Skupovi brojeva

Inkluzivni odnosi skupova brojeva $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}, \quad \mathcal{I} \subset \mathcal{R}$

Realni brojevi $\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{I} \cup \mathcal{Q}}$

Iracionalni brojevi $\mathcal{I}$

Racionalni brojevi $\mathcal{Q} = \{\frac{x}{y} \mid x \in \mathcal{Z}\ y \in \mathcal{N}\}$

Celi brojevi $\mathcal{Z} = \{\mathcal{N}\} \cup \{0\} \cup \{-\mathcal{N}\}$

Prirodni brojevi $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

Prošireni $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Kompleksni brojevi $\boxed{\mathcal{C} = \{z|z = x + iy, \quad x, y \in \mathcal{R}\}}$

Kardinalnosti skupova brojeva

$|\mathcal{N}| = |\mathcal{Z}| = |\mathcal{Q}| = \aleph_0 \qquad |R| = |I| = |C|$=c kontinuum

Polinomi

Polinom P *po kompleksnoj promenljivoj* $z = x + iy$ *je*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

gde su **koeficienti** $a_k \in \mathcal{C}$ *i* $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$*.*

Elementi: $a_n z^n, a_{n-1} z^{n-1}, ... a_1 z, a_0$ su **članovi** polinoma P.
Ako su svi koeficijenti polinoma realni onda je i polinom P **realan**.
U nastavku podrazumevamo da su polinomi po kompleksnoj promenljivoj realni.

Ako je vodeći koeficijent $a_n \neq 0$ tada je polinom P n-tog **stepena**, tj. $st(P) = n$.
Broj 0 se naziva **nula polinom**.

Osnovna teorema algebre

Rešenje z_1 algebarske jednačine $P(z) = 0$ nazivamo **nulom** ili **korenom** polinoma P.

Svaki polinom stepena $n \in \mathcal{N}$ **ima** n **rešenja** u skupu kompleksnih brojeva.

Osnovna teorema algebre nam daje nešto slabije tvrđenje:

Teorema. *Svaki polinom $P(z)$ stepena n, $n \geq 1$ ima bar jednu nulu.*

Teorema. *Ako je polinom P neparnog stepena onda jednačina $P(z) = 0$ ima bar jednu realnu nulu.*

Bezuova teorema i hornerova šema

(Bezuova teorema) *Neka polinom* $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *delimo polinomom prvog stepena* $z - z_0$, $z_0 \in \mathcal{C}$. *Neka je rezultat deljenja polinom* $Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^i$, *tada je ostatak pri deljenju jednak* $P(z_0)$,

$$P(z) = (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0) + P(z_0) \quad ,$$

pri čemu su koeficijenti polinoma Q *jednaki*

$$b_{n-1} = a_n, \;\; b_i = b_{i+1} z_0 + a_{i+1}, \;\; i = n-2, ..., 1, 0, \;\; i \; P(z_0) = b_0 z_0 + a_0 \; .$$

Hornerova šema:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c}
z_0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & P(z_0)
\end{array} \quad .$$

$b_{n-1} = a_n,$

$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot z_0 + a_{n-1},$

$b_{n-3} = b_{n-2} \cdot z_0 + a_{n-2},$

...

$P(z_0) = b_0 \cdot z_0 + a_0$.

Primeri.

Ako je $P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = 2z^5 + 0z^4 + 0z^3 - 3z^2 + 5z - 4$, i želimo da izračunamo $P(2)$ po Hornerovoj šemi je:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ \hline\hline & 2 & 4 & 8 & 13 & 31 & 58 \end{array} \quad ,$$

što implicira $P(2) = 58$. Odnosno po Bezuovoj teoremi je
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-2)(2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 13z + 31) + 58$.
Međutim, ako želimo da izračunamo $P(1)$:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 & -4 \\ \hline\hline & 2 & 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{array} \quad ,$$

zaključujemo da je 1 nula polinoma P, odnosno da je:
$P(z) = 2z^5 - 3z^2 + 5z - 4 = (z-1)(2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - z + 4)$.

Za razvijanje polinoma $Q(z) = z^5 - 5z^4 - 14z^3 - z^2 + 2z + 5$ po stepenima od $z + 2$ možemo višestruko primeniti Hornerovu šemu:

$$
\begin{array}{r||c|c|c|c|c|c}
-2 & 1 & -5 & -14 & -1 & 2 & 5 \\
\hline\hline
 & 1 & -7 & 0 & -1 & 4 & -3 \\
 & 1 & -9 & 18 & -37 & 78 & \\
 & 1 & -11 & 40 & -117 & & \\
 & 1 & -13 & 66 & & & \\
 & 1 & -15 & & & & \\
 & 1 & & & & &
\end{array}
\; .
$$

Sledi da je

$Q(z) = (z+2)^5 - 15(z+2)^4 + 66(z+2)^3 - 117(z+2)^2 + 78(z+2) - 3.$

Faktorizacija polinoma

U opštem slučaju faktorisati polinom znači zapisati ga u obliku proizvoda polinoma nižeg stepena.

