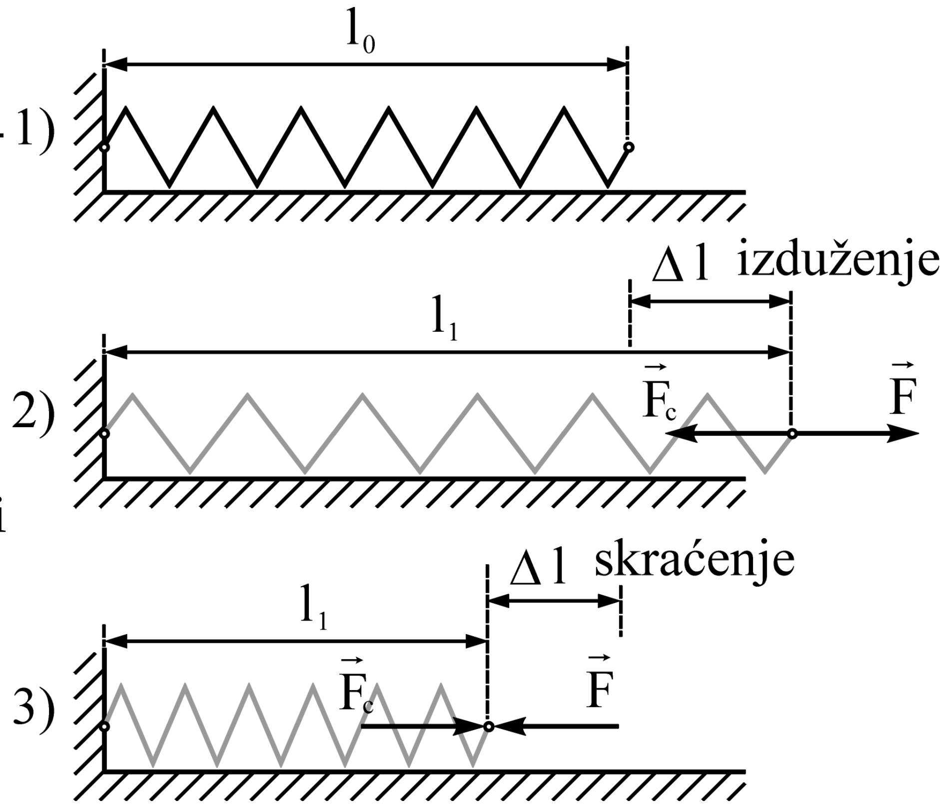
Slobodne harmonijske oscilacije.
Osnovni pojmovi.

Pozabavimo se prvo osnovnim pojmovima linearne opruge, koja je veoma čest element mehaničkih oscilatornih sistema. Na slici 1 je prkazana opruga u nedeformisanom stanju. Njenu dužinu u nedeformisanom stanju ćemo nazivati i prirodnom dužinom opruge i označavaćemo je sa l_0. Na slici 2 prkazana je opruga u deformisanom stanju. Njenu dužinu u deformisanom stanju ćemo označavati sa l_1.

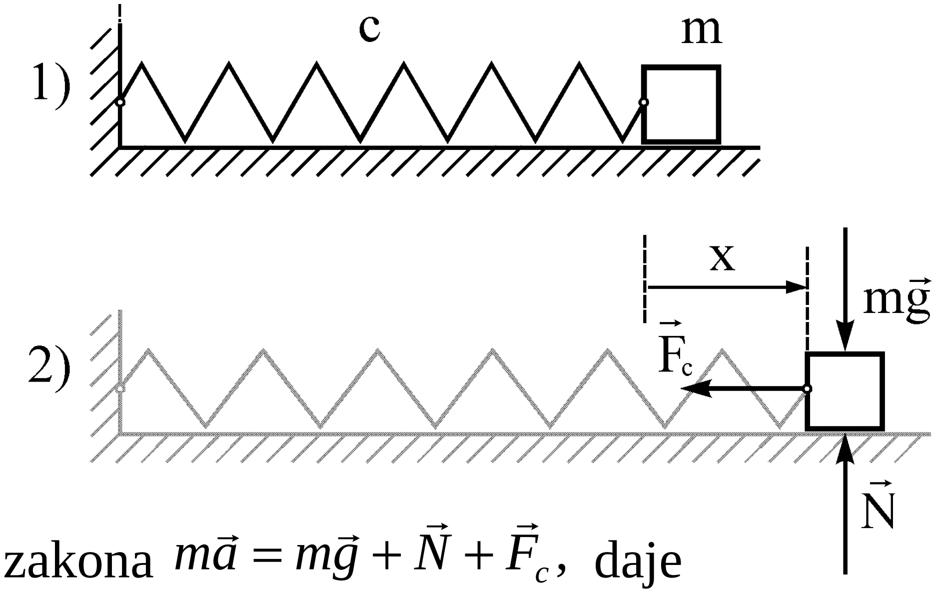


Razlika ovih dužina je izduženje opruge $\Delta l = l_1 - l_0$, koje je proporcionalno sa intenzitetom sile u opruzi $\vec{F}_c$:

$F_c = c \cdot \Delta l.$ Koeficijent proporcionalnosti c u ovoj jednakosti je krutost opruge.

Da je opruga sabijena, sila u opruzi bi bila proporcinalna skraćenju $\Delta l = l_0 - l_1$ a smer sile u opruzi $\vec{F}_c$ bio bi suprotan (Sl. 3). Zapravo, smer sile u opruzi je uvek takav da teži da rastereti oprugu, zbog toga je sila u opruzi restituciona.

Najprostiji mehanički oscilator čini linearna opruga krutosti s i teret mase m, koji vrši slobodne neprigušene oscilacije oko ravnotežnog položaja, prikazanog na slici 4.18-1. Oscilacije su neprigušene jer nema nikakvog trenja koje se suprotstavlja kretanju tereta (nema niti suvog Kulonovog trenja niti viskoznog trenja, kod kojeg sila otpora zavisi od brzine). Koordinate koje određuju položaj kod oscilatornih sistema (ovde je to x) biraju se tako da im je u ravnotežnom položaju vrednost jednaka nuli. U proizvoljnom položaju (Sl.2) izduženje opruge jednako je x koordinati pa jedi-na sila koja u pravcu kretanja dejstvuje na teret mase m je restituciona sila u opruzi intenziteta $F_c = c \cdot x.$



Projekcija na osu x, drugog Njutnovog zakona $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c,$ daje sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m\ddot{x} = -cx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Veličina ω nosi naziv „kružna frekvencija slobodnih oscilacija“.

