Matrični račun
Determinanta - Definicija

$$\boxed{|A_n| = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} (-1)^{Inv(p)} \, a_{1p(1)} \cdot a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}}$$

$\mathcal{P}_n$ je skup svih permutacija na skupu $\{1, 2, ..., n\}$

$Inv(p)$ je ukupan broj transpozicija u zapisu permutacije p preko proizvoda transpozicija

$\mathcal{P}_n$ ima $n!$ elemenata

$\mathcal{P}_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

$$p = 213 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \;\Rightarrow\; p(1) = 2,\; p(2) = 1,\; p(3) = 3$$

Determinanta - Definicija

- $(e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ \ldots\ e_k\ ) = (e_1\ e_2)(e_1\ e_3)(e_1\ e_4)\ldots(e_1\ e_k)$
- $\boxed{a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}$ je sabirak u $|A_3|$
  za $p = (132) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2 \end{pmatrix} = (13)(12)$ i $Inv(p) = 2$, predznak $+$
- $\boxed{b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{35} \cdot b_{41} \cdot b_{54}}$ je sabirak u $|B_5|$
  za $p = (1354) = (13)(15)(14)$ i $Inv(p) = 3$, predznak $-$
- $b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{35} \cdot b_{41} \cdot b_{54}$ nije sabirak u $|B_6|$
- $c_{13} \cdot c_{22} \cdot c_{35} \cdot c_{44} \cdot c_{54}$ nije sabirak u $|C_5|$

Determinanta - Osobine

- Determinantu množimo brojem tako što **samo jednu** vrstu ili kolonu izmnožimo brojem.
- Determinanta zbira dve kvadratne matrice nije jednaka zbiru determinanti tih matrica.
- $|\alpha \cdot A_n| = \alpha^n \cdot |A| \qquad \alpha \in \mathcal{R}.$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- $|A^T| = |A|$.
- Determinanta je jednak 0 ukoliko postoji:
  - neka vrsta ili kolona sa svim nulama ili
  - vrsta proporcionalna drugoj vrsti ili
  - kolona proporcionalna drugoj koloni
- Determinanta trougaone matrice je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Determinanta - Elementarne transformacije

Postoji 3 tipa elementarnih transformacija

E_1: $A_{(i_1,i_2)}$, razmenjene dve vrste (i_1 i i_2) ;

E_2: $A_{i(\alpha)}$, i-ta vrsta pomnožena brojem α različitim od 0 ;

E_3: $A_{i_1(\alpha),i_2}$, i_2 vrsti je dodata vrsta (i_1) pomnožena brojem α

Tada važi:

1. $|A_{(i_1,i_2)}| = -|A|$ determinanta menja znak
2. $|A_{i(\alpha)}| = \alpha \cdot |A|$ determinanta je pomnožena brojem
3. $|A_{i_1(\alpha),i_2}| = |A|$ determinanta se ne menja

- $|A| = |A^T|$
- iste osobine važe i za determinante matrica nad kojima su primenjene elementarne transformacije nad kolonama

Brže računanje determinanti (1)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 15 & 8 \\ 2 & 12 & 5 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad / \cdot (-5) / \cdot (-2) / \cdot (-1)$$

svođenje na trougaonu matricu

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad / \cdot 2 \quad = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} \quad / \cdot 4$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{vmatrix} = -400$$

Brže računanje determinanti (2)

$$(1) \quad a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + ... + a_{in} \cdot A_{kn} = \begin{cases} |A|, & i = k \\ 0\ \ , & i \neq k \end{cases}$$

$$(2) \quad a_{1j} \cdot A_{1k} + a_{2j} \cdot A_{2k} + ... + a_{nj} \cdot A_{nk} = \begin{cases} |A|, & j = k \\ 0\ \ , & j \neq k \end{cases}$$

- formula (1) za $i = k$ - razvoj po i-toj vrsti
- formula (2) za $j = k$ - razvoj po j-toj koloni
  - $a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{25} \cdot A_{25} = |A_5|$
    razvoj po 2. vrsti
  - $a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} = |A_4|$
    razvoj po 1. koloni
  - $a_{21} \cdot A_{51} + a_{22} \cdot A_{52} + a_{23} \cdot A_{53} + a_{24} \cdot A_{54} + a_{25} \cdot A_{55} = 0$
  - $b_{13} \cdot B_{11} + b_{23} \cdot B_{21} + b_{33} \cdot B_{31} + b_{43} \cdot B_{41} = 0$

Brže računanje determinanti (2)
razvoj po vrsti ili koloni

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$0 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\right) = -3 \cdot \left(4 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 5 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + 6 \cdot \left(+ \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)\right) =$$

$$-3 \cdot (4 \cdot (-10) + 5 \cdot 20 + 6 \cdot (-10)) = 0.$$

Adjungovana *, transponovana ^{T}

- transponovanje ^{T} = zamena vrsta i kolona
- minor reda k = determinanta podmatrice reda k
- Adjungovana matrica $\boxed{A^* = [A_{ij}]^T}$
  - A_{ij} = kofaktor ili algebarski komplement elementa a_{ij}
    $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$
  - M_{ij} = glavni minor reda $n-1$ = determinanta bez i-te vrste i j-te kolone

Inverzna matrica $^{-1}$

- $\boxed{|A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{ postoji } A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ je regularna}}$
- $\boxed{|A| \neq 0 \text{ sledi } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* \ .}$

primer adjungovane matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6...$$

$|A| = 0$ nema inverzne matrice

primer inverzne matrice

- $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $|B| = 12$, $B^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,
- $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|} \cdot B^* = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
- $B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- $B^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Osobine transponovanih matrica

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A_{m\times n} + B_{m\times n})^T = A^T_{n\times m} + B^T_{n\times m}$
3. $(\alpha \cdot A_{m\times n})^T = \alpha \cdot A^T_{n\times m}$
4. $(A_{m\times n} \ \cdot \ B_{n\times m})^T = B^T_{m\times n} \ \cdot \ A^T_{n\times m}$

Osobine adjungovanih matrica

A kvadratna matrica reda n, α realan broj

1. $A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot I$.
2. $|A^*| = |A|^{n-1}$.
3. $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.
4. $(\alpha \cdot A)^* = \alpha^{n-1} \cdot A^*$.

Osobine regularnih matrica

A, B regularne matrice reda n

1. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}, \quad \alpha \neq 0 \ \alpha \in \mathcal{R}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.