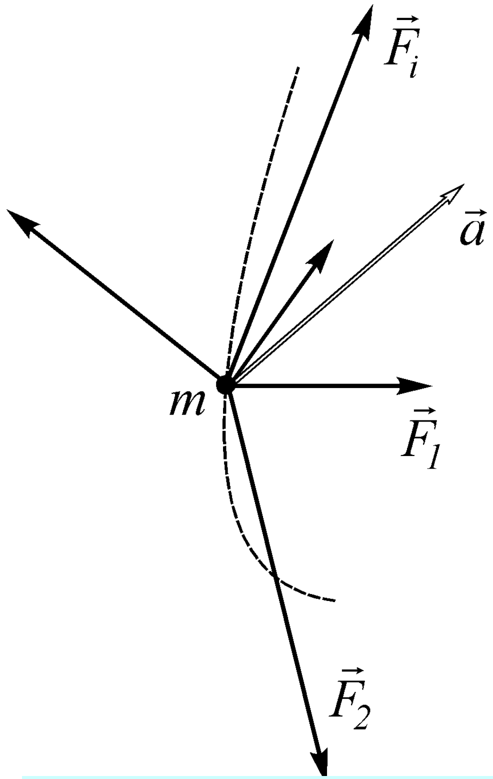
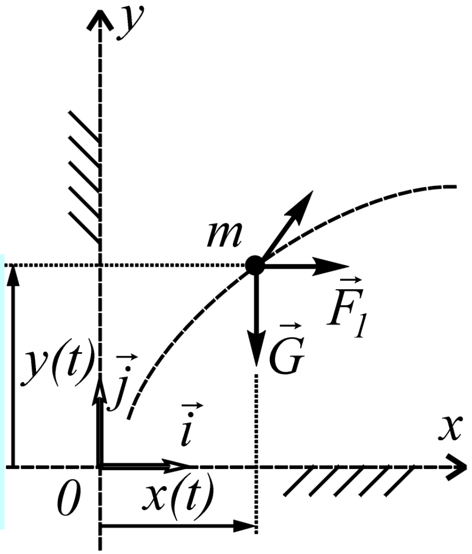
Drugi Njutnov zakon



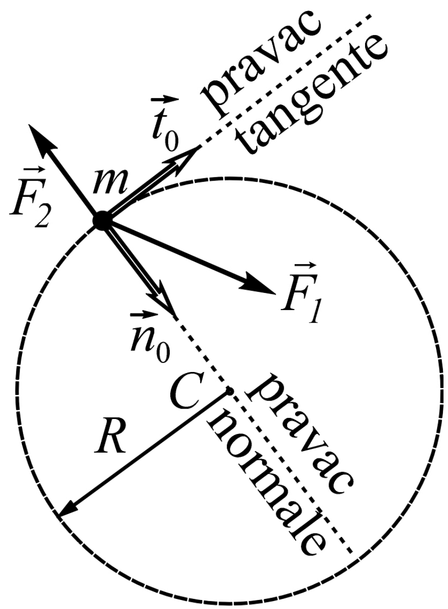
Proizvod između mase materijalne tačke m i vektora njenog ubrzanja $\vec{a}$ jednak je vektorskoj sumi svih sila $\vec{F}_i$ koje dejstvuju na tačku: $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$.

Drugi Njutnov zakon je vektorski zakon ali gotovo uvek, on će biti projektovan na neke međusobno upravne pravce kako bi se izvršila neka izračunavanja. Veoma često su ti pravci, na koje se projektuje drugi Njutnov zakon, ose nepokretnog pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema (Sl.1).

Za kružno kretanje, drugi Njutnov zakon se projektuje na tangentu i normalu prirodnog koordinatnog sistema (Sl.2).



1)



2)

Sile $\vec{F}_i$ su bukvalno sve sile koje dejstvuju na materijalnu tačku, bilo da su one aktivne ili reakcije veza.

S obzirom da je u Dekartovom koordinatnom sistemu (kod ravanskih problema) vektor ubrzanja tačke $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$ a vektor proizvoljne *i*-te sile $\vec{F}_i = X_i\vec{i} + Y_i\vec{j}$, projekcije drugog Njutnovog zakona $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ na kordinatne ose su:

$m \cdot \ddot{x} = \sum X_i, \quad m \cdot \ddot{y} = \sum Y_i.$

Ovakvi izrazi su skalarni (iz razloga što su projekcije vektora na ose skalari) i veoma često će se vršiti njihovo integraljenje. U takvim slučajevima se projekcije drugog Njutnovog zakona nazivaju i diferencijalnim jednačinama kretanja. To su diferencijalne jednačine drugog reda, pošto su drugi izvodi najviši izvodi koji u njima figurišu.

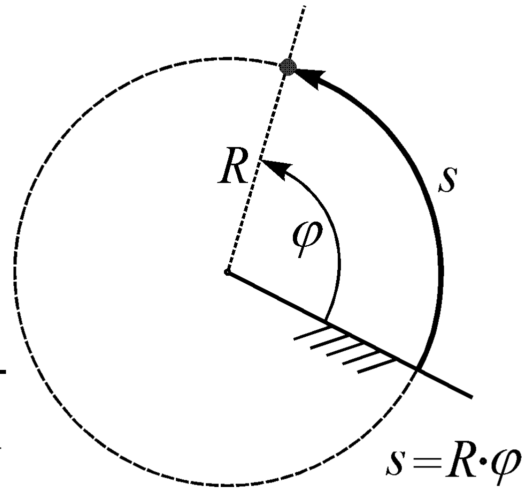
S obzirom da je kod ravanskih problema u prirodnom koordinatnom sistemu vektor ubrzanja tačke $\vec{a} = a_T\vec{t}_0 + a_N\vec{n}_0$ a vektor proizvoljne *i*-te sile $\vec{F}_i = F_{iT}\vec{t}_0 + F_{iN}\vec{n}_0$, projekcije drugog Njutnovog zakona $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}_i$ na kordinatne ose su:

$m \cdot a_T = \sum F_{iT}, \quad m \cdot a_N = \sum F_{iN}.$

Ovde je iz kinematike potrebno znati da se tangencijalno ubrzanje a_T dobija na osnovu drugog izvoda lučne koordinate *s* po vremenu, odnosno, prvog izvoda brzine po vremenu, a normalno ubrzanje a_N , jednako je količniku kvadrata brzine tačke i poluprečnika kruga, tj:

$$a_T = \ddot{s} = \pm\dot{V}, \quad a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}.$$

Takođe je često važno da se zna da je veza između poluprečnika R, ugla u radijanima φ i dužine kružnog luka s, nad tim uglom, određena izrazom $s = R \cdot \varphi$.



Prvi zadatak dinamike tačke. Primer.

U prvom zadatku dinamike tačke poznato je kretanje, samim tim i ubrzanje (čije se projekcije dobijaju traženjem izvoda od koordinata) a potrebno je da se odredi sila (ovde se podrazumeva da samo jedna sila dejstvuje na materijalnu tačku mase m) koja prouzrokuje zadato kretanje. U takvom slučaju projekcije vektorskog drugog Njutnovog zakona na kordinatne ose imaju oblik: $m \cdot \ddot{x} = X$, $m \cdot \ddot{y} = Y$, gde su X i Y projekcije tražene sile koje u potpunosti određuju tu silu.

Primer 4.1 Kretanje materijalne tačke mase $m = 1\ kg$, pod dejstvom sile $\vec{F}(t)$, definisano je jednačinama: $x(t) = 2\sin t - t^2$, $y(t) = 2t \cdot \cos t$. Odrediti silu $\vec{F}(t)$?

