Parcijalni izvodi i ekstremi funkcija više promenljivih

2010/2011

Prvi parcijalni izvod funkcije

Prvi parcijalni izvod funkcije

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive i $(x_0, y_0) \in D$, gde je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D.

Prvi parcijalni izvod funkcije

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive i $(x_0, y_0) \in D$, gde je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D.

Prvi parcijalni izvod funkcije f po promenljivi x u tački (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Prvi parcijalni izvod funkcije

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive i $(x_0, y_0) \in D$, gde je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D.

Prvi parcijalni izvod funkcije f po promenljivi x u tački (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Prvi parcijalni izvod funkcije f po promenljivi y u tački (x_0, y_0)

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su i $\partial f / \partial x$ i $\partial f / \partial y$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su i $\partial f / \partial x$ i $\partial f / \partial y$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su i $\partial f/\partial x$ i $\partial f/\partial y$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su i $\partial f/\partial x$ i $\partial f/\partial y$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Parcijalni izvodi višeg reda

Neka $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode na otvorenom skupu D. Tada su i $\partial f / \partial x$ i $\partial f / \partial y$ takođe funkcije dve promenljive definisane na D. Ako sada i te funkcije imaju svoje parcijalne izvode na D, dolazimo do **drugih parcijalnih izvoda** funkcije f i označavamo ih redom sa

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} =$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$=$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + 2xyh + h^2 y - x^2 y}{h} =$$

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 y + 2xyh + h^2 y - x^2 y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xyh + h^2 y}{h}$$

$$=$$

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + 2xyh + h^2 y - x^2 y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xyh + h^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)y}{h} =$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y)=x^2\cdot y$.

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y-x^2y}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2y+2xyh+h^2y-x^2y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xyh+h^2y}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)y}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h)y}{1}=$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + 2xyh + h^2 y - x^2 y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xyh + h^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2x+h)y}{1} = 2xy.$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} =$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$=$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + x^2 h - x^2 y}{h} =$$

Zadatak $1^{\star}$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 y + x^2 h - x^2 y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 h}{h} =$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + x^2 h - x^2 y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 h}{h} = \lim_{h\to 0} x^2 =$$

Određivanje prvog parcijalnog izvoda po definiciji

Zadatak $1^\star$**.** Po definiciji naći prve parcijalne izvode funkcije $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 y + x^2 h - x^2 y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 h}{h} = \lim_{h\to 0} x^2 = x^2.$$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Zadatak 4. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Zadatak 4. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Zadatak 5. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Zadatak 4. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Zadatak 5. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Zadatak 6. $z = x^y$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Zadatak 4. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Zadatak 5. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Zadatak 6. $z = x^y$

Zadatak 7. $z = e^{\sin \frac{y}{x}}$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Zadatak 3. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

Zadatak 4. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Zadatak 5. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

Zadatak 6. $z = x^y$

Zadatak 7. $z = e^{\sin \frac{y}{x}}$

Zadatak 8. $z = \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 9. $u = (x\,y)^z$

Odrediti parcijalne izvode prvog reda:

Zadatak 9. $u = (x\,y)^z$

Zadatak 10. $u = z^{x\,y}$

Pokazati da su tačne jednakosti:

Pokazati da su tačne jednakosti:

Zadatak 1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\,y + z$ ako je $z = x\,y + x\,e^{\frac{y}{x}}$

Parcijalni izvodi - zadaci

Pokazati da su tačne jednakosti:

Zadatak 1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\,y + z$ ako je $z = x\,y + x\,e^{\frac{y}{x}}$

Zadatak 2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ ako je $z = \ln(x^2 + x\,y + y^2)$

Pokazati da su tačne jednakosti:

Zadatak 1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\,y + z$ ako je $z = x\,y + x\,e^{\frac{y}{x}}$

Zadatak 2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ ako je $z = \ln(x^2 + x\,y + y^2)$