Dobijena diferencijalna jednačina je „diferencijalna jednačina harmonijskog oscilatora“ i ona je specijalni slučaj homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Oblik opšteg rešenja diferencijalne jednačine $\ddot{x}+\omega^2 x=0,$ je

$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante koje se ovde određuju iz početnih uslova. Proučimo slučaj kada su početni uslovi najopštiji, gde postoji i početna brzina V_0 i početna nenulta vrednost x koordinate koja iznosi B. Dakle, početni uslovi su:

$x(0)=B,$ $\dot{x}(0)=V_0.$

Prvi izvod opšteg rešenja $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,$ odnosno brzina $\dot{x}$, u skladu sa opštim rešenjem, je $\dot{x}(t)=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t.$

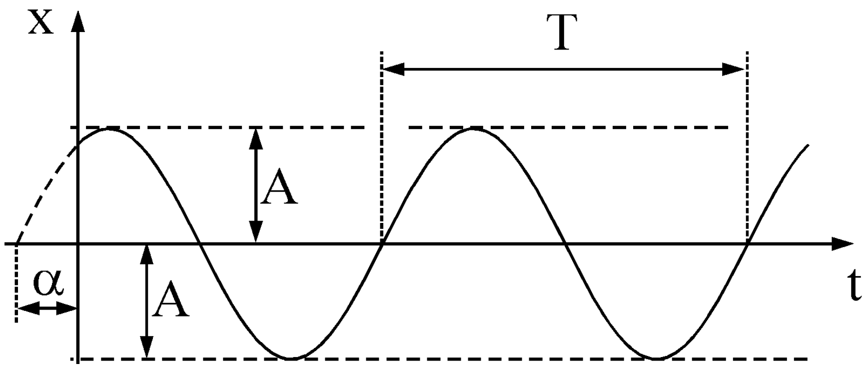
$$x(0)=B \quad\Rightarrow\quad B=C_1\cdot\cos(\omega\cdot 0)+C_2\cdot\sin(\omega\cdot 0) \quad\Rightarrow\quad C_1=B$$

$$\dot{x}(0)=V_0 \quad\Rightarrow\quad V_0=-C_1\omega\sin(\omega\cdot 0)+C_2\omega\cos(\omega\cdot 0) \quad\Rightarrow\quad C_2=\frac{V_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow\quad x(t)=B\cos\omega t+\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \qquad \text{ili} \qquad x(t)=A\sin(\omega t+\alpha),$$

gde je A-amplituda oscilovanja a α-početna faza. Amplitudu oscilovanja i početnu fazu određuju formule

$$A=\sqrt{B^2+\left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha=\arctan\frac{B\cdot\omega}{V_0}.$$

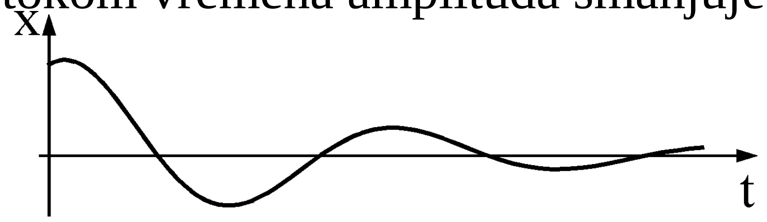


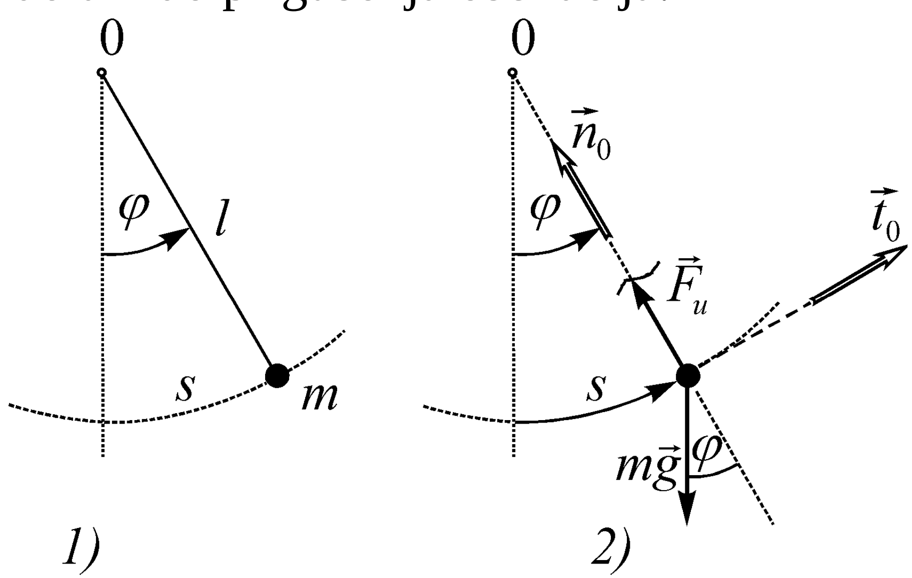
U najvažnije karakteristike harmonijskog kretanja spadaju: amplituda oscilovanja A (koja predstavlja maksimalni otklon od ravnotežnog položaja), kružna frekvencija slobodnih oscilacija ω (koja predstavlja broj oscilacija u 2π sekundi) i period oscilovanja T (koji predstavlja vreme za koje se izvrši jedna oscilacija). Period oscilovanja određuje formula

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

-period oscilovanja harmonijskog oscilatora

U realnim sistemima nema, kao u idealnim, kretanja bez otpora. Zbog prisustva sila trenja rešenje $x(t)$ ima takav oblik da se tokom vremena amplituda smanjuje (kao, na primer, na slici). Zapravo, dolazi do prigušenja oscilacija.

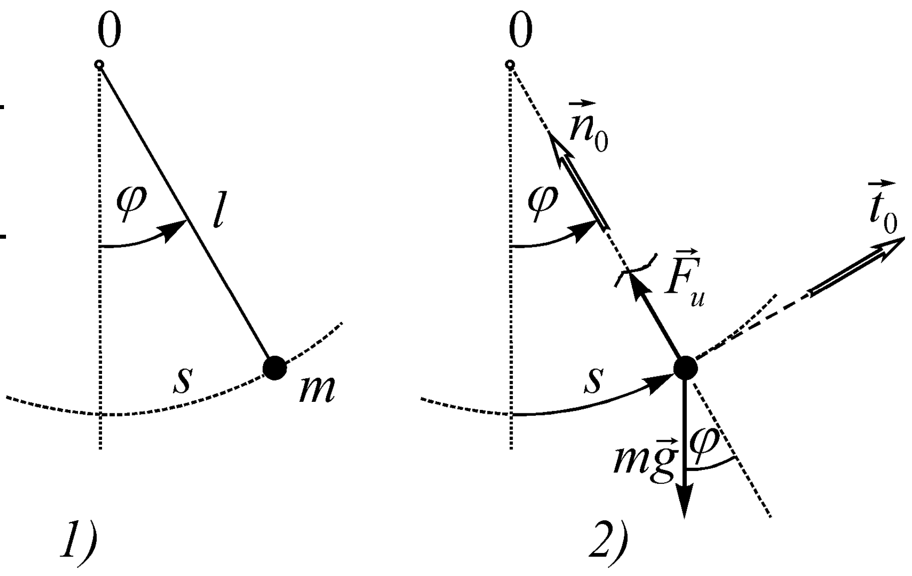




Matematičko klatno.

Matematičko klatno čini materijalna tačka mase koja osciluje u verikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže, krećući se po kružnoj putanji (Sl.1).

Za tačku je vezano uže dužine l koje vrši obrtanje oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O. Pošto je u ravnotežnom položaju uže vertikalno, koordinata φ koja definiše položaj meri se od vertikale. S obzirom da je lučna koordinata nad uglom φ jednaka $s = l\varphi$, izraz za tangencijalno ubrzanje postaje $a_T = \ddot{s} = l\ddot{\varphi}$.



Drugi Njutnov zakon: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_u$

Diferencijalna jednačina kretanja (projekcija $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_u$ *na tangentu):*

$$ma_T = -mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Ako su u pitanju male oscilacije klatna, to jest, ako su maksimalne vrednosti koordinate φ male, sinus ugla φ može sa dovoljno velikom tačnošću da se aproksimira sa samim uglom φ (podrazumeva se, u radijanima). Dakle $\sin\varphi \approx \varphi$.