Prvi izvodi jednačina kretanja (projekcije brzine) su:

$\dot{x}(t) = 2\cos t - 2t$, $\quad \dot{y}(t) = 2 \cdot \cos t - 2t \cdot \sin t$.

Prvi izvodi projekcija brzine (projekcije ubrzanja) su:

$\ddot{x}(t) = -2\sin t - 2$, $\quad \ddot{y}(t) = -4\sin t - 2t\cos t$.

Konačno je:

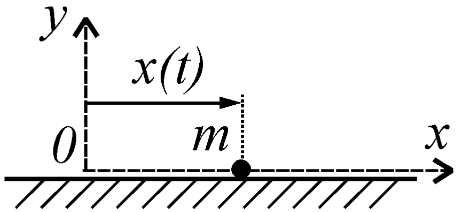
$X(t) = -2(\sin t + 1)$,

$Y(t) = -2(2\sin t + t\cos t)$

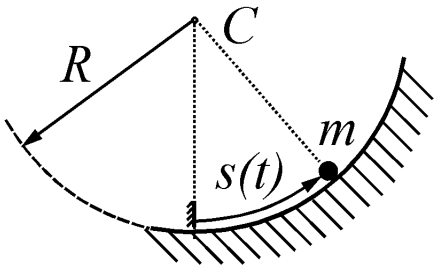
$$\Rightarrow \vec{F}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} = -2(\sin t + 1)\vec{i} - 2(2\sin t + t\cos t)\vec{j}.$$

Drugi zadatak dinamike tačke. Integracija diferencijalne jednačine kretanja i određivanje reakcije veze za vezano kretanje materijalne tačke.

Ovde od sila, koja dejstvuje na tačku pri njenom kretanju. ima i je reacija veza. U ovakvom slučaju drugog zadatka dinamike tačke kretanje treba odrediti na osnovu one projekcije drugog Njutnovog zakona koja predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja.



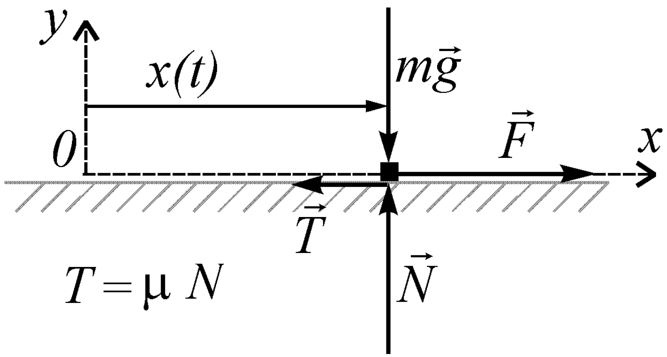
1)



2)

U primeru pravolinijskog vezanog kretanja (Sl.1), gde je osa *x* usvojena u pravcu kretanja projekcija drugog Njutnovog zakona na *x* osu dala bi diferencijalnu jednačinu kretanja, čijim bi se rešavanjem odredilo kretanje $x(t)$, dok bi njegova projekcija na *y* osu dala algebarsku jednačinu iz koje se može odrediti reakcija veze. Slično tome, u primeru kružnog vezanog kretanja (Sl.2), projekcija drugog Njutnovog zakona na pravac tangente dao bi diferencijalnu jednačinu kretanja, čijim bi se rešavanjem odredilo kretanje $s(t)$, dok bi njegova projekcija na pravac normale dala algebarsku jednačinu iz koje se može odrediti reakcija veze.

Primer 4.2 Neka se materijalna tačka mase m kreće u desnu stranu po horizontalnoj hrapavoj podlozi pod dejstvom horizintalne, desno usmerene, sile $\vec{F}$, intenziteta $F = b \cdot t + c \cdot t^2$ gde su b i c poznate pozitivne konstante. Koeficijent dinamičkog trenja klizanja je μ. Kretanje se, kao na slici 1 (prethodni slajd), odvija duž *x* ose. Tačka je započela kretanje iz koordidatnog početka bez početne brzine Odrediti: reakciju podloge u pravcu normale, diferencijalnu jednačunu kretanja, zakon brzine $\dot{x}(t)$ i zakon puta $x(t)$.



Početni uslovi:
$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0.$

Na slici je prikazan sistem sila koji dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju.

Drugi Njutnov zakon: $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$

Njegova projekcija na osu *y*:

$0 = -mg + N \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad \Rightarrow \quad T = \mu mg.$

Njegova projekcija na osu *x* daje diferencijalnu jednačinu kretanja: $m\ddot{x} = -\mu mg + bt + ct^2.$

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -\mu mg + bt + ct^2 \Rightarrow m\int d\dot{x} = \int\left(-\mu mg + bt + ct^2\right)dt$$

$$\Rightarrow m\,\dot{x} = -\mu mg\,t + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3} + C_1.$$

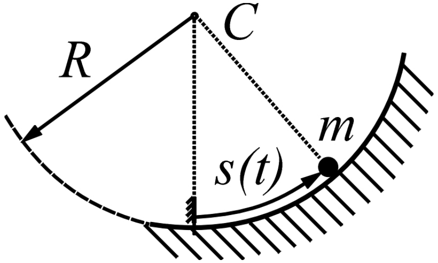
Konstanta $C_1 = 0$, zbog $\dot{x}(0) = 0.$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\mu g\, t + \frac{b}{m}\frac{t^2}{2} + \frac{c}{m}\frac{t^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int dx = \int\left(-\mu g\, t + \frac{b}{m}\frac{t^2}{2} + \frac{c}{m}\frac{t^3}{3}\right)dt \quad \Rightarrow \quad x = -\mu g\frac{t^2}{2} + \frac{b}{m}\frac{t^3}{6} + \frac{c}{m}\frac{t^4}{12} + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $x(0) = 0$. $\Rightarrow x(t) = -\mu g\frac{t^2}{2} + \frac{b}{m}\frac{t^3}{6} + \frac{c}{m}\frac{t^4}{12}.$

Primer 4.3 Neka se materijalna tačka mase m kreće po glatkoj cilindričnoj povr-šini poluprečnika R, kao na slici, u homogenom polju sile Zemljine teže. Tačka je započela kretanje iz najnižeg položaja sa početnom brzinom intenziteta Uvesti ugaonu koordinatu φ za koju važi $\varphi = s/R$



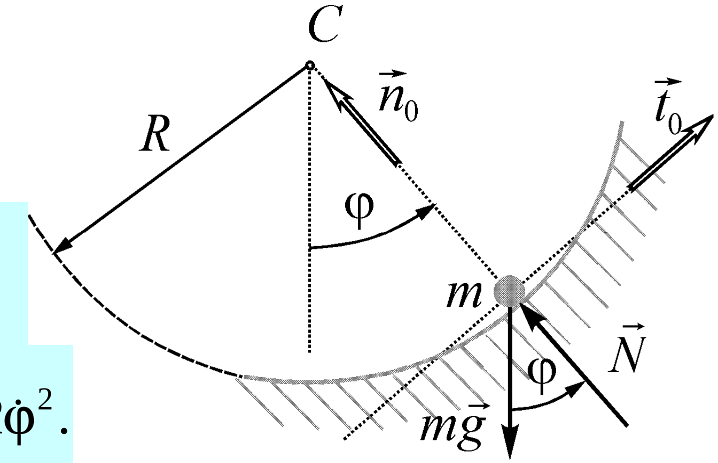
i na osnovu drugog Njutnovog zakona odrediti:

-diferencijlnu jednačinu kretanja po φ,

-zavisnost $\dot{\varphi}(\varphi)$, a samim tim i $V(\varphi)$.