Zadatak 3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ ako je $u = (x - y)(y - z)(z - x)$

Parcijalni izvodi - zadaci

Pokazati da su tačne jednakosti:

Zadatak 1. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\,y + z$ ako je $z = x\,y + x\,e^{\frac{y}{x}}$

Zadatak 2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ ako je $z = \ln(x^2 + x\,y + y^2)$

Zadatak 3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ ako je $u = (x - y)(y - z)(z - x)$

Zadatak 4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$ ako je $u = x + \dfrac{x - y}{y - z}$

Parcijalni izvodi - zadaci

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode drugog reda:

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode drugog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode drugog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode drugog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Pokazati da je tačna jednakost:

Parcijalni izvodi - zadaci

Odrediti parcijalne izvode drugog reda:

Zadatak 1. $z = x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y$

Zadatak 2. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$

Pokazati da je tačna jednakost:

Zadatak 3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ako je $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Zadaci za vežbu

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $f(x, y) = x^4 + 2y^3 + x^2 y + 2xy^2 + 3$

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $f(x,y) = x^4 + 2y^3 + x^2y + 2xy^2 + 3$

Zadatak 2. $f(x,y) = x\cos y + y^3 \operatorname{tg} x + x^2e^y + y\ln x$

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $f(x,y) = x^4 + 2y^3 + x^2y + 2xy^2 + 3$

Zadatak 2. $f(x,y) = x\cos y + y^3 \operatorname{tg} x + x^2 e^y + y \ln x$

Zadatak 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $f(x,y) = x^4 + 2y^3 + x^2y + 2xy^2 + 3$

Zadatak 2. $f(x,y) = x\cos y + y^3 \operatorname{tg} x + x^2 e^y + y\ln x$

Zadatak 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Zadatak 4. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{x+y}$

Zadaci za vežbu

Odrediti parcijalne izvode prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $f(x,y) = x^4 + 2y^3 + x^2y + 2xy^2 + 3$

Zadatak 2. $f(x,y) = x\cos y + y^3 \operatorname{tg} x + x^2 e^y + y\ln x$

Zadatak 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

Zadatak 4. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{x+y}$

Zadatak 5. $f(x,y,z) = z\arcsin y + z^3 \operatorname{ctg}(xy) + x^2 e^y + \ln(zx)$

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal prvog reda

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive. Tada je totalni diferencijal prvog reda funkcije $f(x, y)$:

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal prvog reda

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive. Tada je totalni diferencijal prvog reda funkcije $f(x, y)$:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Totalni diferencijal drugog reda

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} (dy)^2$$

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal prvog reda

Neka je $u : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija tri realne promenljive. Tada je totalni diferencijal prvog reda funkcije $u(x, y, z)$:

$$du(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Totalni diferencijal funkcije

Totalni diferencijal prvog reda

Neka je $u : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija tri realne promenljive. Tada je totalni diferencijal prvog reda funkcije $u(x, y, z)$:

$$du(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}dy + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z}dz$$

Totalni diferencijal drugog reda

$$\begin{aligned} d^2u = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(dz)^2 \\ + & 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy\,. \end{aligned}$$

Totalni diferencijal funkcije

Odrediti totalne diferencije prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Totalni diferencijal funkcije

Odrediti totalne diferencije prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z(x,y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x - 3y + 2$

Totalni diferencijal funkcije

Odrediti totalne diferencije prvog i drugog reda sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z(x,y) = 4x^2 + 2xy + 3y^2 + 5x - 3y + 2$

Zadatak 2. $u(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - xy + 5yz - 7xz + 2x + y + 6z + 1$

Ekstremi funkcije dve promenljive

Stacionarna tačka

Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija dve realne promenljive i $(x_0, y_0) \in D$, gde je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D. Tačka (x_0, y_0) je **stacionarna tačka** funkcije f ako je ispunjen uslov:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ i } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Ekstremi funkcije dve promenljive