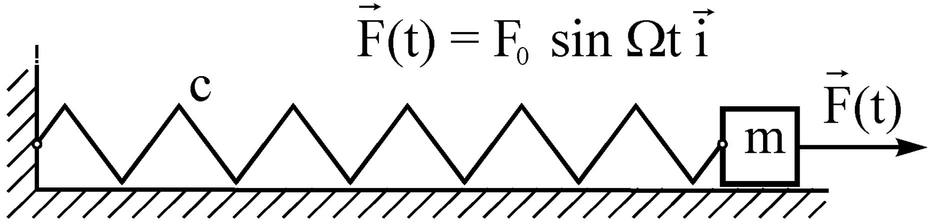
$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$ $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ -diferencijalna jednačina malih linearnih oscilacija matematičkog klatna

Za $\sin\varphi \approx \varphi - \dfrac{\varphi^3}{6} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0{}^2\varphi - \varepsilon\varphi^3 = 0,$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}},$ $\quad \varepsilon = \dfrac{g}{6l},$

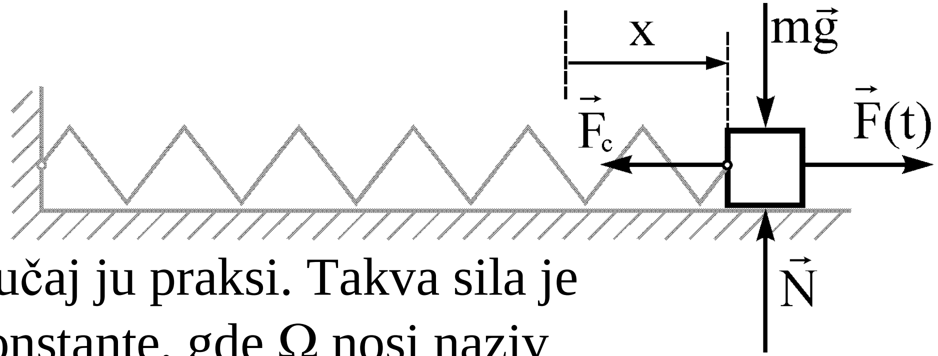
dobijena diferencijalna jednačina je nelinearna.

Prinudne oscilacije. Rezonancija.

1)



2)



Ako na teret mase m mehaničkog oscilatora sa slike 1 dejstvuje i prinudna sila $\vec{F}(t)$, dobija se prinudni mehanički oscilator.

Neka je sila $\vec{F}(t) = X(t)\vec{i}$ takva da je $X(t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$ ili je $X(t) = F_0 \cdot \cos \Omega t$, što je veoma čest slučaj ju praksi. Takva sila je prosto-periodičnog tipa a F_0 i Ω su konstante, gde Ω nosi naziv „kružna frekvencija prinudne sile"
Projekcija Drugog Njutnovog zakona $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}(t)$ (Sl.2) na osu x daje sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja zadatog prinudnog oscilatora

$$m\ddot{x} = -cx + F_0 \sin \Omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t, \quad \omega = \sqrt{c/m}, \; h = F_0/m.$$

Veličina ω je, kao što je već rečeno, kružna frekvencija slobodnih oscilacija, dok je h novouvedena konstanta. Dobijena diferencijalna jednačina je „diferencijalna jednačina prinudnog oscilatora" i spada u nehomogene, linearne, diferencijalne jednačine drugog reda, sa konstantnim koeficijentima. Član te jednačine $h \sin \Omega t$ naziva se nehomogenim, i on tu jednačinu čini nehomogenom.

Poznato je da oblik opšteg rešenja nehomogene, linearne, diferencijalne jednačine predstavlja zbir homogenog x_h i partikularnog x_p rešenja: $x = x_h + x_p$.

Homogeno rešenje nehomogene difrencijalne jednačine $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t$ ima oblik $x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ i predstavlja rešenje odgovarajuće homogene jednačine $\ddot{x}_h + \omega^2 x_h = 0$. Integracione konstante C_1 i C_2, koje figurišu u homogenom rešenju, određuju se iz početnih uslova, ali tek nakon formiranja opšteg rešenja diferencijalne jednačine. Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina, nekoj nehomogenoj, dobija se zamenjivanjem nehomogenog člana nulom.

Nalaženje partikularnog rešenja x_p, ima i iskustvenog u sebi, naime, od x_p se očekuje samo to da svojim oblikom zadovolji nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu, što bi u ovom slučaju značilo zadovoljenje jednačine:

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = h \sin \Omega t.$$

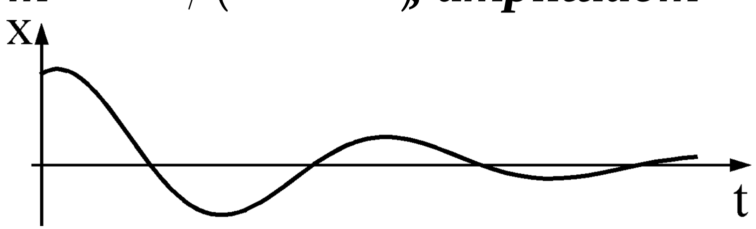
Iz iskustva se zna da, ako je leva strana jednačine oblika $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p$, a desna je prosto periodičnog tipa, oblika $h \sin \Omega t$ (ili $h \cos \Omega t$), partikularno rešenje treba tražiti u obliku nehomogenog člana, dakle $x_p = A \sin \Omega t$. Prvi i drugi izvod od ovog partikularnog rešenja su $\dot{x}_p = A\Omega \cos \Omega t$, $\ddot{x}_p = -A\Omega^2 \sin \Omega t$.

Uvrštavanjem $A \sin \Omega t$ umesto x_p i $-A\Omega^2 \sin \Omega t$ umesto $\ddot{x}_p$ u $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = h \sin \Omega t$ pa skraćivanjem člana $\sin \Omega t$ dobija se da konstantu *A*, u partikularnom rešenju, određuje izraz $A = h / \left(\omega^2 - \Omega^2\right)$.

Konačno, opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t$, s obzirom na $x = x_h + x_p$, $x_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ i $x_p = A \sin \Omega t$ ima oblik

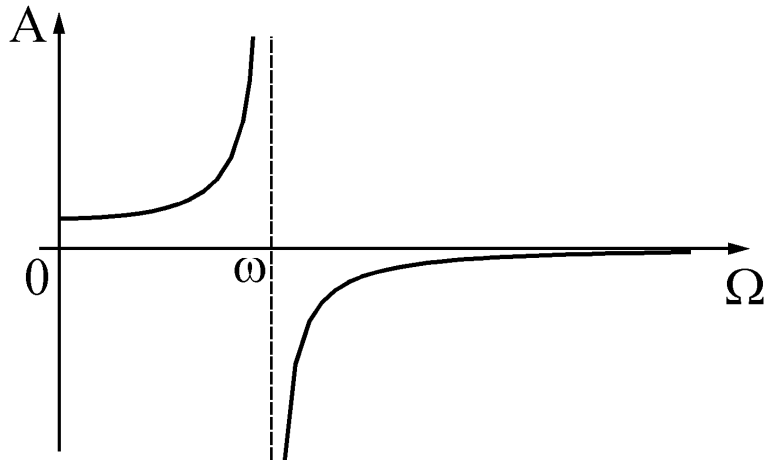
$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A \sin \Omega t$,

gde bi se, tek sada, integracione konstante C_1 i C_2 mogle određivati iz početnih uslova, koji govore o tome koliko je $x(0)$ i $\dot{x}(0)$. Međutim, prva dva člana u dobijenom opštem rešenju, tiču se slobodnih oscilacija, koje su, u realnim sistemima uvek prigušene (slično kao na slici) pa bi došlo do njihovog iščezavanja. Praktično, one oscilacije koje ostaju u sistemu tiču se samo partikularnog rešenja i posledica su postojanja prinudne sile. ***Zbog toga se partikularno rešenje*** $x_p = A \sin \Omega t$ ***naziva prinudnim oscilacijama a veoma važna konstanta A u njemu, određena izrazom*** $A = h / \left(\omega^2 - \Omega^2\right)$***, amplitudom prinudnih oscilacija.***