-reakciju veze u funkciji ugla φ.

Na slici prikazan je sistem sila koji dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju. Ovde je:

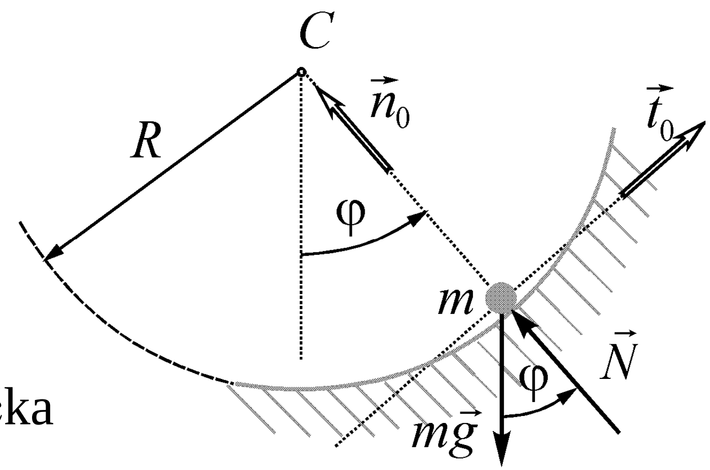


$V = \dot{s} = R\dot{\varphi},$ $a_T = \ddot{s} = R\ddot{\varphi},$ $a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R} = R\dot{\varphi}^2.$

Drugi Njutnov zakon daje $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$.

Njegova projekcija na pravac tangente daje sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja

$$mR\dot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{g}{R}\sin\varphi.$$



Jedan početni uslov, dobijen iz činjenice da je tačka započela kretanje iz najnižeg položaja, je

$$s(0) = R\cdot\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = 0.$$

Drugi početni uslov, dobijen iz činjenice da je tačka započela kretanje početnom brzinom V_0 , je $\dot{s}(0) = R\cdot\dot{\varphi}(0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(0) = V_0/R.$

Za dobijanje zavisnosti $\dot{\varphi}(\varphi)$, a zatim i $V(\varphi)$, treba prvo levu stranu diferencijalne jednačine transformisati na oblik $\dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dot{\varphi},$

čime, nakon razdvajanja promenljivih, diferencijalna jednačina postaje

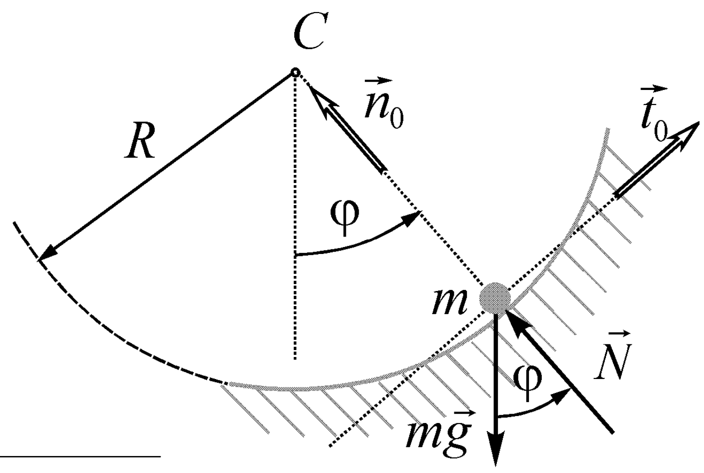
$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{g}{R}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Sledi integracija, s obzirom da je $\dot{\varphi} = \dfrac{V_0}{R}$ za $\varphi = 0$:

$$\int \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{g}{R}\int \sin\varphi \, d\varphi$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{R}\cos\varphi + C$$

$$\frac{1}{2}\frac{V_0^{\ 2}}{R^2} = \frac{g}{R}\cos 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{V_0^{\ 2}}{2R^2} - \frac{g}{R}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{R}\cos\varphi + \frac{V_0^{\ 2}}{2R^2} - \frac{g}{R}, \ \dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{V_0^{\ 2}}{R^2} - \frac{2g}{R}(1-\cos\varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad V(\varphi) = R\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{V_0^{\ 2} - 2gR(1-\cos\varphi)}.$$

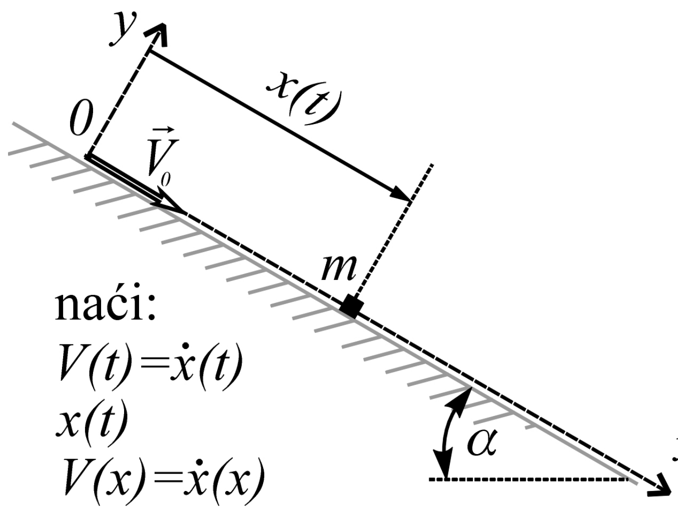
Projekcija drugog Njutnovog zakona na pravac normale daje sledeću jednačinu

$$mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi,$$

na osnovu koje se dalje dobija reakcija veze N u funkciji ugla φ

$$N = 3mg\cos\varphi + \frac{mV_0^{\ 2}}{R} - 2mg.$$

Primer 4.4 Neka se materijalna tačka mase m kreće niz glatku strmu ravan nagibnog ugla α pod dejstvom sile Zemljine teže. Tačka je započela kretanje iz koordidatnog početka sa početnom brzinom intenziteta V_0. Odrediti: zakon brzine $\dot{x}(t)$, zakon puta $x(t)$ i zavisnost brzine od puta $\dot{x}(x)$.

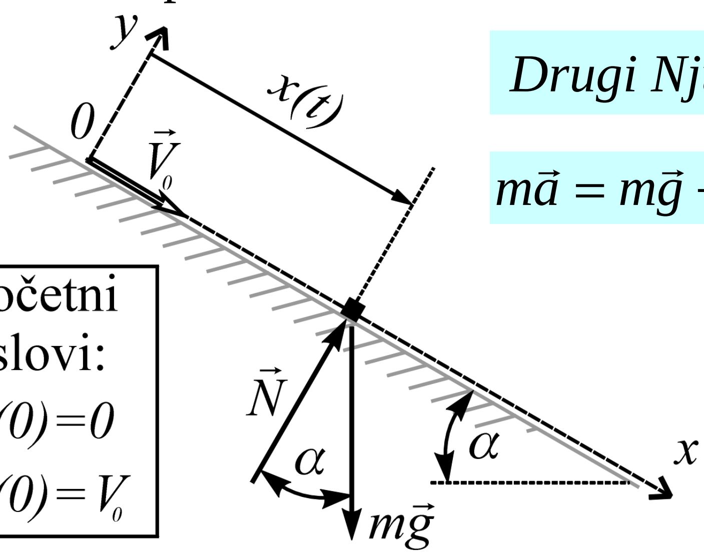


naći:

$V(t)=\dot{x}(t)$

$x(t)$

$V(x)=\dot{x}(x)$



početni uslovi:

$x(0)=0$

$\dot{x}(0)=V_0$

Drugi Njutnov zakon za kretanje materijalne tačke:

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$ Njegova projekcija na osu y, s obzirom da nema ubrzanja u pravcu ose y, daje

$$0 = -mg\cos\alpha + N \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

Njegova projekcija na osu x daje sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = g\sin\alpha.$$

Početni uslov $x(0)=0$ dobijen je iz činjenice da je tačka započela kretanje iz koordinatnog početka.