Ekstremi funkcije dve promenljive

Neka je (x_0, y_0) stacionarna tačka funkcije $f(x, y)$. Označimo sa $g(x, y)$

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \ , (x,y) \in D \ .$$

Tada važi:

- Tačka (x_0, y_0) je lokalni minimum funkcije f ako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad g(x_0, y_0) > 0 \ .$$

- Tačka (x_0, y_0) je lokalni maksimum funkcije f ako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \wedge \quad g(x_0, y_0) > 0 \ .$$

Ekstremi funkcije dve promenljive

- Tačka (x_0, y_0) nije ekstremna vrednost funkcije f ako je

$$g(x_0, y_0) < 0 \ .$$

- Ako je $g(x_0, y_0) = 0$ potrebna su dalja ispitivanja.

Zadatak 1.

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x,y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \; .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x =$ $\qquad\qquad$ $z_y =$

$z_{xx} =$ $\qquad\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) A ($\qquad$, $\qquad$) je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\qquad$ $z_y =$

$z_{xx} =$ $\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) $A\ (\qquad , \qquad)$ je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\qquad$ $z_y = 12y + 12$

$z_{xx} =$ $\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) A (,) je MINIMUM/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \; .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$	$z_y = 12y + 12$
$z_{xx} = 2$	$z_{xy} =$
$z_{yx} =$	$z_{yy} =$
(ii) A (,) je MINIMUM/MAKSIMUM	
$z(A) =$	

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x,y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$	$z_y = 12y + 12$
$z_{xx} = 2$	$z_{xy} = 0$
$z_{yx} =$	$z_{yy} =$
(ii) A (,) je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM	
$z(A) =$	

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \; .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\qquad$ $z_y = 12y + 12$

$z_{xx} = 2$ $\qquad$ $z_{xy} = 0$

$z_{yx} = 0$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) A (,) je MINIMUM/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x,y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\qquad$ $z_y = 12y + 12$

$z_{xx} = 2$ $\qquad$ $z_{xy} = 0$

$z_{yx} = 0$ $\qquad$ $z_{yy} = 12$

(ii) A (,) je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x,y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$	$z_y = 12y + 12$
$z_{xx} = 2$	$z_{xy} = 0$
$z_{yx} = 0$	$z_{yy} = 12$

(ii) A (3 ,) je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \, .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\quad$ $z_y = 12y + 12$

$z_{xx} = 2$ $\quad$ $z_{xy} = 0$

$z_{yx} = 0$ $\quad$ $z_{yy} = 12$

(ii) $A\,(\;3\;,\;-1\;)$ je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) =$

Zadatak 1.

Data je funkcija

$$z(x, y) = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = 2x - 6$ $\qquad$ $z_y = 12y + 12$

$z_{xx} = 2$ $\qquad$ $z_{xy} = 0$

$z_{yx} = 0$ $\qquad$ $z_{yy} = 12$

(ii) $A\,(\quad 3 \quad , \quad -1 \quad)$ je <u>MINIMUM</u>/MAKSIMUM

$z(A) = -5$

Zadatak 2.

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x =$ $\qquad\qquad$ $z_y =$

$z_{xx} =$ $\qquad\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) A ($\qquad$, $\qquad$) je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y =$

$z_{xx} =$ $\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) $A\ (\qquad , \qquad)$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} =$ $\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) $A\ (\qquad , \qquad)$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} =$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) A (,) je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} =$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) $A\,(\qquad ,\qquad)$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} = -4$ $\qquad$ $z_{yy} =$

(ii) $A($ $\qquad$, $\qquad$ $)$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12 \ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} = -4$ $\qquad$ $z_{yy} = -8$

(ii) A (,) je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12 \,.$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} = -4$ $\qquad$ $z_{yy} = -8$

(ii) $A\,(\ -1/2\ ,\qquad\quad)$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x,y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} = -4$ $\qquad$ $z_{yy} = -8$

(ii) $A\ (\ -1/2\ ,\ \ -1/2\ )$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) =$

Zadatak 2.

