\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = V_C\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow dx = V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot dt \Rightarrow \int dx = V_C\frac{\sqrt{2}}{2}\int dt \Rightarrow$$

$x = V_C\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot t + C_4.$ Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \Rightarrow$ $x(t) = \sqrt{\sqrt{2}gR}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot t.$

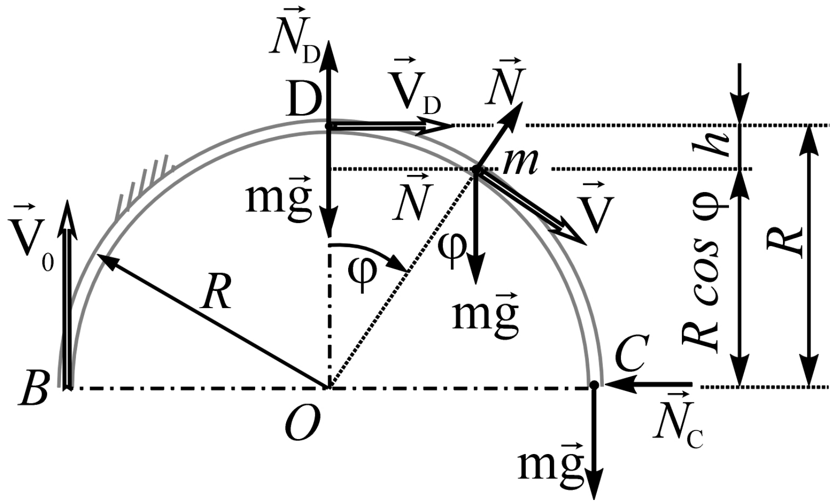
Primer 4.22 Materijalna tačka mase *m* kreće se kroz glatku kružnu cev od *B* do *C* u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže. Brzina na mestu *B* (početna brzina) iznosi

$$V_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}gR}.$$



Prvo odrediti brzinu *V* i reakciju veze *N* u funkciji ugla φ a zatim naći te iste veličine na mestima *D* i *C*? Za koji ugao $\varphi = \varphi$ će reakcija veze *N* iznositi nula? Veličine *m*, *R* i *g* smartati poznatim.

Kinetičku energiju materijalne tačke u početnom položaju označimo sa E_{k0} , a u proizvoljnom, određenom uglom φ , sa E_k . Sa A označimo sumu radova svih sila koje dejstvuju na tačku pri njenom premeštanju iz početnog u proizvoljni položaj. Zbog glatke veze pri kretanju rad vrši jedino sila težine $m\vec{g}$. Brzinu V na proizvoljnom mestu, određenom uglom φ, dobićemo primenom teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom kretanju od početnog do proizvoljnog položaja:



$$E_k - E_{k0} = A \Rightarrow \frac{m}{2}V^2 - \frac{m}{2}V_0^2 = A(m\vec{g}) \Rightarrow \frac{m}{2}V^2 - \frac{m}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}gR = -mgR\cos\varphi \Rightarrow$$

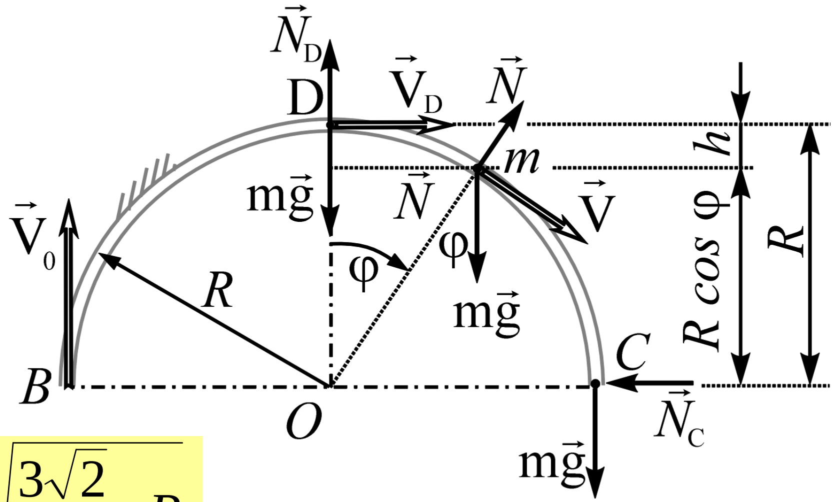
$$V(\varphi) = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}gR - 2gR\cos\varphi}.$$

Reakcija veze N, na proizvoljnom mestu, definisanom uglom φ, dobiće se na osnovu projekcije drugog Njutnovog zakona, na normalu:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},\ \ ma_N = mg\cos\varphi - N,\quad a_N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\varphi - m\frac{V^2}{R} \Rightarrow$$

$$N = mg\cos\varphi - m\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}g - 2g\cos\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad N(\varphi) = 3mg\cos\varphi - \frac{3\sqrt{2}}{2}mg.$$

Sada, imajući funkcije $V(\varphi)$ i $N(\varphi)$, brzine i reakcije na mestima C i D možemo dobiti uvrštavanjem u ove funkcije za ugao φ vrednosti 0 i $\pi/2$:



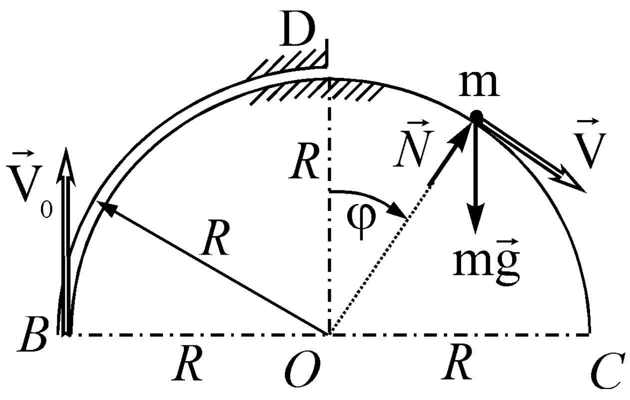
$$V_D = V(0) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right) gR}, \quad V_C = V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2} gR},$$

$$N_D = N(0) = \left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) mg, \quad N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} mg \quad \Rightarrow \quad N_C = \frac{3\sqrt{2}}{2} mg.$$

Pošto je rezultat za $N(\pi/2)$ negativnog predznaka to znači da reakcija $\vec{N}_C$ ima suprotan smer od $\vec{N}$. Dakle, kao što se vidi na slici, smer za $\vec{N}_C$, nije od centra kruga O, već ka centru. Upravo mesto $\varphi = \bar{\varphi}$, gde važi da je reakcija $N(\bar{\varphi}) = 0$, je mesto na kom se menja smer reakcije veze. Odredimo sada $\bar{\varphi}$, koristeći uslov da je $N(\bar{\varphi}) = 0$:

$$N(\bar{\varphi}) = 3mg\cos\bar{\varphi} - \frac{3\sqrt{2}}{2} mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varphi} = \frac{\pi}{4} = 45^o.$$

Primer 4.23 Materijalna tačka mase *m* ima veoma slično kretanje kao u primeru 4.22. Tačka započinje kretanje kroz glatku cev sa mesta *B* početnom brzinom.

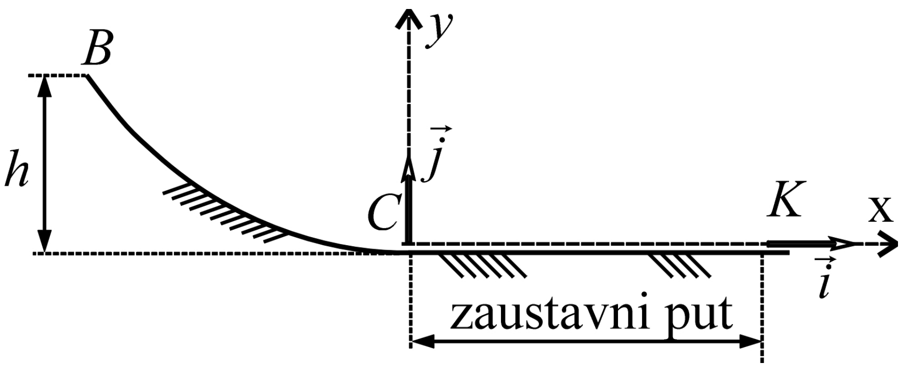


$$V_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}\, gR}.$$

Međutim, ovde glatka cev prestaje na mestu D, i dalje, do mesta *C*, zamenjuje je glatka cilindrična površina. Da li su izrazi za $V(\varphi)$ i $N(\varphi)$ identični kao u primeru 4.22? Da li će tačka i u ovakvom slučaju napustiti cilindričnu površinu ranije, ne došavši do mesta *C*? Veličine *m*, *R* i *g* smartati poznatim.

Izrazi za $V(\varphi)$ i $N(\varphi)$ će sigurno biti identični kao i u primeru 4.22, pošto bi se do njih moglo doći na potpuno identičan način kao u tom primeru. Do odvajanja tačke od cilindrične površine mora doći, i to na mestu $\varphi = \bar{\varphi}$ gde bi reakcija veze trebala da promeni smer. Međutim, do promene smera ne može doći, već do odvajanja, pošto takva cilindrična površina, koja je jednostrana veza, može da ima reakciju samo u smeru od centra. Prema tome, tačka ne može doći do mesta *C* jer će se od od mesta odvajanja kretati slobodno, kosim hicem.

Primer 4.24 Na delu od B do C materijalna tačka mase m kreće se po glatkoj vezi bez početne brzine. Od C do K se kreće po horizontalnoj nauljenoj podlozi, gde se kretanju suprotstavlja



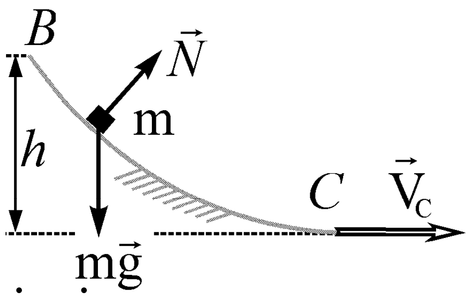
sila viskoznog trenja $\vec{F}_w = -mk\vec{V}$, proporcionalna prvom stepenu brzine. Za kretanje od C do K odrediti: zakon brzine $\dot{x}(t)$, zakon puta $x(t)$ i pređeni put do zaustavljanja S_z . Veličine m, k, h i g smartati poznatim.