Početni uslov $\dot{x}(0)=V_0$ dobijen je iz činjenice da je tačka započela kretanje početnom brzinom V_0 .

Prva i druga integracija diferencijalne jednačine kretanja, s obzirom na početne uslove, daće zakon brzine $\dot{x}(t)$ i zakon puta $x(t)$:

$$d\dot{x} = g\sin\alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \int d\dot{x} = g\sin\alpha \int dt \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = g\sin\alpha\, t + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_0$, zbog $\dot{x}(0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = g\sin\alpha\, t + V_0$

$$dx = (g\sin\alpha\, t + V_0)dt \;\Rightarrow\; \int dx = \int (g\sin\alpha\, t + V_0)dt \quad \Rightarrow \quad x = g\sin\alpha \frac{t^2}{2} + V_0 t + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = g\sin\alpha \dfrac{t^2}{2} + V_0 t$

Zavisnost brzine od puta $\dot{x}(x)$ može biti dobijena na dva načina.

Jedan je eliminacija vremena *t* iz dobijenih zakona $\dot{x}(t)$ i $x(t)$.

$$\dot{x}(t) = g\sin\alpha\, t + V_0 \Rightarrow \quad t = \frac{\dot{x} - V_0}{g\sin\alpha}$$

$$x = \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{\dot{x} - V_0}{g\sin\alpha}\right)^2 + V_0 \frac{\dot{x} - V_0}{g\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\dot{x}^2 - V_0^{\,2}}{2g\sin\alpha}, \quad \dot{x} = \sqrt{V_0^{\,2} + 2g\sin\alpha \cdot x}$$

Prema drugom, treba prvo levu stranu diferencijalne jednačine transformisati na oblik

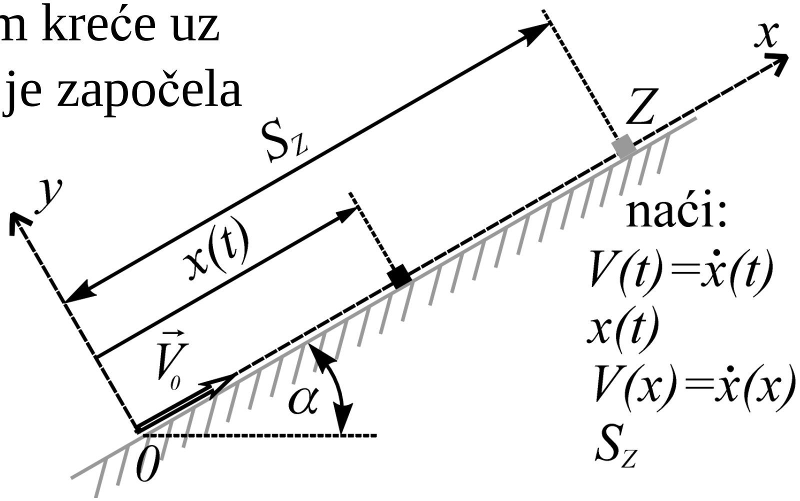
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} \qquad \Rightarrow \dot{x}d\dot{x} = g\sin\alpha dx \Rightarrow$$

$$\int \dot{x}d\dot{x} = g\sin\alpha \int dx \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = g\sin\alpha\; x + C$$

$C = V_0^{\,2}/2$ jer je $\dot{x} = V_0$ za $x = 0$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = g\sin\alpha\; x + \frac{V_0^{\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(x)$$

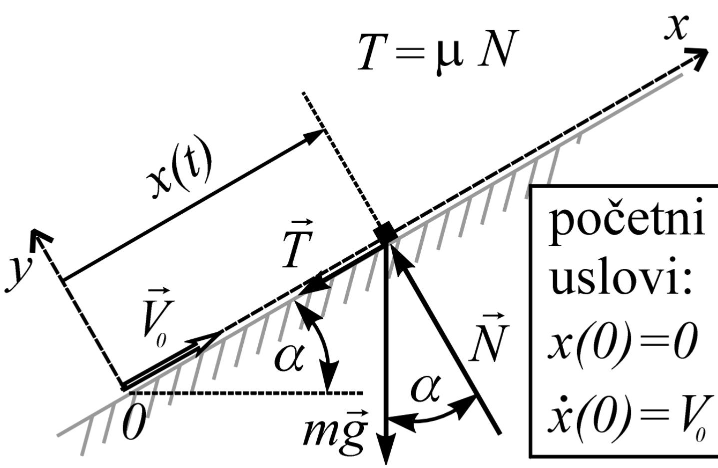
Primer 4.5 Neka se materijalna tačka mase m kreće uz hrapavu strmu ravan nagibnog ugla α.Tačka je započela kretanje iz koordidatnog početka sa početnom brzinom intenziteta V_0. Koeficijent dinamičkog trenja klizanja je μ. Odrediti: zakon brzine $\dot{x}(t)$, zakon puta $x(t)$, zavisnost brzine od puta $\dot{x}(x)$ i zaustavni put S_Z.



naći:
$V(t)=\dot{x}(t)$
$x(t)$
$V(x)=\dot{x}(x)$
S_Z

Drugi Njutnov zakon za kretanje materijalne tačke:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$



početni uslovi:
$x(0)=0$
$\dot{x}(0)=V_0$

Njegova projekcija na osu *y*, s obzirom da nema ubrzanja u pravcu ose *y*, daje

$$0 = -mg\cos\alpha + N \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad T = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Njegova projekcija na osu *x* daje sledeću diferencijalnu jednačinu kretanja

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -B,$$

gde je $B = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ poznata konstanta.

Početni uslov $x(0)=0$ dobijen je iz činjenice da je tačka započela kretanje iz koordinatnog početka.

Početni uslov $\dot{x}(0)=V_0$ dobijen je iz činjenice da je tačka započela kretanje početnom brzinom V_0 .

Prva i druga integracija diferencijalne jednačine kretanja, s obzirom na početne uslove, daće zakon brzine $\dot{x}(t)$ i zakon puta $x(t)$:

$$d\dot{x}=-Bdt \quad \Rightarrow \quad \int d\dot{x}=-B\int dt \quad \Rightarrow \quad \dot{x}=-Bt+C_1 \qquad \dot{x}(t)=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)t+V_o$$

Konstanta $C_1=V_0$, zbog $\dot{x}(0)=V_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t)=-Bt+V_0$

$$\Rightarrow dx=(-Bt+V_0)dt \;\Rightarrow\; \int dx=\int(-Bt+V_0)dt \;\Rightarrow\; x=-B\frac{t^2}{2}+V_0t+C_2$$

Konstanta $C_2=0$, zbog $x(0)=0 \quad \Rightarrow \quad x(t)=-B\frac{t^2}{2}+V_0t$

Zavisnost brzine od puta $\dot{x}(x)$ odredimo na način što ćemo prvo levu stranu diferencijalne jednačine transformisati, pa razdvojiti promenljive

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}d\dot{x}=-Bdx,$$

i nakon toga integraljenjem dobiti rešenje: $\int \dot{x}d\dot{x}=-B\int dx \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}=-Bx+C$

$C=V_0{}^2/2$ jer je $\dot{x}=V_0$ za $x=0$ $\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}=-Bx+\frac{V_0{}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}=\sqrt{V_0{}^2-2Bx}.$

Zaustavni put jednak je x koordinati kada je brzina $\dot{x}$ jednaka nuli. Pošto je

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -Bx + \frac{V_0^{\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{0^2}{2} = -B \cdot S_z + \frac{V_0^{\,2}}{2},$$

zaustavni put će biti $S_z = \dfrac{V_0^{\,2}}{2B} = \dfrac{V_0^{\,2}}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

Drugi zadatak dinamike tačke. Integracija diferencijalnih jednačina kretanja za slobodno kretanje materijalne tačke.

