

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

- formule i zadaci -

Sistemi linearnih jednačina

- Opšti oblik sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih:

$$(*) \quad \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Opšti oblik sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih:

$$(*) \quad \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Rešenje sistema $(*)$ je svaka uređena n -torka realnih brojeva (x_1, x_2, \dots, x_n) koja zadovoljava svaku jednačinu sistema.

Sistem (*) je:

Sistem (*) je:

- moguć (saglasan, rešiv) ako ima bar jedno rešenje, i to:
 - određen, ako ima jedinstveno rešenje
 - neodređen, ako ima beskonačno mnogo rešenja

Sistem (*) je:

- moguć (saglasan, rešiv) ako ima bar jedno rešenje, i to:
 - određen, ako ima jedinstveno rešenje
 - neodređen, ako ima beskonačno mnogo rešenja
- nemoguć (nesaglasan, nerešiv, kontradiktoran, protivrečan), ako nema rešenja

Sistem (*) je:

- moguć (saglasan, rešiv) ako ima bar jedno rešenje, i to:
 - određen, ako ima jedinstveno rešenje
 - neodređen, ako ima beskonačno mnogo rešenja
- nemoguć (nesaglasan, nerešiv, kontradiktoran, protivrečan), ako nema rešenja

Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako imaju isti skup rešenja.

Sistem (*) je:

- moguć (saglasan, rešiv) ako ima bar jedno rešenje, i to:
 - određen, ako ima jedinstveno rešenje
 - neodređen, ako ima beskonačno mnogo rešenja
- nemoguć (nesaglasan, nerešiv, kontradiktoran, protivrečan), ako nema rešenja

Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako imaju isti skup rešenja.

Transformacije koje očuvavaju ekvivalentnost sistema su:

- zamena mesta jednačina
- množenje jednačine brojem različitim od 0
- dodavanje jedne jednačine drugoj, prethodno pomnožene brojem različitim od 0

Zadaci (1)

Zadaci (1)

Zadatak 1. Rešiti sledeće sisteme:

$$\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ \text{(i)} \quad 3x - y + 2z = 7 . \\ -x - y + 2z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ \text{(ii)} \quad 3x - y + 2z = 7 . \\ 4x + y + z = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2y - z = 2 \\ \text{(iii)} \quad 3x - y + 2z = 7 . \\ 4x + y + z = 9 \end{array}$$

Zadaci (2)

Zadaci (2)

Zadatak 4. Rešiti sistem:

$$x + 2y + z + t = 0$$

$$2x + y + z + 2t = 0$$

$$x + 2y + 2z + t = 0$$

$$x + y + z + t = 0$$

Zadaci (2)

Zadatak 4. Rešiti sistem:

$$x + 2y + z + t = 0$$

$$2x + y + z + 2t = 0$$

$$x + 2y + 2z + t = 0$$

$$x + y + z + t = 0$$

Zadatak 6. Rešiti sistem:

$$5x + 2y - 3z = 0$$

$$3x - 4y + 5z = 10$$

$$7x - 3y + 6z = 19$$

Zadaci (2)

Zadatak 4. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}x + 2y + z + t &= 0 \\2x + y + z + 2t &= 0 \\x + 2y + 2z + t &= 0 \\x + y + z + t &= 0\end{aligned}$$

Zadatak 6. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}5x + 2y - 3z &= 0 \\3x - 4y + 5z &= 10 \\7x - 3y + 6z &= 19\end{aligned}$$

Zadatak 7. Rešiti sistem:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + z &= 3 \\y + z &= 0\end{aligned}$$

Zadaci (3)

Zadaci (3)

Zadatak 8. Rešiti sistem:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Zadaci (3)

Zadatak 8. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rclcl} 2x & - & y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 2 \end{array} .$$

Zadatak 10. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rclcl} & x & + & y & = & 2 \\ -2x & - & 3y & = & 2 \\ -2x & - & 2y & = & -3 \end{array} .$$

Zadaci (3)

Zadatak 8. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcl} 2x & - & y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 2 \end{array} .$$

Zadatak 10. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcl} & x & + & y & = & 2 \\ -2x & - & 3y & = & 2 \\ -2x & - & 2y & = & -3 \end{array} .$$

Zadatak 23. Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcl} 2x & - & 3y & + & 7z & = & -1 \\ 5x & + & 2y & - & 2z & = & -1 \end{array} .$$

Kramerovo pravilo (1)

Kramerovo pravilo (1)

Kramerovo pravilo može da se primeni samo na kvadratne sisteme (tj. kada je $m = n$) i sastoji se u tome da se izračunaju determinanta sistema

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i determinante promenljivih

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Kramerovo pravilo (2)

Kramerovo pravilo (2)

- Ako je $D_S \neq 0$ tada je sistem određen i rešenje je

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S} \right)$$

Kramerovo pravilo (2)

- Ako je $D_S \neq 0$ tada je sistem određen i rešenje je

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S} \right)$$

- Ako je $D_S = 0$ i bar jedna od determinanti $D_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ je različita od 0 sistem je nemoguć

Kramerovo pravilo (2)

- Ako je $D_S \neq 0$ tada je sistem određen i rešenje je

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_{x_1}}{D_S}, \frac{D_{x_2}}{D_S}, \dots, \frac{D_{x_n}}{D_S} \right)$$

- Ako je $D_S = 0$ i bar jedna od determinanti $D_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n$ je različita od 0 sistem je nemoguć
- Ako je $D_S = D_{x_1} = D_{x_2} = \dots = D_{x_n} = 0$ sistem je ili neodređen ili nemoguć što proveravamo Gausovom metodom eliminacije

Zadaci (4)

Zadaci (4)

Zadatak 56. Za koje vrednosti parametra a je sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\ax + 4y + z &= 5 \\6x + (a + 2)y + 2z &= 13\end{aligned}$$

određen?

Zadaci (4)

Zadatak 56. Za koje vrednosti parametra a je sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\ax + 4y + z &= 5 \\6x + (a + 2)y + 2z &= 13\end{aligned}$$

određen?

Zadatak 10. Za koje vrednosti parametra a je sistem

$$\begin{aligned}-ax + ay + 2z &= a + 2 \\x + 2y - z &= 2 \\x + (a + 2)y + (a + 1)z &= 4\end{aligned}$$

protivrečan?