Razmera

dvorazmera $a : b$ $\qquad a, b \in \mathcal{R}^+$

trorazmera $a : b : c$ $\qquad a, b, c \in \mathcal{R}^+$

četvororazmera, ... **koeficijenti razmere**:$a, b, c, ...$

Razmera se ne menja ako koeficijente razmere podelimo ili pomnožimo sa brojem različitim od nule:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} \ = \ a : b \quad \text{i} \quad (a \cdot c) \ : \ (b \cdot c) \ = \ a : b, \quad c \neq 0 \ .$$

Dodavanje ili oduzimanje broja koeficijentima, menja razmeru:

$$(a + c) \ : \ (b + c) \neq \ a : b \quad \text{i} \quad (a - c) \ : \ (b - c) \neq \ a : b, \quad c \neq 0 \ .$$

Razmera nema jedinstven zapis:

$$4{:}2{:}10 = 2{:}1{:}5 = \frac{4}{5}{:}\frac{2}{5}{:}2 = 1{:}0{,}5{:}2{,}5 = ...$$

Za **jedinstven zapis** za razmeru zahtevamo da:

- prvi koeficijent razmere bude jednak jedinici ili
- minimalni koeficijent bude jednak jedinici.

Ova dva načina onemogućuju da koeficijenti razmere budu svi prirodni.

Racionalne koeficijente razmere lako svodimo na prirodne.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : 2 : \frac{6}{5} : \frac{4}{15} \;=\; 12 : 10 : 30 : 18 : 4,$$

Jedinstveni zapis racionalne razmere dobijamo:

množenjem svih koeficijenata sa NZS svih imenioca i

deljenjem koeficijenata sa NZD svih brojioca

npr, NZS(5,3,1,5,15)=15 NZD(4,2,2,6,4) $= 2$.

$$(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}) : (\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2}) : (2 \cdot \frac{15}{2}) : (\frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2}) : (\frac{4}{15} \cdot \frac{15}{2}) = 6 : 5 : 15 : 9 : 2\ .$$

Proporcija

Proporcija nastaje kada se neke dve veličine odnose kao neke druge dve veličine.
Odnos broja zaposlenih muškaraca i žena u nekoj firmi je direktno proporcionalan odnosu ukupnog broja zaposlenih muškaraca i žena.
direktna i **obrnuta = indirektna** proporcija
više - više više - manje
Proporcija je jednakost dve dvorazmere:

$$a : b \;=\; c : d \;\text{ za }\; b \cdot d \neq 0 \;.$$

Tačno je da za $b, d \neq 0$, važi

$$a : b \;=\; c : d \quad \text{je ekvivalentno sa} \quad a \cdot d = b \cdot c \;.$$

Brojevi b i c su **unutrašnji** a brojevi a i d su **spoljašnji** koeficijenti proporcije.

Izvedene proporcije:

$$a : c \;=\; b : d, \qquad d : b \;=\; c : a \quad \text{i} \quad d : c \;=\; b : a\ .$$

1. zamenom unutrašnjih,
2. zamenom spoljašnjih i
3. istovremenom zamenom 1. 2.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}\ .$$

Izvedene proporcije iz $a : c = b : d$

$(a \pm c) : c = (b \pm d) : d,\ (a \pm c) : (b \pm d) = c : d,\ d : (b \pm d) = c : (a \pm c),$

$(d \pm b) : b = (c \pm a) : a$ i $(b \pm a) : a = (d \pm c) : c$ ...

Složeno pravilo trojno

Kopanje šanca dužine 12m, širine 6m, dubine 4m staje 48000 dinara. Koliko će dinara stajati kopanje šanca dužine 14m, širine 3m, dubine 6m?

Rešenje: Umesto da dubinu, širinu i dužinu šanaca posebno tretiramo izračunaćemo njihove zapremine u m^3: $12 \cdot 6 \cdot 4 = 288$ i $14 \cdot 3 \cdot 6 = 252$. Kako se zapremine šanaca proporcionalno odnose ceni njihovog iskopavanja, sledi $288 : 252 = 48000 : x$, odakle je $x = \dfrac{48000 \cdot 252}{288} = 42000$. Dakle, cena iskopavanja šanca manje zapremine je 42000 dinara.

Višestruka primena pravila trojnog

prekid, promena,...