U ovakvom slučaju drugog zadatka dinamike tačke, sile koje dejstvuju na tačku su poznate a kretanje se određuje na osnovu projekcija drugog Njutnovog zakona. Obe njegove projekcije (i na *x*, i na *y*, osu) su diferencijalne jednačine kretanja. Da bi se dobile jednačine kretanja, svaka od diferencijalnih jednačina kretanja se po dva puta integrali, a četiri integracione konstante se određuju iz početnih uslova. Početni uslovi se tiču početnog položaja i početne brzine, tj. sledećih veličina: $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$.

Primer 4.6 Neka na materijalnu tačku mase $m = 2\ kg$, koja se kreće u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže, osim sile težine $m\vec{g}$, dejstvuje i zadata sila $\vec{F}(t) = 12t\,\vec{i} - 2\sin t\,\vec{j}$.

Tačka je započela kretanje iz tačke $A(1,2)$ sa početnom brzinom $\vec{V}(0) = 3\,\vec{i} + 1\,\vec{j}$.

Odrediti projekcije brzine u funkciji vremena $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, kao i jednačine kretanja $x(t)$ i $y(t)$?

Početni uslovi:

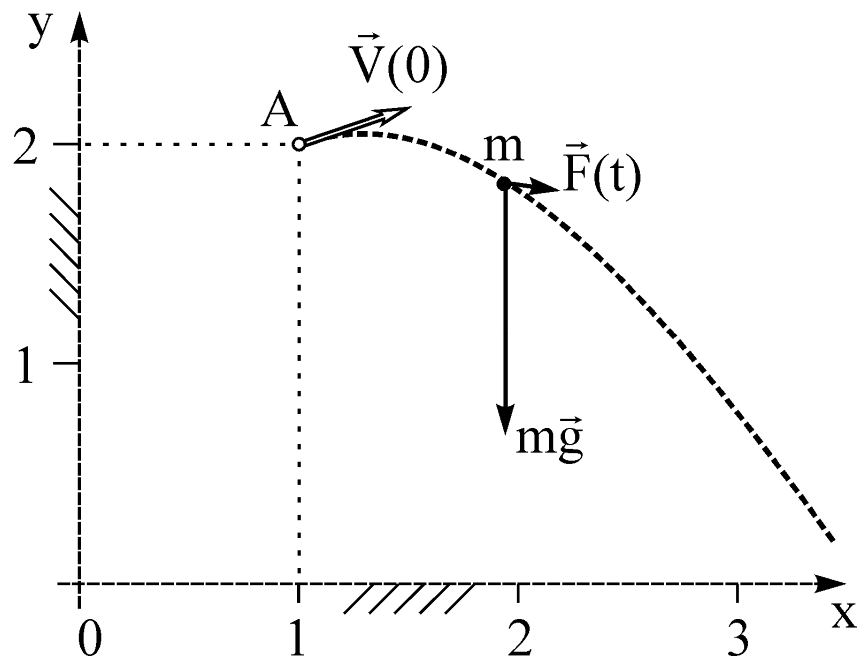
$A(1,2) \Rightarrow x(0)=1,\ y(0)=2.$

$\vec{V}(0)=3\,\vec{i}+1\,\vec{j} \Rightarrow \dot{x}(0)=3,\ \dot{y}(0)=1.$

Drugi Njutnov zakon:

$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{F} \Rightarrow$

$2(\ddot{x}\,\vec{i}+\ddot{y}\,\vec{j})=-2g\,\vec{j}+12t\,\vec{i}-2\sin t\,\vec{j}$



Projekcije drugog Njutnovog zakona i integracije:

Projekcija na x osu:

$$\ddot{x}=6t \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt}=6t \Rightarrow d\dot{x}=6tdt \Rightarrow \int d\dot{x}=6\int tdt \Rightarrow \dot{x}=3t^2+C_1$$

Konstanta $C_1=3$, zbog $\dot{x}(0)=3$ $\Rightarrow \quad \dot{x}(t)=3t^2+3$

$$\Rightarrow \quad dx=(3t^2+3)dt \quad \Rightarrow \quad \int dx=\int(3t^2+3)dt \quad \Rightarrow \quad x=t^3+3t+C_2$$

Konstanta $C_2=1$, zbog $x(0)=1$ $\Rightarrow \quad x(t)=t^3+3t+1$

Projekcija na y osu:

$$\ddot{y} = -g - \sin t \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -g - \sin t \Rightarrow d\dot{y} = (-g - \sin t)dt \Rightarrow \int d\dot{y} = \int(-g - \sin t)dt$$

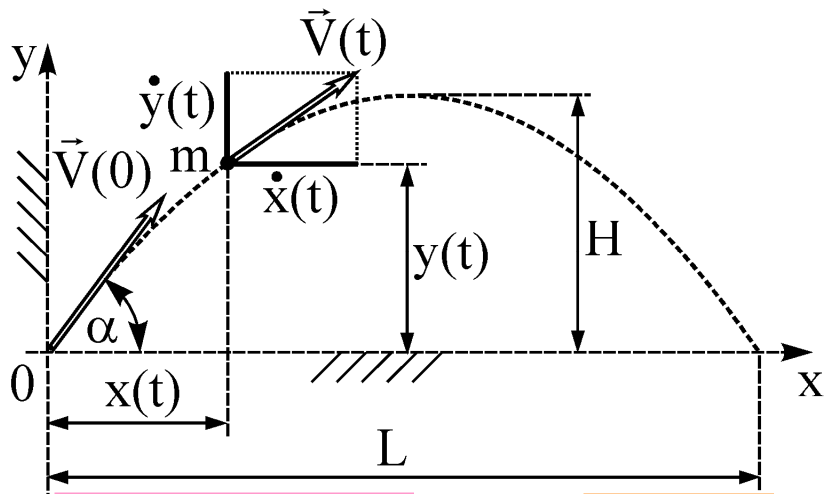
$\Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + \cos t + C_3.$ Konstanta $C_3 = 0$, zbog $\dot{y}(0) = 1$ $\Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + \cos t.$

$$\Rightarrow dy = (-gt + \cos t)dt \Rightarrow \int dy = \int(-gt + \cos t)dt \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + \sin t + C_4$$

Konstanta $C_4 = 2$, zbog $y(0) = 2$ $\Rightarrow \quad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + \sin t + 2.$

Kosi hitac u bezvazdušnom prostoru.

Materijalna tačka mase m započela je kretanje iz koordinatnog početka sa početnom brzinom čiji intenzitet iznosi V_0 a čiji vektor $\vec{V}(0)$ sa horozontalnom x osom gradi ugao α. Tačka se kreće u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže a sila otpora vazduha se zanemaruje. Odrediti: projekcije brzine u funkciji vremena $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, jednačine kretanja $x(t)$ i $y(t)$, domet L i maksimalnu visinu H koju tačka dostiže?