U oscilatornim sistemima prinudnu silu $\vec{F}(t) = F_0 \sin \Omega t \ \vec{i}$ najčešće prouzrokuje rotacija neuravnotežene mase, tako da se ugaona brzina rotacionog elemenata menja (na primer, nakon startovanja mašine, ona se povećava, dok se nakon isključivanja, smanjuje), a samim tim se menja i kružna frekvencija prinudne sile Ω.

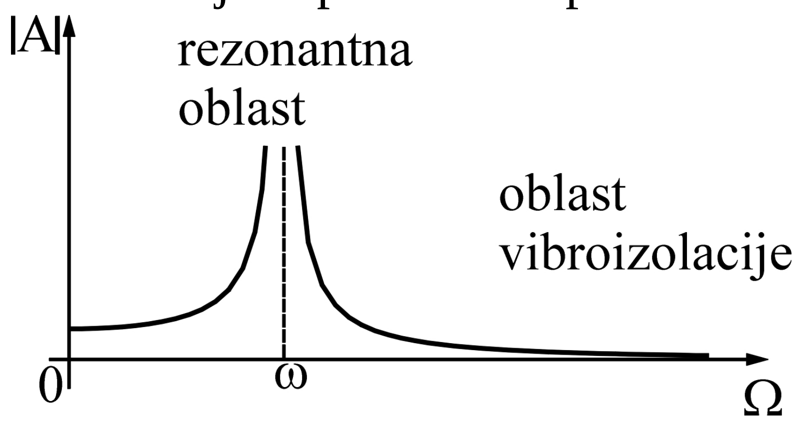
Iz tih razloga, veoma je važno dijagramski predstaviti zavisnost između amplitude prinudnih oscilacija A i kružne frekvencije prinudne sile Ω koja je analitički predstavljena formulom $A = h/\left(\omega^2 - \Omega^2\right)$.



Sa slike se vidi da funkcija $A(\Omega)$ ima vertikalnu asimptotu za $\Omega = \omega$.

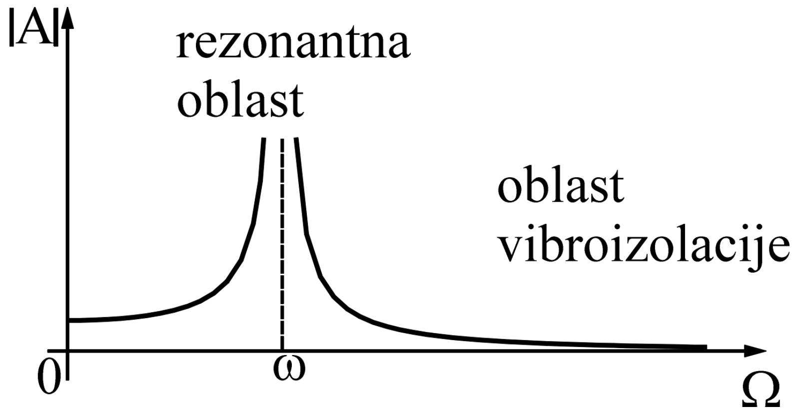
Na tom mestu imamo rezonanciju, i teorijski se amplitude prinudnih oscilacija povećavaju do beskonačnosti. Pošto je rezonancija veoma štetna pojava u tehnici cilj je da u radnom režimu kružna frekvencija prinudne sile Ω bude dovoljno veća od kružne frekvencije slobodnih oscilacija ω pošto bi amplituda A imala poželjno malu vrednost.

U literaturi se češće umesto gore prikazanog dijagrama $A(\Omega)$ prikazuje dijagram sa apsolutnom vrednošću amplitude $|A|(\Omega)$ (donja slika).

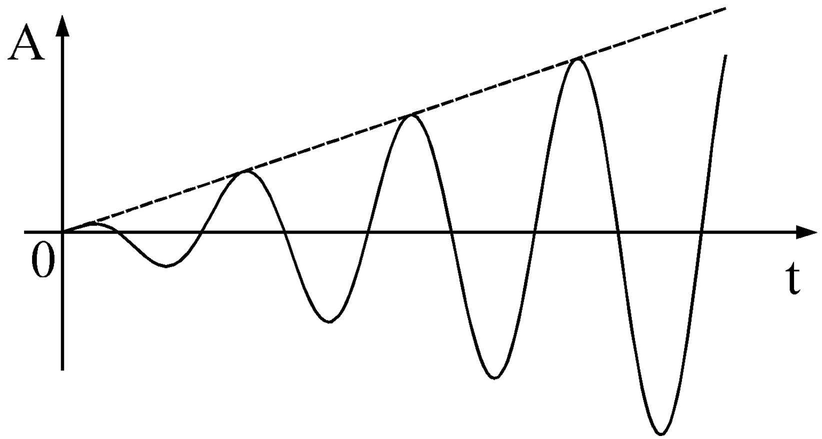


Za Ω blisko vrednosti ω imamo štetnu rezonantnu oblast, gde zbog povećanja amplitude A, može doći do havarije.

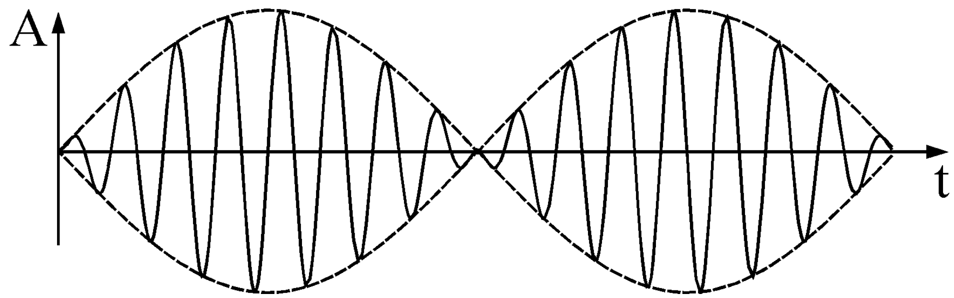
Oblast, u kojoj je Ω dovoljno veće od ω a amplituda A ima poželjno malu vrednost, je oblast vibroizolacije, koja je pogodna za radni režim mašine. Međutim, iako je radni režim u oblasti vibroizolacije, pri povećavanju vrednosti Ω od nule do ustaljene vrednosti, a takođe pri njenom smanjivanju, prolazi se kroz rezonantnu oblast, i važno bi bilo da taj prolazak traje što kraće.