Primer: Planirano je da izvestan posao obavi 25 radnika za 60 dana. Posao je počeo 1. aprila, ali samo sa 15 radnika. Posle 30 dana dođe na posao još 20 radnika. Kog datuma će posao biti završen, ako se radi svakog dana?

Rešenje:

1. ako neki posao uradi 25 radnika za 60 dana za koliko dana će ga uraditi 15 radnika? 100 dana.
2. ako preostali posao 15 radnika obavi za 70 dana za koliko dana će preostali posao obaviti 35 radnika? 35-toro mora raditi još 30 dana.

Od 1. aprila 60-ti dan je 30. maj, kada će biti završen posao.

Verižni račun

Kada prelazimo iz jednog sistema jedinica na drugi. niz jednakosti koje počinjemo sa jednačinom sa jednom nepoznatom

ciklično (kružno) nadovezujemo iste merne jedinice (kg, m, dinare $, l, t, ...),

Koliko dinara košta 100 m platna, ako smo u Londonu 3 jarda tog platna platili 1800 penija? Da bi sa jarda (yd) i penija (d) prešli na metre i dinare, moramo znati jednakosti prelaska: 12 yd =11m i 240 d = 1 £ i 1 £(funta sterlinga) = 95 dinara po aktuelnom kursu.

x dinara = 100m

11 m = 12 yd

3 yd = 1800 d

240 d = 1 £

1 £= 95 dinara

x din $\cdot$ 11m $\cdot$ 3 yd $\cdot$ 240 d $\cdot$ 1 £= 100m $\cdot$ 12 yd $\cdot$ 1800 d $\cdot$ 1 £$\cdot$ 95 din.

$$x = \frac{100 \cdot 12 \cdot 18000 \cdot 1 \cdot 95}{11 \cdot 3 \cdot 240 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 300 \cdot 95}{11} = 25909,09\ .$$

Sto metara engleskog štofa košta 25909,09 dinara.

Napomena:Problem pravila trojnog u kojem imamo obrnutu proporciju ne možemo rešavati verižnim računom.

Račun deobe

Račun deobe nastaje u situacijama kada količinu K, $K > 0$, treba podeliti na $n \geq 2$ $(n \in \mathcal{N})$ delova, odnosno

$a)$ $\qquad K = K_1 + K_2 + ... + K_n$

tako da se zadovolji zadati odnos

$b)$ $\qquad K_1 : K_2 : ... : K_n \; = \; p_1 : p_2 : ... : p_n$,

gde su svi brojevi K_i i p_i, za $i = 1, 2, ...n$, veći od nule.

To znači da u opštem slučaju količine K_i možemo izraziti kao

$c)$ $\qquad K_i \; = \; p_i \cdot A, \quad i = 1, 2, ..., n$ gde je $0 < A \leq \dfrac{K}{n}$. Kada je faktor $A = \dfrac{K}{n}$, svi koeficijenti razmere p_i su jednaki.

Iz $a)$ i $c)$ sledi da je

$$K \; = \; p_1 \cdot A + p_2 \cdot A + ... + p_n \cdot A = A \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \; .$$

2)

$$\boxed{K_i \;=\; p_i \cdot \frac{K}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n \quad .}$$

1. Poljoprivredni kombinat planira 1000 hektara da zaseje kukuruzom, pšenicom i suncokretom u odnosu 13:8:4. Koliko hektara treba zasejati kukuruzom a koliko pšenicom?

Rešenje: Kako je faktor $A = \dfrac{1000}{13+8+4} = 40$, imamo da kukuruzom treba zasejati $13 \cdot 40 = 520$, pšenicom $8 \cdot 40 = 320$ i suncokretom $4 \cdot 40 = 160 = 1000 - (520 + 320)$ hektara.

2. Istu vrstu posla obavljalo je 4 grupe radnika jednake kvalifikacije. Broj radnika, broj radnih dana i broj dnevnih radnih časova za svaku od 4 grupe radnika su dati u sledećoj tabeli:

grupe	1.	2.	3.	4.
broj radnika	3	12	6	2
dani	4	6	12	3
radni sati	8	5	10	4

Na koji način sumu od 12000 dinara rasporediti grupama radnika?