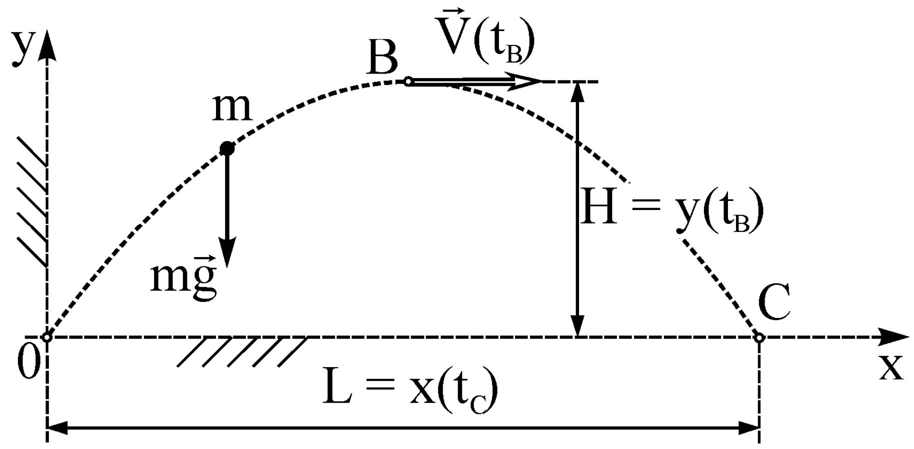


Početni uslovi: $x(0) = 0,$

zbog početnog položaja $y(0) = 0,$

zbog početne brzine $\dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha,$ $\dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha.$

Jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju je $m\vec{g}$.



Projekcije drugog Njutnovog zakona i integracije:

Projekcija na y osu: $m\ddot{y} = -mg \quad \Rightarrow$

$$\ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -g \quad \Rightarrow \quad d\dot{y} = -gdt \quad \Rightarrow \quad \int d\dot{y} = -g\int dt \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + C_1$$

Konstanta $C_1 = V_0 \sin\alpha$, zbog $\dot{y}(0) = V_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = -gt + V_0 \sin\alpha \quad \Rightarrow$

$$dy = (-gt + V_0 \sin\alpha)dt \Rightarrow \int dy = \int(-gt + V_0 \sin\alpha)dt \Rightarrow y = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \sin\alpha \cdot t + C_2$$

Konstanta $C_2 = 0$, zbog $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_0 \sin\alpha \cdot t$

Projekcija na x osu: $m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = C_3$

Konstanta $C_3 = V_0 \cos\alpha$, zbog $\dot{x}(0) = V_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = V_0 \cos\alpha$

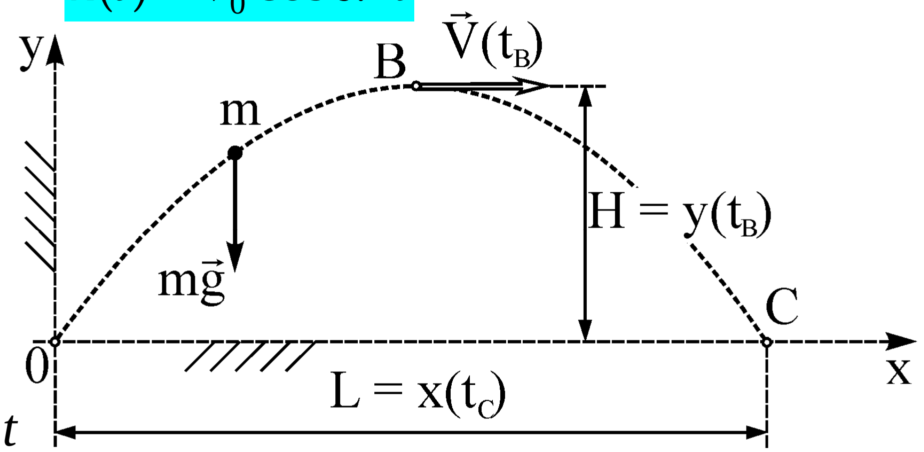
$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha \;\Rightarrow\; dx = V_0 \cos\alpha \cdot dt \;\Rightarrow\; \int dx = V_0 \cos\alpha \int dt \;\Rightarrow\; x = V_0 \cos\alpha \cdot t + C_4$$

Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t$

Određivanje dometa L:

Kada se hitac završi $t = t_C \;\Rightarrow$

$$L = x(t_C) = V_0 \cos\alpha \cdot t_C$$



Trenutak vremena t_C određuje se iz uslova da je $y(t_C) = 0$. Na osnovu ovog uslova i $y(t) = -gt^2/2 + V_0 \sin\alpha \cdot t$ dobija se sledeća nepotpuna kvadratna jednačina po t_C :

$$0 = -g\frac{t_C^2}{2} + V_0 \sin\alpha \cdot t_C \;\Rightarrow\; 0 = \left(-g\frac{t_C}{2} + V_0 \sin\alpha\right) \cdot t_C \;\Rightarrow\; t_C = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow L = V_0 \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Određivanje maksimalne visine H:

$$H = y(t_B) = -g\frac{t_B^2}{2} + V_0 \sin\alpha \cdot t_B$$

Zbog $\dot{y}(t_B) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = -gt_B + V_0 \sin\alpha \;\Rightarrow\; t_B = \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$

Konačno je $H = \dfrac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

Primer 4.7 Na osnovu izraza za visinu $H = V_0^{\,2} \sin^2 \alpha / (2g)$ odrediti za koji ugao α će pri kosom hicu visina *H* biti najveća i koliko ona iznosi?

Veličina H je najveća za $\alpha = 90^0$ *i iznosi* $H = V_0^{\,2} / (2g)$, *jer za* $\alpha = 90^0$, $\sin^2 \alpha$ *ima svoju najveću vrednost koja iznosi 1.*

Primer 4.8 Na osnovu izraza za domet $L = V_0^{\,2} \sin 2\alpha / g$, odrediti za koji ugao α je, pri kosom hicu, domet *L* najveći i koliko on iznosi?

Veličina L je najveća za $\alpha = 45^0$ *i iznosi* $L = V_0^{\,2} / g$, *jer za* $\alpha = 45^0$, $\sin 2\alpha$ *ima svoju najveću vrednost koja iznosi 1.*

Primer 4.9 Na osnovu izraza za domet $L = V_0^{\,2} \sin 2\alpha / g$ dokazati da je domet za ugao $\alpha = 45^o + \varphi$ isti kao i za ugao $\alpha = 45^o - \varphi$. Takođe naći izraze za maksimalne visine *H* u oba slučaja?