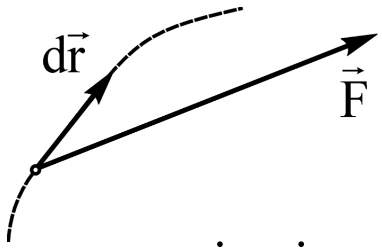


Naime, detaljnim rešavanjem diferencijalne jednačine $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t$, za samu rezonanciju (gde je $\Omega = \omega$), amplituda prinudnih oscilacija imala bi zavisnost od vremena, oblika kao što je prikazano na donjoj slici, što znači da se amplituda linearno povećava sa vremenom i za kratko vreme prolaska kroz rezonantnu oblast njeno povećanje ne može biti veliko.



Detaljnim rešavanjem diferencijalne jednačine $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t$, za slučaj kada su Ω i ω bliske (to jest, kada se razlikuju za malu vrednost), amplituda prinudnih oscilacija imala bi zavisnost od vremena oblika kao što je prikazano na slici, što znači da se amplituda naizmenično povećava i smanjuje sa vremenom po sinusnom zakonu. Ova pojava se u tehnici naziva podrhtavanjem.

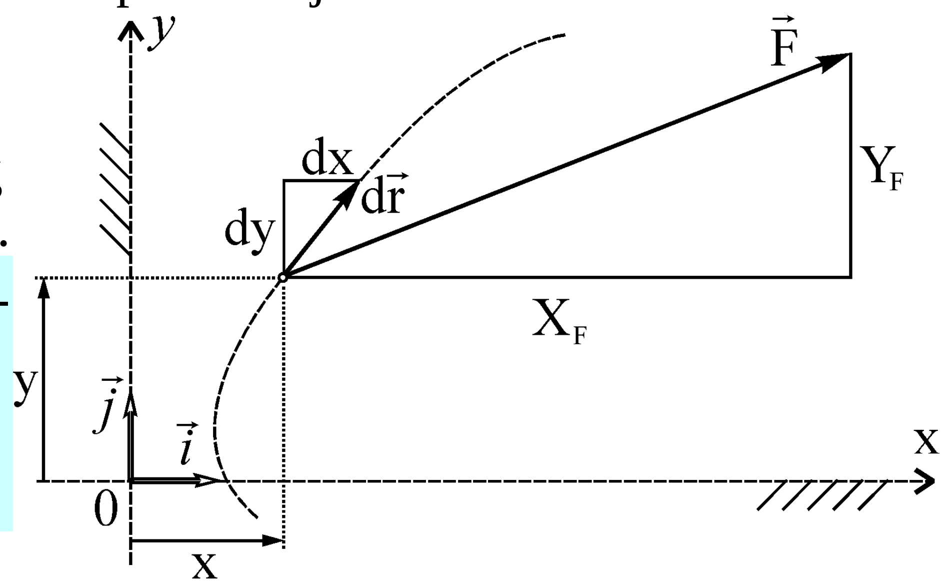




Definicija elementarnog rada sile i njegovi izrazi s obzirom na pravougli Dekartov i prirodni koordinatni sistem.

Elementarni rad neke sile predstavlja rad sile na elementarnom pomeranju njene napadne tačke i definisan je kao skalarni proizvod vektora te sile i vektora elementarnog pomeranja napadne tačke $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

U pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu vektori sile i elementarnog pomeranja napadne tačke imaju oblik: $\vec{F} = X_F \vec{i} + Y_F \vec{j}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.



Uvrštavanjem $\vec{F} = X_F \vec{i} + Y_F \vec{j}$ i $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ u $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dobija se da elementarni rad sile u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu, određuje formula $dA = X_F dx + Y_F dy$.

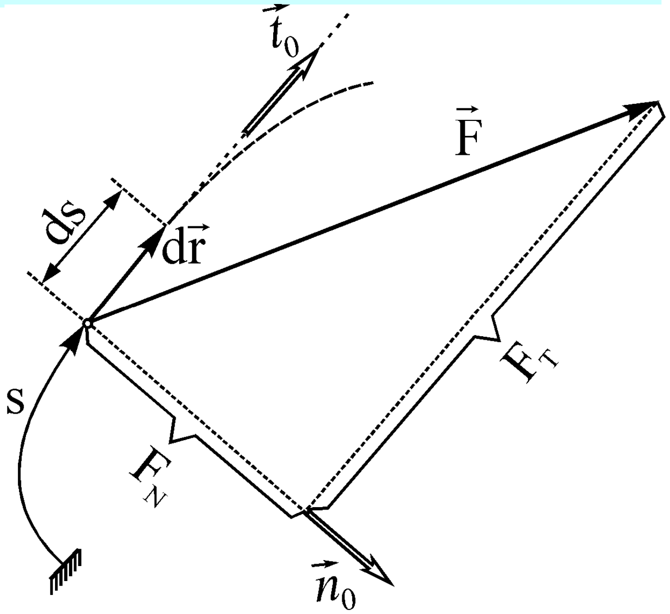
U prirodnom koordinatnom sistemu, vektori sile i elementarnog pomeranja napadne tačke imaju oblik:

$\vec{F} = F_T \vec{t}_0 + F_N \vec{n}_0$,

$d\vec{r} = ds\vec{t}_0$.

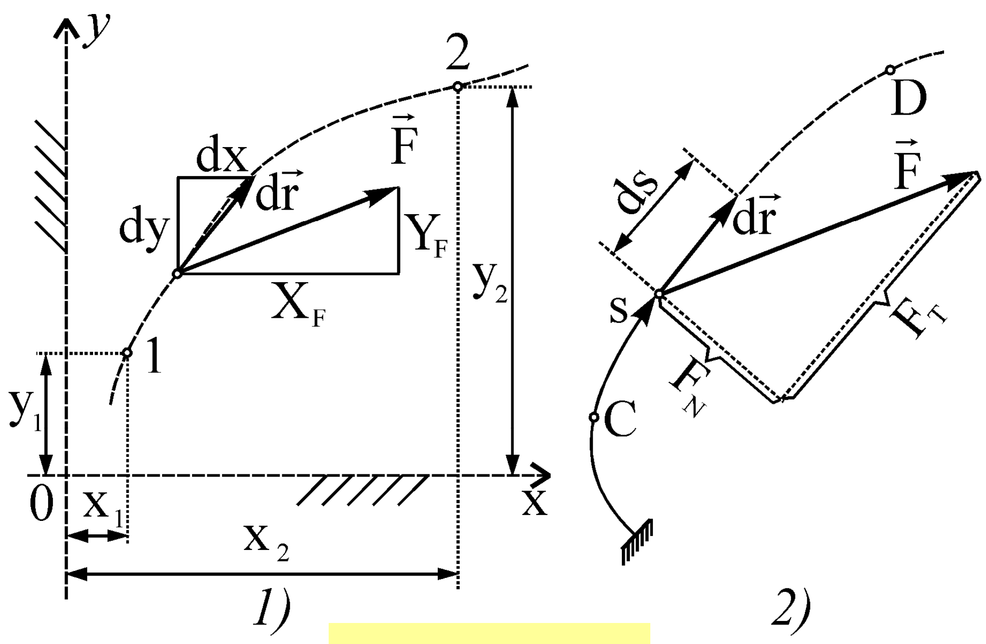
Uvrštavanjem ovih izraza u $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, dobija se formula za elementarni rad sile u prirodnom koordinatnom sistemu:

$dA = F_T ds$.



Rad sile na zadatom pomeranju napadne tačke.

