

Finansijska Matematika

1. Želimo da se bavimo proizvodnjom mleka. Koliko krava treba nabaviti za osnovni fond da bismo nakon isteka 8 godina od osnovnog fonda dobili 500 krava ako se zna da se 95% krava oteli svake godine i da su od toga 50% ženska telad, i da zrelost tele dostigne za 2 godine? složeni kamatni račun
2. Da li za 18 godina roditelji Mile J. mogu da uštede 25000 eura za kupovinu jednosobnog stana ako svakog meseca ulažu 50 eura uz mesečnu kamatu od 1% ? račun štednje
3. Toša T. je pozajmio od strica 3000 eura za kupovinu polovnog automobila. Uz mesečnu kamatu od 1%, koliko mesečno treba da vraća stricu da bi dug izmirio za tri godine?
račun kredita, zajma ili otplate duga
sa jednakim ratama otplate

Formule finansijske matematike

O.P.= obračunski period (mesec, dan, godina, minut, kvartal,...)

kapitalisanje=obračun i dodavanje kamate na osnovicu

kapitalisanje= anticipativno (na početku O.P.),

dekurzivno (na kraju O.P.) sve naše formule

$$G_n = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

1)

$$S_n = U \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

2)

$$R = D \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} .$$

3)

$$k\% = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 .$$

4)

$p\%$ =kamatna stopa za OP

n = broj OP

$q = 1 + p\%$

m =broj manjih OP u većem OP za koji je data kam. stopa $p\%$

$k\%$ = konformna kamatna stopa za manji OP

$$1) \rightarrow \boxed{G = \frac{G_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n},} \quad \boxed{p\% = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G}} - 1,} \quad \boxed{n = \frac{\ln G_n - \ln G}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.}$$

$$2) \rightarrow \boxed{U = S_n \cdot \frac{q - 1}{q \cdot (q^n - 1)}} \quad \boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{S_n(q - 1)}{Uq} + 1\right)}{\ln q} .}$$

$$3) \rightarrow \boxed{D = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n},} \quad \boxed{n = \frac{\ln \frac{R}{R - D(q - 1)}}{\ln q} .}$$

G =osnovica jednom uložena

G_n =uvećana suma nakon n OP

U = ulog uložen na početku **svakog** od n OP S_n = suma na kraju

D =podignut kredit, dug R = rata otplate za svaki od n OP

Bazni i verižni indeksi

y_i = podaci o potrošnji, proizvodnji ili prodaji robe ili usluga u toku n susednih vremenskih jedinica (godine, meseci, dani, ...)

Primer 1. Dati su podaci o godišnjoj proizvodnji semenskog kukuruza Instituta u Novom Sadu u periodu od 5 godina ($n=5$):

$i=$	1	2	3	4	5
god.	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.
proiz. y_i	3321	4980	4999	5330	4803
I_i za '93, $B = 1$	100%	150%	150,53%	160,5%	144,63%

Bazni indeksi, I_i

$$I_i = \frac{y_i}{y_B} \cdot 100, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, n$$

Bazni indeksi daju procenat povećanja ili smanjenja u razmatranom periodu u odnosu na bazni period.

Prosečna stopa rasta $r_S\%$ i pada $p_S\%$

za $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq \dots \leq y_n$

$$r_S\% = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_{max}}{y_{min}}} - 1 \right) ,$$

y_{max} = maksimalna, y_{min} = minimalna vrednost

za $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4 \geq \dots \geq y_n$

$$p_S\% = \left(\sqrt[n-1]{\frac{y_{min}}{y_{max}}} - 1 \right) .$$

Verižni indeksi, V_i

$$V_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \text{ za } i = 2, \dots, n .$$

godina	1993.	1994.	1995.	1996.	1997.
proizvodnja (t)	3321	4980	4999	5330	4803
verižni indeksi	—	149,95%	100,38%	106,62%	90,11%

Verižni indeksi daju procenat povećanja ili smanjenja u razmatranom periodu u odnosu na prethodni period.

V_1 ne postoji, dok iz:

V_2 sledi: proizvodnja u '94 je porasla za skoro 50% u odnosu na '93;

