

Geometrijski i aritmetički niz

Niz brojeva:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad n \in \mathcal{N}$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad n \in \mathcal{N}_0$$

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, \dots, aq^n, \dots \quad \boxed{q \neq 1, a \neq 0}$$

geometrijski niz sa opštim članom $\boxed{a_n = aq^n \quad n \in \mathcal{N}_0,}$

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots, a + nd, \dots \quad \boxed{d \neq 0}$$

aritmetički niz sa opštim članom $\boxed{a_n = a + nd, \quad n \in \mathcal{N}_0.}$

Prepoznavanje niza

za sve susedne članove niza važi za

- geometrijski : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q$ nazivamo **količnik**
- aritmetički: $a_{n+1} - a_n = d \quad d$ nazivamo **razlika**

Tako bi niz $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$ kraće zapisali kao niz $3 \frac{1}{2}^n, n \in \mathcal{N}_0$.

Tako su sledeći nizovi brojeva:

$$\mathbf{a} : 1, 3, 9, 27, 81, \dots \quad a = 1, q = 3, \quad a_n = 3^{n-1}, n \in \mathcal{N}$$

$$\mathbf{b} : 5, 10, 20, 40, 80, \dots \quad a = 5, q = 2, \quad b_n = 5 \cdot 2^{n-1}, n \in \mathcal{N}$$

$$\mathbf{c} : 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 1, 6, 3, 2, \dots$$

$$\mathbf{e} : 1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad a = 1, d = 2 \quad e_n = 1 + 2n, n \in \mathcal{N}_0$$

$$\mathbf{g} : 3, 4; 2, 4; 1, 4; \dots \quad a = 3, 4 \quad d = -1 \quad g_n = 3, 4 - n \quad n \in \mathcal{N}_0$$

$$\mathbf{f} : 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots \quad \mathbf{Fibonačijev niz}$$

$$\boxed{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \in \mathcal{N} \quad f_0 = f_1 = 1}$$

Osobine niza

rastući i opadajući nizovi ograničeni i neograničeni nizovi

konvergentni nizovi tačke nagomilavanja i granice niza

Formule za zbir prvih $n + 1$ članova

- za geometrijski niz

$$\sum_{i=0}^n aq^i = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1 .$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047.$$

$$4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^4}{1 - \frac{1}{5}} = 4 \cdot \frac{\frac{624}{5^4}}{\frac{4}{5}} = \frac{624}{125}.$$

Niz $g : 1, -4, 16, -64, \dots$ je rastući geometrijski niz neograničen i odozdo i odozgo sa opštim članom $g_n = (-4)^n$, za $n \in \mathcal{N}_0$, i sa zbirom prva 33 člana jednakim 14757395258967641293.

- za aritmetički niz

$$\sum_{i=0}^n (a+id) = \frac{(a_n + a_0)}{2} \cdot \left(\frac{a_n - a_0}{d} + 1\right) = \frac{(a_0 + a_n)}{2} (n+1) = \left(a_0 + \frac{n \cdot d}{2}\right) (n+1).$$

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{3 + 15}{2} \cdot 7 = 63$$

$$-9 - 6 - 3 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 309 = \frac{309 - 9}{2} \cdot \left(\frac{309 + 9}{3} + 1\right) =$$

$$150 \cdot 157 = 23550$$

Niz $a : 1, -4, -9, -14, \dots$ je opadajući, aritmetički niz, neograničen odozdo i ograničen odozgo, sa opštim članom $1 + (-5) \cdot n$, za $n \in \mathcal{N}$, i sa zbirom prva 33 člana jednakim -2607 .