Da bi se dobio rad sile na konačnom pomeranju njene napadne tačke, potrebno je da se izvrši integracija elementarnog rada u obliku $dA = X_F dx + Y_F dy$, za pravougli Dekartov koordinatni sistem, odnosno, u obliku $dA = F_T ds$, za prirodni koordinatni sistem. Ovde se radi o određenim integralima, sa odgovarajućim granicama integrala, koje definišu početni i krajnji položaj napadne tačke sile, između kojih se traži rad sile.



Dakle, izraz za rad sile $\vec{F}$, sa slike 1, od položaja 1, do položaja 2, definiše izraz:

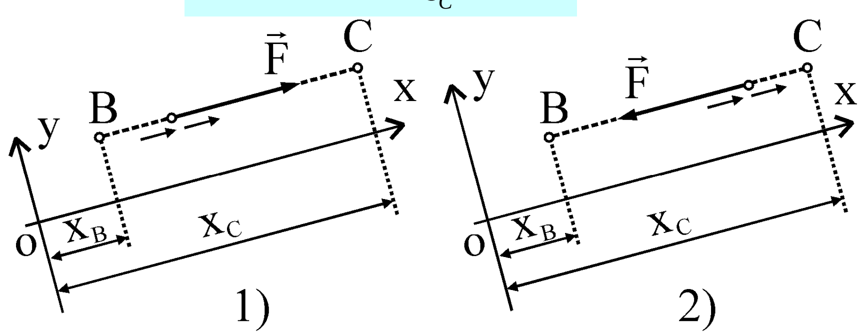
$$A(\vec{F})_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} X_F\,dx + \int_{y_1}^{y_2} Y_F\,dy.$$

Slično prethodnom, izraz za rad sile $\vec{F}$, sa slike 2, od položaja C do položaja D, definiše izraz:

$$A(\vec{F})_{C-D} = \int_{s_C}^{s_D} F_T\,ds.$$

Primer 4.12

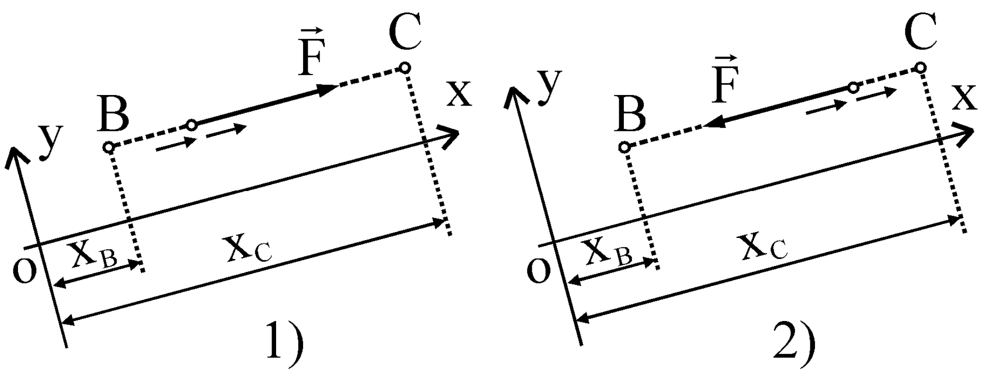
Odrediti rad konstantne sile $\vec{F}$ kada se njena napadna tačka pomera u pravcu sile?



Na slici 1, smer pomeranja napadne tačke sile (od B do C) poklapa se sa smerom sile i elementarni rad takve sile, za izabran koordinatni sistem ima oblik $dA(\vec{F}) = F \cdot dx.$ Integracijom se dobija da konačan rad sile, u slučaju istog smera sile i pomeranja njene napadne tačke, određuje izraz

$$A(\vec{F})_{B-C} = F\int_{x_B}^{x_C} dx = F(x_C - x_B) = F \cdot \overline{BC}.$$

Na slici 2, smer pomeranja napadne tačke sile (od B do C) suprotan je u odnosu na smer sile i elementarni rad takve sile, za izabran koordinatni sistem ima oblik $dA(\vec{F}) = -F \cdot dx.$ Integracijom se

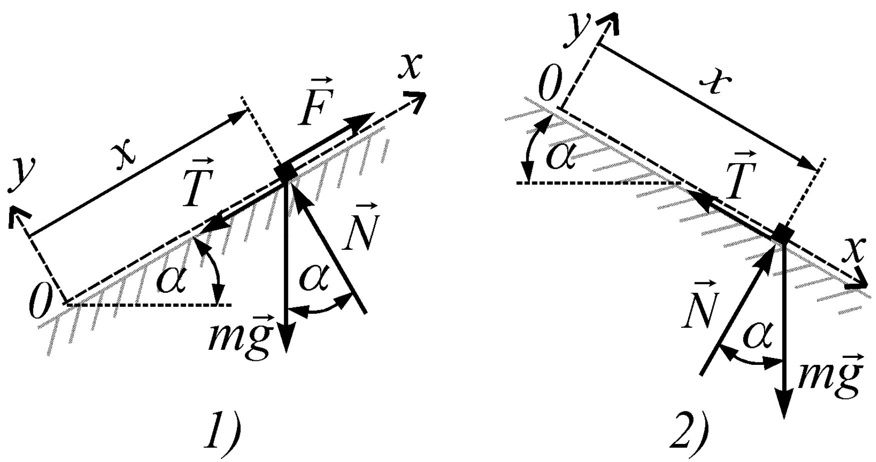


dobija da konačan rad sile, u slučaju suprotnog smera sile i pomeranja njene napadne tačke, određuje izraz

$$A(\vec{F})_{B-C} = -F \int_{x_B}^{x_C} dx = -F(x_C - x_B) = -F \cdot \overline{BC}.$$

Dakle, u slučaju konstantne sile (misli se konstantne kao vektora, što znači konstantne po pravcu, smeru i intenzitetu) kada se njena napadna tačka pomera u pravcu dejstva sile, rad sile na takvom pomeranju jednak je proizvodu intenziteta sile i pomeranja njene napadne tačke sa predznakom „+“ ili „-“ . Predznak je „+“ kada se poklapaju smerovi sile i pomeranja, dok je „-“ kada su suprotni.

Prema ovom zaključku, za kretanje tačke, kako uz strmu ravan (Sl.1), tako i niz strmu ravan (Sl.2), rad konstantne sile trenja $\vec{T}$ na pomeranju *x*, iznosi $A(\vec{T}) = -T \cdot x,$ s tim što, zbog važenja statičke jednačine za *y* pravac, intenzitet sile trenja iznosi $T = \mu N = \mu mg \cos\alpha.$



Rad konstantne sile $\vec{F}$, sa slike 1, na tom istom pomeranju, je $A(\vec{F}) = F \cdot x.$

Snaga sile.