Domet za ugao $\alpha = 45^o + \varphi$ *iznosi*

$$L = \frac{V_0^{\,2}}{g} \sin 2\alpha = \frac{V_0^{\,2}}{g} \sin\left(90^o + 2\varphi\right) =$$

$$= \frac{V_0^{\,2}}{g}\left(\sin 90^o \cos 2\varphi + \cos 90^o \sin 2\varphi\right) = \frac{V_0^{\,2}}{g} \cos 2\varphi,$$

i isti je kao i domet za $\alpha = 45^o - \varphi$:

$$L = \frac{V_0^{\,2}}{g} \sin 2\alpha = \frac{V_0^{\,2}}{g} \sin\left(90^o - 2\varphi\right) =$$

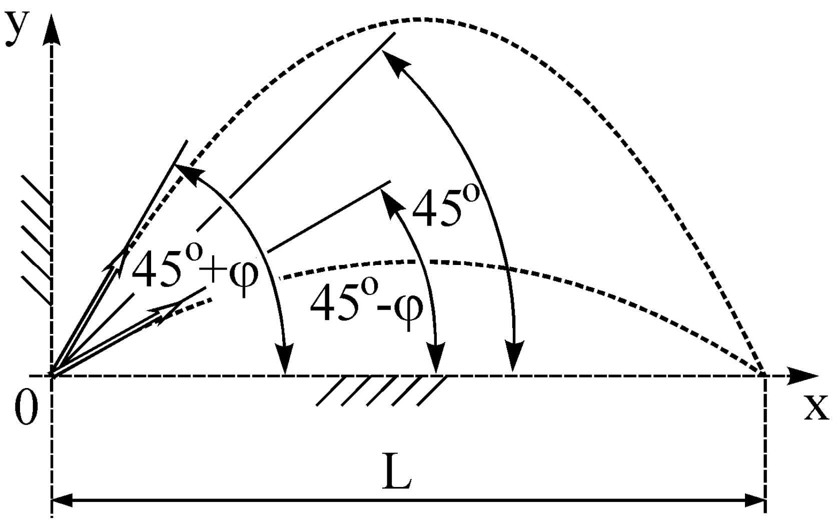
$$= \frac{V_0^{\,2}}{g}\left(\sin 90^o \cos 2\varphi - \cos 90^o \sin 2\varphi\right) = \frac{V_0^{\,2}}{g} \cos 2\varphi.$$

Maksimalna visina H $\left(H = V_0^{\,2}\sin^2\alpha/(2g)\right)$, *za ugao* $\alpha = 45^o + \varphi$ *iznosi*

$$H = \frac{V_0^{\,2}}{4g}(1+\sin 2\varphi),$$

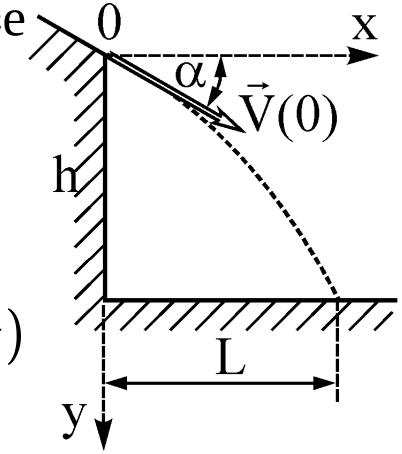
dok je za $\alpha = 45^o - \varphi$,

$$H = \frac{V_0^{\,2}}{4g}(1-\sin 2\varphi), \quad \textit{pošto je}$$

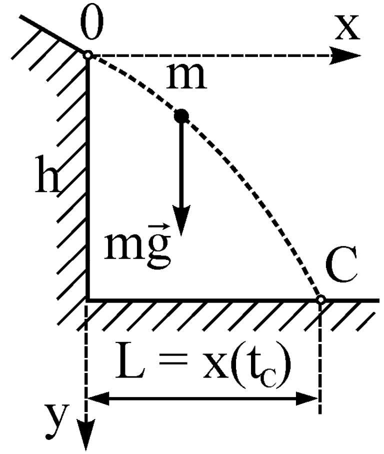


$$\sin^2\left(45^0 \pm \varphi\right) = \frac{1-\cos 2\left(45^0 \pm \varphi\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(90^0 \pm 2\varphi\right)}{2} = \frac{1-(\mp\sin 2\varphi)}{2} = \frac{1\pm\sin 2\varphi}{2}.$$

Primer 4.10 Materijalna tačka mase m započela je kretanje iz tačke *O* sa početnom brzinom čiji intenzitet iznosi V_0 a čiji vektor $\vec{V}(0)$ sa horozontalnom *x* osom gradi ugao α (Sl.1). Tačka se kreće u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže a sila otpora vazduha se zanemaruje. Za zadat koordinatni sistem odrediti: projekcije brzine u funkciji vremena $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, jednačine kretanja $x(t)$ i $y(t)$ i domet L? Konstantne veličine: m, h, α, g i V_0 smatrati poznatim.



1)



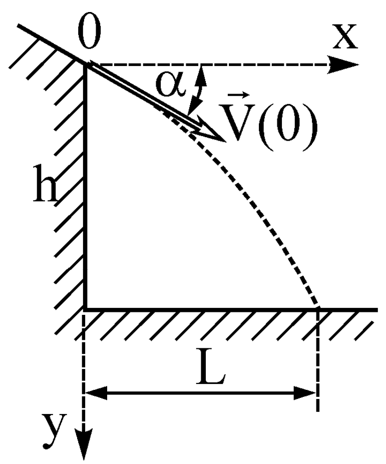
2)

Jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju je $m\vec{g}$ (Sl.2).

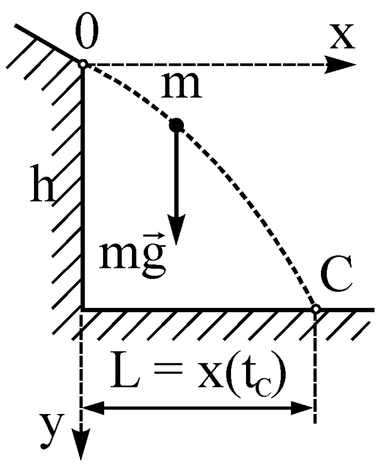
Početni uslovi:

zbog početnog položaja $x(0)=0,$ $y(0)=0,$

zbog početne brzine $\dot{x}(0)=V_0\cos\alpha,$ $\dot{y}(0)=V_0\sin\alpha.$



1)



2)

Drugi Njutnov zakon:

$m\vec{a}=m\vec{g}$

Projekcije drugog Njutnovog zakona i integracije:

Projekcija na y osu: $m\ddot{y}=mg \quad\Rightarrow$

$$\ddot{y}=g \quad\Rightarrow\quad \frac{d\dot{y}}{dt}=g \quad\Rightarrow\quad d\dot{y}=gdt \quad\Rightarrow\quad \int d\dot{y}=g\int dt \quad\Rightarrow\quad \dot{y}=gt+C_1$$

Konstanta $C_1=V_0\sin\alpha$, zbog $\dot{y}(0)=V_0\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \dot{y}(t)=gt+V_0\sin\alpha \quad\Rightarrow$

$$dy=(gt+V_0\sin\alpha)dt \;\Rightarrow\; \int dy=\int(gt+V_0\sin\alpha)dt \;\Rightarrow\; y=g\frac{t^2}{2}+V_0\sin\alpha\cdot t+C_2$$

Konstanta $C_2=0$, zbog $y(0)=0 \;\Rightarrow\; y(t)=g\frac{t^2}{2}+V_0\sin\alpha\cdot t$

Projekcija na x osu: $m\ddot{x}=0 \;\Rightarrow\; \ddot{x}=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{d\dot{x}}{dt}=0 \;\Rightarrow\; \dot{x}=C_3$

Konstanta $C_3=V_0\cos\alpha$, zbog $\dot{x}(0)=V_0\cos\alpha \;\Rightarrow\; \dot{x}=V_0\cos\alpha$

$$\frac{dx}{dt}=V_0\cos\alpha \;\Rightarrow\; dx=V_0\cos\alpha\cdot dt \;\Rightarrow\; \int dx=V_0\cos\alpha\int dt \;\Rightarrow\; x=V_0\cos\alpha\cdot t+C_4$$

Konstanta $C_4=0$, zbog $x(0)=0 \;\Rightarrow\; x(t)=V_0\cos\alpha\cdot t$

Određivanje dometa L:

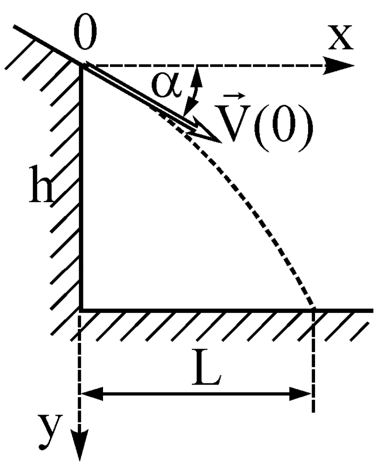
Kada se hitac završi $t=t_C \;\Rightarrow\; L=x(t_C)=V_0\cos\alpha\cdot t_C$

Trenutak vremena t_C određuje se iz uslova da je $y(t_C)=h$. Na osnovu ovog uslova i $y(t)=gt^2/2+V_0\sin\alpha\cdot t$ dobija se sledeća kvadratna jednačina po t_C:

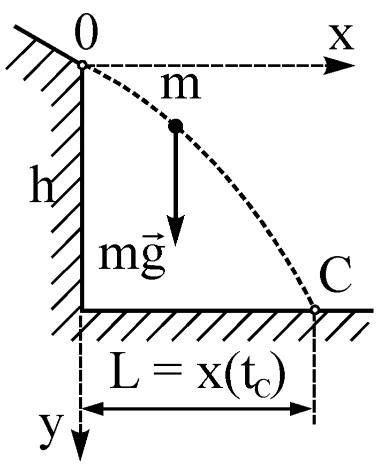
$$g\frac{t_C^{\;2}}{2}+V_0\sin\alpha\cdot t_C-h=0 \;\Rightarrow$$

$$t_C=\frac{-V_0\sin\alpha+\sqrt{V_0^{\;2}\sin^2\alpha+2gh}}{g} \;\Rightarrow$$

$$L=V_0\cos\alpha\frac{\sqrt{V_0^{\;2}\sin^2\alpha+2gh}-V_0\sin\alpha}{g}$$

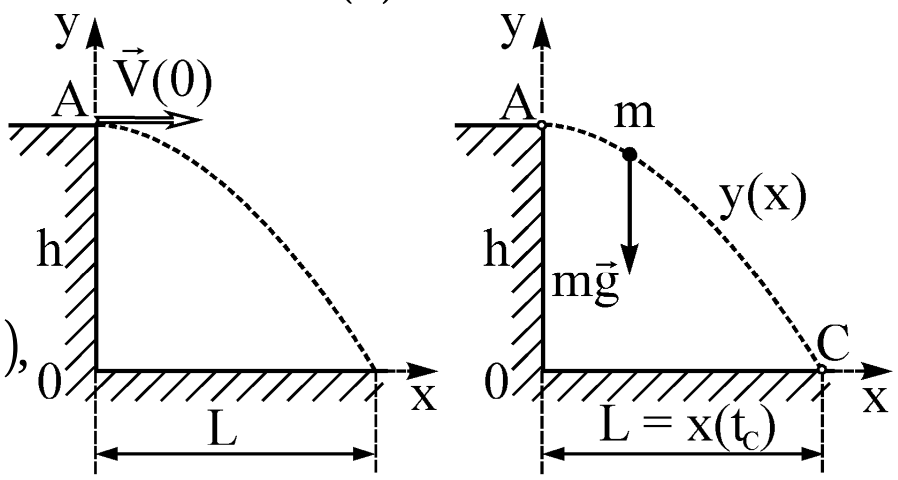


1)



2)

Primer 4.11 Materijalna tačka mase m započela je kretanje iz tačke O sa početnom brzinom čiji intenzitet iznosi V_0 a čiji je vektor $\vec{V}(0)$ horozontalan (Sl.1). Ovakav hitac nosi naziv „horizontalni hitac“. Tačka se kreće u vertikalnoj ravni homogenog polja sile Zemljine teže a sila otpora vazduha se zanemaruje. Za zadat koordinatni sistem odrediti: projekcije brzine u funkciji vremena $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$, jednačine kretanja $x(t)$ i $y(t)$ i domet L? Konstantne veličine: m, h, α, g i V_0 smatrati poznatim.



1) 2)

Jedina sila koja dejstvuje na materijalnu tačku pri njenom kretanju je $m\vec{g}$ (Sl.2).

Početni uslovi:

zbog početnog položaja $x(0)=0,$ $y(0)=h,$

zbog početne brzine $\dot{x}(0)=V_0,$ $\dot{y}(0)=0.$

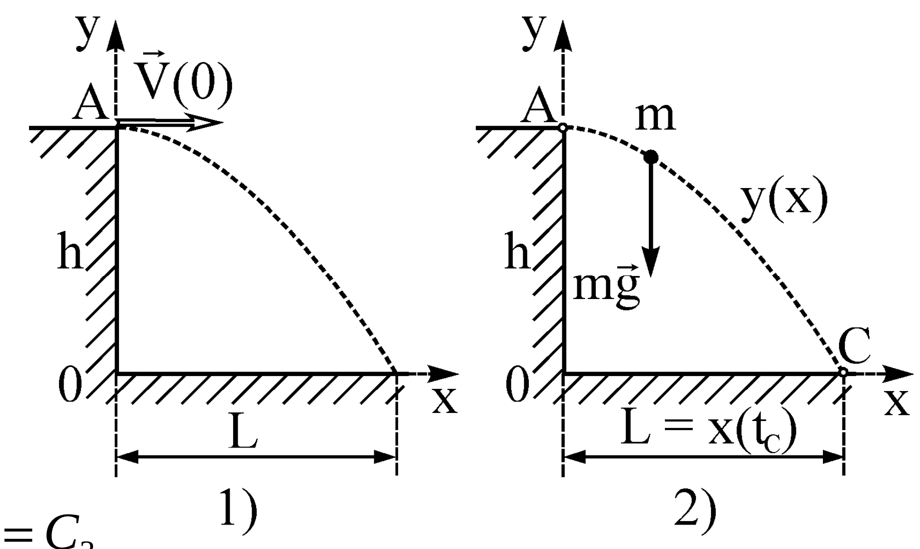
Drugi Njutnov zakon: $m\vec{a}=m\vec{g}$

Projekcije drugog Njutnovog zakona i integracije: *Projekcija na y osu:*

$$m\ddot{y}=-mg \Rightarrow \ddot{y}=-g \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt}=-g \Rightarrow d\dot{y}=-gdt \Rightarrow \int d\dot{y}=-g\int dt \Rightarrow \dot{y}=-gt+C_1$$

Konstanta $C_1=0$, zbog $\dot{y}(0)=0 \Rightarrow \dot{y}(t)=-gt \Rightarrow dy=-gt\,dt \Rightarrow$

$$\int dy = -g\int t\,dt \quad \Rightarrow \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_2$$



Konstanta $C_2 = h$, zbog $y(0) = h \quad \Rightarrow$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + h.$$

Projekcija na x osu:

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = C_3$$

Konstanta $C_3 = V_0$, zbog $\dot{x}(0) = V_0 \Rightarrow \quad \dot{x} = V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = V_0$

$$\Rightarrow \; dx = V_0 \cdot dt \; \Rightarrow \; \int dx = V_0 \int dt \; \Rightarrow \; x = V_0 \cdot t + C_4$$

Konstanta $C_4 = 0$, zbog $x(0) = 0 \quad \Rightarrow x(t) = V_0 \cdot t$

Određivanje dometa L:

Kada se hitac završi $t = t_C \;\Rightarrow\; L = x(t_C) = V_0 \cdot t_C$

Trenutak vremena t_C određuje se iz uslova da je $y(t_C) = 0$:

$$y(t_C) = -g\frac{t_C^{\,2}}{2} + h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_C = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$