Za kretanje od B do C (Sl.1) teorema o promeni kinetičke energije, odrediće V_C :

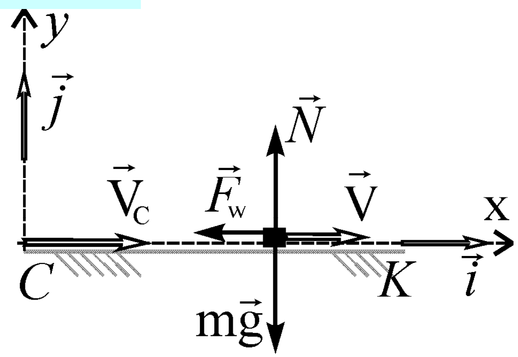
$$E_{kC} - E_{kB} = A_{B-C}, \quad A_{B-C} = A(m\vec{g})_{B-C} \Rightarrow \frac{m}{2}V_C^{\,2} - 0 = mg \cdot h \Rightarrow V_C = \sqrt{2gh}.$$

Za kretanje od C do K, drugi Njutnov zakon za x pravac daje diferencijalnu jednačinu

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x}.$$



1)



2)

Zakon brzine $\dot{x}(t)$ će se dobiti razdvajanjem promenljivih, integraljenjem i korišćenjem početnog uslova $\dot{x}(0) = V_C = \sqrt{2gh}$:

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -k\int dt \Rightarrow \ln \dot{x} = -k\cdot t + C_1,\ C_1 = \ln\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad \ln \dot{x} - \ln\sqrt{2gh} = -kt \Rightarrow$$

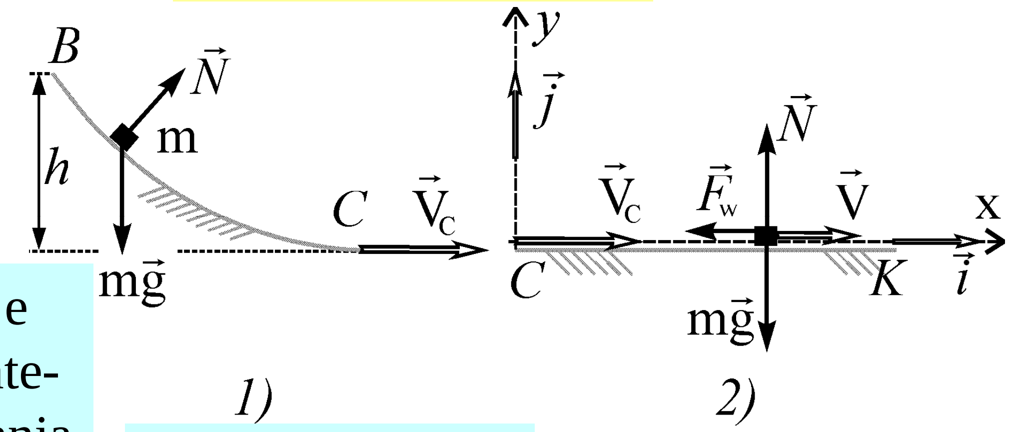
$$\ln\frac{\dot{x}}{\sqrt{2gh}} = -kt \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sqrt{2gh}\, e^{-kt}.$$

Daljim integraljenjem, za početni uslov $x(0)=0$, dobiće se zakon puta $x(t)$:

$$\int dx = \sqrt{2gh}\int e^{-kt}dt \Rightarrow\ x = -\frac{\sqrt{2gh}}{k}e^{-kt} + C_2,\ C_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{k} \Rightarrow x(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{k}\left(1-e^{-kt}\right).$$

Eliminacijom e^{-kt} iz $\dot{x}(t)$ i $x(t)$, dobija se $x = \frac{\sqrt{2gh}}{k}\left(1-\frac{\dot{x}}{\sqrt{2gh}}\right).$

U dobijenoj vezi između x i $\dot{x}$ zaustavni put će biti x kada je brzina $\dot{x}=0$: $S_z = x\big|_{\dot{x}=0} = \frac{\sqrt{2gh}}{k}.$



Prema drugom načinu za određivanje veze između veličina x i $\dot{x}$ treba integraliti diferencijalnu jednačinu kretanja uz korišćenje identiteta $d\dot{x}/dt = (d\dot{x}/dx)\dot{x}$:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = -k\dot{x} \Rightarrow \quad \int d\dot{x} = -k\int dx \Rightarrow$$

$\dot{x} = -kx + C_3$, $C_3 = \sqrt{2gh}$ zbog $\dot{x}\big|_{x=0} = \sqrt{2gh} \Rightarrow$ $S_z = x\big|_{\dot{x}=0} = \frac{\sqrt{2gh}}{k}.$