S obzirom da snaga predstavlja brzinu vršenja rada, snaga sile $P(\vec{F})$ može se dobiti kao količnik elementarnog rada sile dA i elementarnog proteklog vremena dt za koje je taj elementarni rad izvršen

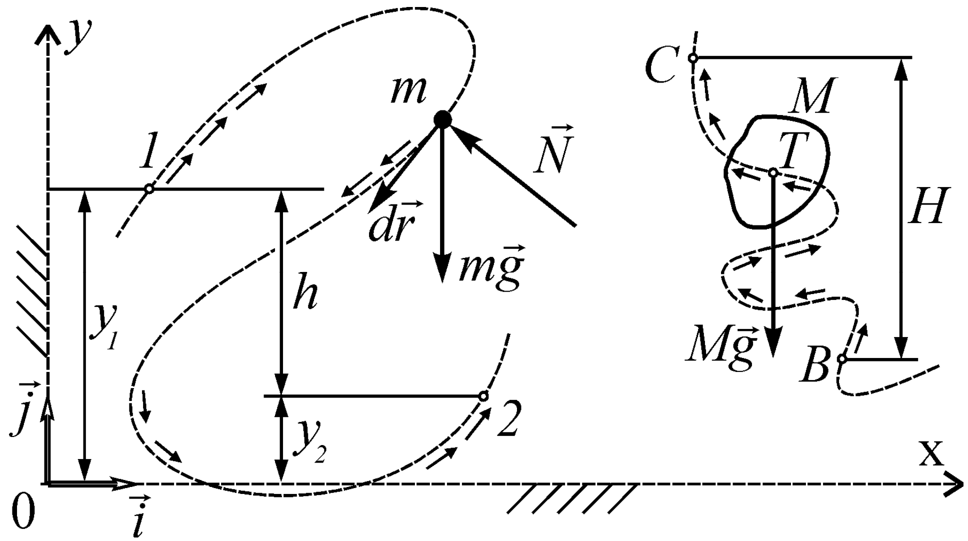
$$P(\vec{F}) = \frac{dA(\vec{F})}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt}.$$

Pošto je $d\vec{r}/dt = \vec{V}$, dobija se da je snaga sile, u nekom trenutku vremena, jednaka skalarnom proizvodu vektora te sile i vektora njene trenutne brzine $P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V}.$

Ako bi vektori sile i brzine njene napadne tačke bili kolinearni onda bi snagu te sile, zbog $\cos 0 = 1$ i $\cos 180^0 = -1$, određivala formula $P(\vec{F}) = \pm FV,$ gde predznak „+“ odgovara istom smeru vektora sile i brzine, dok predznak „-“ odgovara njihovim suprotnim smerovima.

Rad sile težine. Rad sile u opruzi.

Elementarni rad sile težine $m\vec{g}$, prema formuli $dA = Xdx + Ydy$, ima oblik $dA(m\vec{g}) = -mg \cdot dy$.



Konačni rad te sile, pri pomeranju njene napadne tačke od položaja 1 do položaja 2, dobiće se integraljenjem elementarnog rada:

$$A(m\vec{g})_{1-2} = -mg \cdot \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg \cdot (y_2 - y_1) \quad \Rightarrow \quad A(m\vec{g})_{1-2} = mg \cdot (y_1 - y_2) = mgh$$

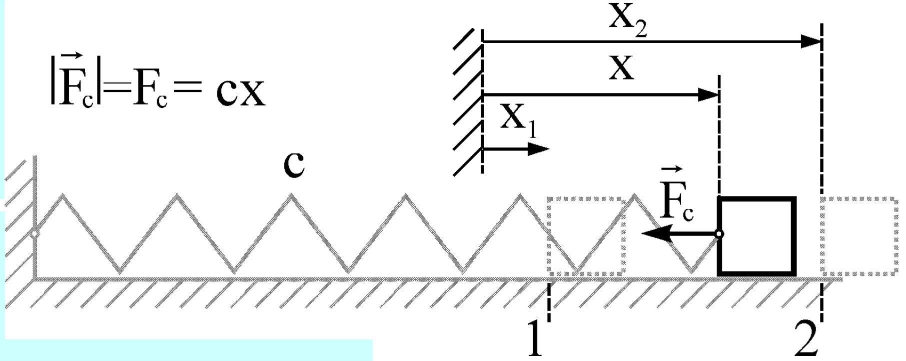
Generalno, rad neke sile težine $m\vec{g}$, na putu njene napadne tačke između početnog i krajnjeg položaja, jednak je proizvodu intenziteta te sile *mg* i visinske razlike h između početnog i krajnjeg položaja, nezavisno od oblika putanje, sa predznakom „+“ ili „-“ $A(m\vec{g}) = \pm mgh$.

Predznak je „+“, kada je početni nivo napadne tačke viši od krajnjeg, dok je „-“, kada je početni nivo napadne tačke niži od krajnjeg.

Na slici je prikazano i pomeranje napadne tačke sile težine $M\vec{g}$, nekog tereta mase *M*, od položaja *B*, koji je na nižem nivou, do položaja *C*, koji je na višem nivou, zbog čega je rad ove sile na takvom pomeranju negativan: $A(M\vec{g})_{B-C} = -mgH$.

U mnogim primerima tačka se kreće po glatkoj vezi (kao što je to tačka mase *m*, na slici sa prethodnog slajda) tako da na nju dejstvuje i reakcija idealne veze $\vec{N}$. Elementarni rad ove sile, prema izrazu $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, je $dA(\vec{N}) = \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$, pošto su $\vec{N}$ i $d\vec{r}$ međusobno upravni vektori, a skalarni proizvod takvih vektora jednak je nuli. Oni su međusobvno upravni zato što je vektor elementarnog pomeranja $d\vec{r}$ u pravcu tangente a vektor reakcije glatke veze $\vec{N}$ u pravcu normale. Pošto je elementartni rad jednak nuli i konačan rad takve sile mora takođe biti jednak nuli. Kako reakcija glatke veze, tako i reakcije bilo kojih drugih idealnih veze (kao na primer zglobova, užadi, lakih štapova itd.) ne vrše rad pri kretanju.

Elementarni rad sile u opruzi $\vec{F}_c$, prema formuli $dA = Xdx + Ydy$, ima oblik $dA(\vec{F}_c) = -cx \cdot dx$.



Konačan rad te sile, pri pomeranju njene napadne tačke od položaja 1 do položaja 2, dobiće se integraljenjem elementarnog rada:

$$A(\vec{F}_c)_{1-2} = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = -c\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} = -\frac{c}{2}\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right).$$

U problemima koji sadrže opruge pogodnije je korišćenje teorema, zakona i jednačina koji se tiču potencijalne energije sile u opruzi, umesto onih, koji se tiču rada te sile. Pošto je $d\Pi\left(\vec{F}_c\right) = -dA\left(\vec{F}_c\right) = cx \cdot dx,$

integraljenjem dobijena funkcija potencijalne energije ove sile, ima oblik

$$\Pi\left(\vec{F}_c\right) = c\frac{x^2}{2},$$

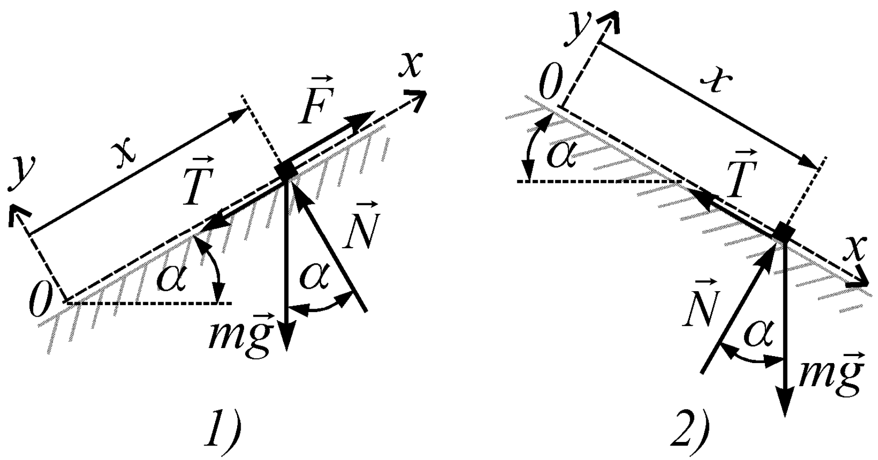
jer je izabrano da je konstanta integracije jednaka nuli. Inače aditivna konstanta u potencijalnoj energiji zavisi od sistema referencije i može se izabrati proizvoljno. Pošto je koordinata x zapravo izduženje opruge Δl, najčešće korišćena formula, za potencijalnu energiju elastične sile u opruzi $\vec{F}_c$, je

$\Pi\left(\vec{F}_c\right) = \frac{1}{2}c(\Delta l)^2.$ Ovo Δl iz formule može biti, kako izduženje, tako i skraćenje.

