B=belančevina M=masti U=ugljenih hidrata

	S1	S2	S3	S4	B	M	U
soja	10%	30%	50%	70%	34,1%	17,7%	33,5%
kukuruz	70%	70%	40%	30%	12%	3%	65%

Koliko treba uzeti stočne hrane S1, S2, S3 i S4 za novu smešu tako da smeša sadrži 25% belančevina, 8% masti i 45% ugljenih hidrata?

Sistem linearnih jednačina je :

1. **protivurečan=kontradiktoran=nemoguć**
   akko ne postoji rešenje

2. **saglasan=neprotivurečan=moguć** akko postoji rešenje :
   (a) **određen** akko postoji tačno jedno rešenje
   (b) **neodređen** akko postoji više rešenja .

Sistemi linearnih jednačina = S.l.j.

$$S_{mn} \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \; + a_{12}x_2 \; + a_{13}x_3 \; + \; ... \; + \; a_{1n}x_n \; = b_1 \\ a_{21}x_1 \; + a_{22}x_2 \; + a_{23}x_3 \; + \; ... \; + \; a_{2n}x_n \; = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \; ... \; + a_{mn}x_n = b_m \end{array}} \right. ,$$

- a_{ij} = koeficijenti sistema b_i = slobodni koeficijenti
- x_j= nepoznate
- i, j= indeksi $i = 1, ...m, \quad j = 1, ...n$
- n= broj nepoznatih $\qquad m$= broj jednačina
- $m = n$ kvadratni s.l.j. ; $\quad m \neq n$ pravougaoni s.l.j.
- $b_i = 0$ homogen s.l.j.

S.l.j. – matrični zapis

$$\boxed{A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=B_{m\times 1}}$$

- $A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=$ matrica sistema sadrži koeficijente sistema

- $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ matrica: $\longleftarrow$ nepoznatih

  slobodnih koef. $\longrightarrow$ $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$

Primer

- standardni zapis
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

- matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- kvadratni određen nehomogeni sistem u trougaonom obliku
- rešenje (. ,. , 2,2)računamo od 4. ka 1. jednačini

Proširena matica sistema

- $\overline{A}_{m\times(n+1)} = [A|B]$=proširena matrica sistema
- $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$
- $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ za $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$

Gausov metod eliminacije = GME

- **elementarne transformacije nad vrstama ne menjaju skup rešenja s.l.j.**
- opšti i najbrži metod za rešavanje s.l.j.
- ulaz: $\overline{A}$ izlaz: gornja trougaona matrica $\overline{B}$
- koraci algoritma
  1. zameniti 1. vrstu sa vrstom čiji je prvi elemenat $\neq 0$ (ako je potrebno)
  2. u 1. koloni ispod 1. pozicije napraviti sve 0 (elementarnim transformacijama)
  3. ponoviti 1. i 2. korak na matrici bez 1. vrste i 1. kolone
- ako se u toku rada pojavi vrsta sa svim nulama sem u poslednjoj koloni s.l.j. je nemoguć
- inače, rešenje(a) računamo od poslednje ka 1. jednačini $\overline{B}$

GME – primeri

S_{34}

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9$$

S_{54}

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9$$
$$3x_1 + 3x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 3$$

S_{44}

$$x_1 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9$$
$$6x_3 + x_4 = 9$$

$$\overline{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \overline{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} / -2 / -3 / -1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \overline{A_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A_1'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \overline{A_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ / -2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \overline{A_3'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A_1''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overline{A_2''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overline{A_3''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}_1 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \overline{B}_2 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overline{B}_3 : \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}x_4,\ 1,\ \frac{7}{6} - \frac{1}{6}x_4,\ x_4)$ $\qquad$ (1,1,1,1) $\qquad$ nema rešenja

stepeni slobode, linearno zavisne jednačine

Rešavanje kvadratnih s.l.j.

$$\boxed{A_n \cdot X_{n\times 1} = B_{n\times 1}}$$

Ako je matrica sistema A **regularna**, tj. $|A| \neq 0$,
onda se **jedinstveno rešenje** dobija na 1. ili 2. način:

1. (**pomoću inverzne matrice**)

$$\boxed{X \;=\; A^{-1} \cdot B}$$

2. (**Kramerova teorema**)

$$\boxed{x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \dots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}}$$

gde je $A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Homogen sistem linearnih jednačina

$$\boxed{A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}}$$

- uvek ima **trivijalno rešenje** :$(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$
- uvek je saglasan (određen ili neodređen)
- za $m < n$ je neodređen
- **za** $m = n$ **i** $|A| \neq 0$ **je određen** (ima samo trivijalno rešenje)
- **za** $m = n$ **i** $|A| = 0$ **je neodređen** (ima i netrivijalna rešenja)
- **nikad nije kontradiktoran** (=nemoguć=protivurečan)

S.l.j. Test pitanja

1. Homogen sistem sa 3 jednačine i 4 nepoznate je neodređen.
2. Homogen sistem sa 3 jednačine i 5 nepoznatih ima samo trivijalno rešenje.
3. Sistem lin. j. sa 3 jednačine i 5 nepoznatih je ili kontradiktoran ili neodređen ili određen.
4. Homogen sistem sa 5 jednačina i 2 nepoznate je kontradiktoran.
5. $$\begin{aligned} 2x + 2y - 4u - 4v &= 0 \\ 2x + 2y - 2u - 2v &= 2 \\ x + y - 2u - 2v &= 2 \\ 4x + 4y - 4u - 4v &= 2 \end{aligned}$$ je nemoguć sistem linearnih jednačina.
6. Sistem linearnih jednačina je saglasan akko ima više rešenja.
7. Ako se pri Gausovom metodu eliminacije pojavi vrsta sa svim nulama sem u poslednjoj koloni polazni sistem je kontradiktoran.

8. Gausovim metodom eliminacije dobili smo $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ to znači da je polazni sistem sa 3 jednačine i 4 nepoznate neodređen sa 3 stepena slobode.

9. Poslednja vrsta u proširenoj matrici prethodnog zadatka implicira da je treća jednačina u polaznom sistemu bila "suvišna", tj. posledica prve dve jednačine.

10. $S_{2,6}: \begin{bmatrix} 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \\ 2\ 4\ 6\ 4\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v & b & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ je neodređen.

11. $\begin{bmatrix} 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, je neodređen s.l.j.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, je neodređen s.l.j. sa 1 stepenom slobode.

13. $S_{3,4} : \begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 30 & 32 & 34 & 36 \\ 45 & 48 & 51 & 54 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je homogen određen.

14. Prethodni s.l.j., $S_{3,4}$, rešavamo pomoću inverzne matrice sistema.

15. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$ ovaj s.l.j. možemo rešiti Kramerovom teoremom (metodom)

16. Kvadratni homogen sistem sa regularnom matricom sistema ima samo trivijalno rešenje. (određen je)