Rešenje: Ukupan broj sati rada redom prve, druge, treće i četvrte grupe je $3 \cdot 4 \cdot 8$, $12 \cdot 6 \cdot 5$, $6 \cdot 12 \cdot 10$ i $2 \cdot 3 \cdot 4$. Kako zarada po grupama mora biti proporcionalna sa ukupnim vremenom njihovog rada koeficijenti razmere su ukupni brojevi sati rada po grupama.

Tako je faktor $A = \dfrac{12000\text{din}}{12 \cdot (8 + 30 + 60 + 2)} = 10$ din. Zarada koju će redom dobiti 1, 2, 3. i 4. grupa je $3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10\text{din} = 960$ din , $12 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10$ din $= 3600$ din, $6 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 10$ din $= 7200$ din i $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10$ din $=$

240 din.

3. Izvesnu sumu su podelile tri osobe. Prva je dobila trećinu, druga $\dfrac{4}{7}$ sume, a treća je dobila 100 dinara. Koliko dinara su dobile prva i druga osoba i kolika je ukupna suma koju smo podelili?

Rešenje: Označimo sa S polaznu sumu. Znači prva osoba je dobila $\frac{1}{3}$ S dinara, druga $\frac{4}{7}$ S dinara a treća 100 dinara. Kako je ukupna suma jednaka zbiru razdeljenog novca $\frac{1}{3}$ S + $\frac{4}{7}$ S + 100 = S. Sledi 100 = S (1- $\frac{1}{3} - \frac{4}{7}$) = S $\frac{21-7-12}{21}$ = S $\frac{2}{21}$. Odakle je S = 50$\cdot$ 21 = 1050 dinara. Vidimo takođe da je treća osoba dobila $\frac{2}{21}$ od S. Prva osoba je dobila $\frac{1050}{3}$ = 350 dinara, dok je druga osoba dobila $\frac{1050\cdot 4}{7}$ =600 dinara.

Račun mešanja - legiranja

$x=$ količinu zlata od 24 karata $\quad$ $y=$ količina zlata od 17 karata

U kojoj razmeri treba uzeti $x:y$ da bi napravili leguru od 21 karat?

$$24x+17y = 21(x+y) \Leftrightarrow 24x-21x = 21y-17y \Leftrightarrow 3x = 4y \Leftrightarrow 4:3 = x:y\,.$$

karakteristika roba	24	17
karakteristika mešavine	21	
koeficijenti razmere	4	3

karakteristika = % alkohola, % azota, cena, elektroprovodljivost, ...

Karakteristika mešavine je *manja* od najveće karakteristike i *veća* od najmanje karakteristike komponenata iz mešavine.

broj komponenata =2 prost račun mešanja 1 stepen slobode

broj komponenata >2 složen račun mešanja više stepeni slob.

Prost račun mešanja

karakteristike komponenti $(k_1,\ k_2,\ \ k_1 > k_2)$

karakteristika mešavine $\quad (k,\quad k_1 > k > k_2)$

koeficijenti razmere 1 stepen slobode

k_1		$k - k_2$
	k	
k_2		$k_1 - k$

Razlika mešavine i manje karakteristike je koeficijent razmere za veću, dok je razlika veće karakteristike i mešavine koeficijent razmere za manju komponentu.

Složen račun mešanja

3 stepena slobode

k_1		$k - k_3$		$k - k_3$	
k_2			$k - k_3$	$k - k_3$	
	k				
k_3		$k_1 - k$	$k_2 - k$	$k_1 + k_2 - 2k$	

7 stepeni slobode

za $k1 < k < k2 < k3 < k4$

15 stepeni slobode

za $k1 < k2 < k < k3 < k4$

Primer: Raspolažemo sa brašnom po ceni od 14, 18, 22 i 24 dinara po kilogramu. Napraviti mešavinu 100 kg brašna, od svih raspoloživih, po ceni od 20 dinara, tako da u mešavini bude minimalno zastupljeno brašno po ceni od 14 dinara. Brašna po ceni od 24 dinara imamo na rapolaganju 20 kilograma, ali želimo da svu količinu upotrebimo u mešavini. Brašna po ceni od 18 dinara imamo samo 50 kg, dok ostalog brašna imamo u dovoljnim količinama.

cene	cena meš.	koef. razmere				
14		2 (5kg)	4			5kg
18				2 (10kg)	4 (40kg)	50kg
	20					
22		6 (15kg)		2 (10kg)		25kg
24			6		2 (20kg)	20kg