Primer 4.13 Odrediti rad sile težine $m\vec{g}$ u slučajevima kretanja uz i niz strmu ravan, gde pomeranje tačke iznosi x?

Sl.1, $A(m\vec{g}) = -mgh = -mgx\sin\alpha.$

Sl.2, $A(m\vec{g}) = mgh = mgx\sin\alpha.$



Teorema o promeni kinetičke energije tačke.

Ako bismo umesto ubrzanja tačke $\vec{a}$, u drugom Njutnovom zakonu, stavili prvi izvod vektora brzine po vremenu $d\vec{V}/dt$, a zatim skalarno pomnožili, i levu i desnu stranu, sa vektorom elementarnog pomeranja $d\vec{r}$, dobili bismo

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}.$$

Sada, leva strana dobijene jednakosti, može biti zapisana kao $m\vec{V}\cdot d\vec{V}$, a desna strana predstavlja sumu elementarnih radova svih sila koje dejstvuju na tačku:

$$m\vec{V}\cdot d\vec{V} = \sum dA(\vec{F}_i).$$

Zbog sledećeg identiteta

$$d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}\cdot\vec{V}\right) = \frac{1}{2}m\left(d\vec{V}\cdot\vec{V} + \vec{V}\cdot d\vec{V}\right) = m\vec{V}\cdot d\vec{V},$$

leve strana prethodne jednakosti, može biti zapisana na način

$d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}\cdot\vec{V}\right)$ ili $d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$, tako da jednakost postaje $d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = \sum dA(\vec{F}_i).$

S obzirom da izraz u zagradi leve strane jednakosti dobijene predstavlja kinetičku energiju tačke, dobija se da, teorema o promeni kinetičke energije tačke, u diferencijalnom obliku, može biti zapisana na način $dE_k = dA.$

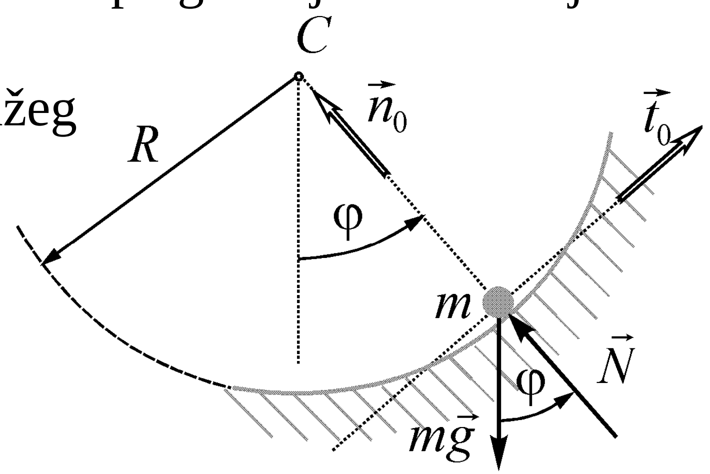
Suma elementarnih radova svih sila koje dejstvuju na tačku $\sum dA(\vec{F}_i)$, kraće je zapisana sa dA. Dakle, prema jednakosti $dE_k = dA$ imamo da je, elementarni priraštaj kinetičke energije tačke, jednak, sumi elementarnih radova svih sila koje dejstvuju na tačku.

Neka se tačka kreće, po nekoj svojoj putanji, od prethodnog položaja 1, ka narednom položaju 2. Integraljenjem $dE_k = dA$, za interval kretanja koji odgovara prethodnom i nerednom položaju, dobija se da ova teorema u konačnom obliku može biti zapisana na način $E_{k2} - E_{k1} = A_{1-2}$.

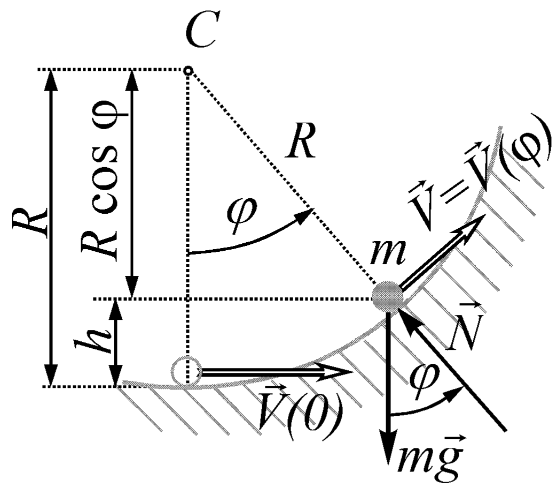
Rečima iskazana ova teorema : kinetička energija tačke u narednom položaju, umanjena za njenu kinetičku energiju u prethodnom položaju, jednaka je sumi radova svih sila koje dejstvuju na tačku, pri njenom premeštanju, iz prethodnog, u naredni položaj.

Primer 4.14 Neka se materijalna tačka mase m kreće po glatkoj cilindričnoj površini poluprečnika R u homogenom polju sile Zemljine teže. Tačka je započela kretanje iz najnižeg položaja sa početnom brzinom intenziteta V_0.

Odrediti zavisnost $V(\varphi)$, a samim tim i $\dot{\varphi}(\varphi)$, koristeći teoremu o promeni kinetičke energije tačke, od početnog položaja do proizvoljnog?



Kinetičku energiju materijalne tačke u početnom položaju označimo sa E_{k0}, a u proizvoljnom, prikazanom na slici, sa E_k . Sa A označimo sumu radova svih sila, koje dejstvuju na tačku, pri njenom premeštanju, iz početnog, u proizvoljni položaj. Ovde, prethodnom položaju odgovara početni, a nerednom proizvoljni, tako da teorema $E_{k2} - E_{k1} = A_{1-2}$, može biti zapisana na način $E_k - E_{k0} = A$.



Dalje, s obzirom da pri kretanju rad vrši jedino sila težine $m\vec{g}$, a kinetičku energiju tačke određuje formula $E_k = mV^2/2$, imamo:

$$\frac{m}{2}V^2 - \frac{m}{2}V_0^{\ 2} = -mgh = -mg(R - R\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad V = V(\varphi) = \sqrt{V_0^{\ 2} - 2gR(1-\cos\varphi)}.$$

S obzirom da je $V = R\dot{\varphi}$, dobijamo

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \frac{V(\varphi)}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{V_0^{\ 2} - 2gR(1-\cos\varphi)}.$$

Ovaj način za dobijanje $V(\varphi)$ je neuporedivo lakši od integracije diferencijalne jednačine kretanja, kojom je $V(\varphi)$ dobijeno u primeru 4.3. Uvek, kada je primenom teoreme o promeni kinetičke energije, moguće zaobići integraciju diferencijalne jednačine kretanja, treba je i primeniti.