Teorema. *Svaki polinom se na jedinstven način može faktorisati u proizvod polinoma prvog i polinoma drugog stepena pri čemu su polinomi drugog stepena sa diskriminantom manjom od nule.*

$P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6$ nije faktorisan.
$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + z - 2)$,
$P(z) = (z^3 - z^2 + 3z - 3)(z + 2)$,
$P(z) = (z - 1)(z^3 + 2z^2 + 3z + 6)$

Njegova jedinstvena faktorizacija: $P(z) = (z^2 + 3)(z - 1)(z + 2)$.
Ovaj realan polinom ima dve realne nule $z_1 = 1$ i $z_2 = -2$ i dve konjugovano kompleksne nule $z_3 = \sqrt{3}i$ i $z_4 = -\sqrt{3}i$.

faktorisati = jedinstvena faktorizacija

Racionalne nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima

Teorema. *Ako polinom* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$ *ima sve koeficijente cele* $a_i \in \mathcal{Z}$ *i ako su vodeći i slobodni koeficijent različiti od nule tada je potreban uslov da racionalan broj* $\frac{p}{q}$, $p \cdot q \neq 0$ *bude nula jednačine* $P(z) = 0$ *da je zadovoljeno:* $p|a_0$ *i* $q|a_n$.

Primer 1. Polinom $P = 3z^2 - 2 = 0$ ima kandidate za racionalne nule iz

$\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$, a nema racionalnih nula.

Primer 2. U polinomu $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, slobodni koeficijent je 4 a vodeći 1. Po teoremi p/q je kandidat za nulu ako $p|4$ i $q|1$.

Kandidati su $p/q \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$.

Zamenom u $P(x)$, nule su 1, -1, 2 i -2.

Najveći zajednički delilac - NZD

Ako su P, Q i K su tako da je $P(x) \cdot K(x) = Q(x)$, onda je polinom P **delitelj** polinoma Q, i pišemo $P|Q$.

Polinom $D(z)$ je **najveći zajednički delilac** polinoma $P(z)$ i $Q(z)$, u oznaci $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ akko je zadovoljeno:

$$1.\ D|P \wedge D|Q \qquad \text{i} \qquad 2.\ (\forall R)\ \ (R|P \wedge R|Q) \Rightarrow R|D$$

Iz $R|D$ sledi da je $st(R) \leq st(D)$. Zato se koristi pridev najveći, u smislu da je D polinom najvećeg stepena koji deli polinome P i Q.

Ako je $D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ tada je i
$\alpha \cdot D(z) = NZD(P(z), Q(z))$ gde je $0 \neq \alpha \in \mathcal{C}$.

Za $P(z) = (z^2 + 3)(z - 1)(z + 2)$ i $Q(z) = (z + 3)(z - 1)(z + 2)$ je
$NZD(P, Q) = (z - 1)(z + 2)$.

Teorema. *Za bilo koja dva ne nula polinoma P i Q postoji njihov najveći zajednički delilac. On je jedinstveno određen sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante.*

Euklidov algoritam za određivanje NZD

1. prvo podelimo polinom P sa polinomom Q, a zatim,
2. sve dok ostatak nije nula, delimo delilac sa ostatkom.
3. poslednji ne nula ostatak jednak je $NZD(P, Q)$.

Primer Euklidovog algoritma za brojeve, NZD(210,56)

210:56 =3 (42)

56:42 = 1 (14)

42:14=3

NZD(210,56)=14

Tako dobijamo sledeći niz jednačina u kojima su redom $Q, R_1, R_2, ..., R_k$ delioci, a redom $R_1, R_2, ..., 0$ ostaci:

$$
\begin{array}{llll}
P(z) & = Q(z) & \cdot \quad Q_1(z) & +R_1(z) \\
Q(z) & = R_1(z) & \cdot \quad Q_2(z) & +R_2(z) \\
R_1(z) & = R_2(z) & \cdot \quad Q_3(z) & +R_3(z) \\
& \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \\
R_{k-3}(z) & = R_{k-2}(z) & \cdot \quad Q_{k-1}(z) & +R_{k-1}(z) \\
R_{k-2}(z) & = R_{k-1}(z) & \cdot \quad Q_k(z) & +R_k(z) \\
R_{k-1}(z) & = R_k(z) & \cdot \quad Q_{k+1}(z) & +0 \\
\text{deljenik} & \quad \text{delilac} & \quad \text{količnik} & \text{ostatak}
\end{array}
$$

$R_k(z) = NZD(P(z), Q(z))$.