V_5 sledi: proizvodnja u '97 opala za skoro 10% u odnosu na '96. i

Prosečnu stopu rasta ili pada

za podatke koji nisu uredjeni (rastući ili opadajući) računamo po formuli:

$$r_{pS} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^n (V_i - 100) .$$

$$r_{pS}\% = (49,95\% + 0,38\% + 6,62\% - 9,89\%) : 4 = 11,765\%$$

Očekivana vrednost prodaje nakon k perioda

neka je izračunata stopa $p\%$ rasta (ili pada) za prodaju y
neka je y_n poslednji poznat (aktuelan) podatak o prodaji
tada se očekuje da prodaja nakon isteka narednih k perioda bude

$$y_{n+k} = y_n \cdot (1 + p\%)^k .$$

tako se u 2000. očekuje prodaja od

$$y_8 = y_5 \cdot (1 + 11,765\%)^3 = 4803 \cdot 1,3961 = 6705$$

Verižni preko baznih indeksa:

$$V_i = \frac{I_i}{I_{i-1}} \cdot 100, \quad i = 2, \dots, n \quad .$$

Bazni preko verižnih indeksa:

$$I_i = \begin{cases} \frac{I_{i+1}}{V_{i+1}} \cdot 100, & i < B \\ 100\%, & i = B \\ \frac{I_{i-1} \cdot V_i}{100}, & i > B \end{cases} \quad .$$

godina	1999.	2000.	2001.	2002.	2003.
verižni indeksi	—	120%	110%	105%	103%

Bazna 2001 godinu, $B = 3$ $I_3 = 100\% = 1$

Indekse I_2 i I_1 računamo po prvom delu formule

Indekse I_4 i I_5 računamo po trećem delu formule

- $I_2 = \frac{I_3}{V_3} = \frac{1}{1,1} = 90,91\%$;
- $I_1 = \frac{I_2}{V_2} = \frac{0,9091}{1,20} = 75,76\%$;
- $I_4 = I_3 \cdot V_4 = 1 \cdot 1,05 = 105\%$;
- $I_5 = I_4 \cdot V_5 = 1,05 \cdot 1,03 = 108,15\%$.

Primer 1. U toku godine prodaja šećera je u sedmomesečnom periodu novembar – maj stabilna. Međutim, u periodu jun – oktobar povećana je potražnja i prodaja šećera (obrada sezonskog voća, pečenje rakije, vinarska industrija, ...). Uočeno je da se potrebe za šećerom u periodu jun – oktobar redom povećavaju za 16%, 13%, 17%, 32% i 23%, što je u tabeli prikazano sa baznim indeksima za bazu u maju. Neka je prodaja u maju u Novom Sadu iznosila 450 tona šećera. Toliko su robne rezerve i obezbedile za svaki mesec u godini. Koliko dodatno treba obezbediti šećera da bi se pokrile potrebe za šećerom u mesecima sa povećanom potražnjom?

godina	jun	jul	avgust	septembar	oktobar
bazni indeksi	1,16	1,15	1,17	1,32	1,23

Ako sa \check{s}_1 , \check{s}_2 , \check{s}_3 , \check{s}_4 i \check{s}_5 označimo novosadske potrebe za šećerom redom u junu, julu, avgustu, septembru i oktobru sledi da su dodatne

potrebe za šećerom

$$\check{S} = \sum_{i=1}^5 (\check{s}_i - 450) \quad .$$

U ovom primeru ne moramo da računamo \check{s}_i jer su nam dati bazni indeksi (da imamo verižne indekse morali bi ih računati). Dovoljno je da saberemo sve procenete povećanja i zbir pomnožimo sa 450. Sledi da su povećane potrebe za šećerom

$$(0,16 + 0,15 + 0,17 + 0,32 + 0,23) \cdot 450 = 1,03 \cdot 450 = 463,5 \text{ tona.}$$

Na pitanje: Koliko iznosi maksimalna mesečna potrošnja šećera Novosađana? Odgovor bi bio: Maksimalna potrošnja se ostvaruje u septembru i iznosi $1,32 \cdot 450 = 594$ tona.

Primer 2. Istraživački tim Novosadskog sajma je došao do zaključka da u toku 5 dana "Jesenjeg sajma lova i ribolova" ustalilo pravilo da se broj posetilaca sajma, od petka do utorka, prvo povećava pa zatim smanjuje po vrednostima koje su date u tabeli:

dan	1.	2.	3.	4.	5.
verižni indeksi	—	130%	110%	70%	110%

To je dalo ideju upravnom odboru da ove godine cenu zakupa sajamskog prostora veže za planirani broj posetilaca. Njihov broj oni znaju već posle prvog dana sajma. Ako je prvog dana bilo 1233 posetilaca, koliko ih se očekuje do kraja sajma?

Označimo sa y_1, y_2, y_3, y_4 i y_5 broj posetilaca 1, 2, 3, 4 i 5. dana sajma. Znači $y_1 = 1233$. Iz formule za verižne indekse imamo:

$$y_i = y_{i-1} \cdot V_i, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

- $y_2 = y_1 \cdot V_2 = 1233 \cdot 1,30 = 1603$,
- $y_3 = y_2 \cdot V_3 = 1603 \cdot 1,1 = 1763$,
- $y_4 = y_3 \cdot V_4 = 1763 \cdot 0,70 = 1234$,
- $y_5 = y_4 \cdot V_5 = 1234 \cdot 1,1 = 1357$.

Ukupan planirani broj posetilaca sajma je $\sum_{i=1}^5 y_i = 7190$.