Data je funkcija

$$z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12\ .$$

(i) Naći sve parcijalne izvode prvog i drugog reda.

(ii) Odrediti tačku u kojoj se dostiže lokalni ekstrem, zaokružiti o kom je ekstremu reč i naći vrednost funkcije $z(x, y)$ u toj tački.

(i) $z_x = -4x - 4y + 4$ $\qquad$ $z_y = -8y - 4x + 2$

$z_{xx} = -4$ $\qquad$ $z_{xy} = -4$

$z_{yx} = -4$ $\qquad$ $z_{yy} = -8$

(ii) $A\ (\ -1/2\ ,\ -1/2\ )$ je MINIMUM/<u>MAKSIMUM</u>

$z(A) = -35/2$

Ekstremi funkcije tri promenljive

Ekstremi funkcije tri promenljive

Neka je (x_0, y_0, z_0) stacionarna tačka funkcije $u(x, y, z)$. Formiramo sledeću matricu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix}$$

Ekstremi funkcije tri promenljive

Ekstremi funkcije tri promenljive

Tada važi:

- Tačka (x_0, y_0, z_0) je lokalni minimum funkcije u ako je $d^2u > 0$ ili

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} > 0$$

Ekstremi funkcije tri promenljive

Tada važi:

- Tačka (x_0, y_0, z_0) je lokalni minimum funkcije u ako je $d^2u > 0$ ili

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} > 0$$

- Tačka (x_0, y_0, z_0) je lokalni maksimum funkcije u ako je $d^2u < 0$ ili

$$A < 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{vmatrix} < 0$$

U slučaju funkcije dve promenljive $z = z(x, y)$

- Stacionarna tačka (x_0, y_0) je lokalni minimum funkcije z ako je $d^2 z > 0$ ili

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0$$

U slučaju funkcije dve promenljive $z = z(x, y)$

- Stacionarna tačka (x_0, y_0) je lokalni minimum funkcije z ako je $d^2z > 0$ ili
$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0$$
- Stacionarna tačka (x_0, y_0) je lokalni maksimum funkcije z ako je $d^2z < 0$ ili
$$A < 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & D \end{vmatrix} > 0$$

Ekstremi funkcije više promenljivih - zadaci

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Zadatak 5. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad x, y, z > 0$

Ekstremi funkcije više promenljivih - zadaci

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Zadatak 5. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad x, y, z > 0$

Zadatak 6. $u = e^{(2x-2y+z)^2+(x-y)^2+(x-1)^2}$

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Zadatak 5. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad x, y, z > 0$

Zadatak 6. $u = e^{(2x-2y+z)^2+(x-y)^2+(x-1)^2}$

Zadatak 7. $u = \ln\left((x+y-z)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 + 1\right)$

Ekstremi funkcije više promenljivih - zadaci

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Zadatak 5. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad x, y, z > 0$

Zadatak 6. $u = e^{(2x-2y+z)^2+(x-y)^2+(x-1)^2}$

Zadatak 7. $u = \ln\left((x+y-z)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 + 1\right)$

Zadatak 8. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, \quad x, y \neq 0$

Ekstremi funkcije više promenljivih - zadaci

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 3. $u = -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 4z^2 + xy - 3xz - yz - 3x + 4y - 3z$

Zadatak 4. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad x, y > 0$

Zadatak 5. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad x, y, z > 0$

Zadatak 6. $u = e^{(2x-2y+z)^2+(x-y)^2+(x-1)^2}$

Zadatak 7. $u = \ln\left((x+y-z)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 + 1\right)$

Zadatak 8. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, \quad x, y \neq 0$

Zadatak 9. $z = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

Zadaci za vežbu

Zadaci za vežbu

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadaci za vežbu

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Zadaci za vežbu

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Zadatak 2. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$

Zadaci za vežbu

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Zadatak 2. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$

Zadatak 3. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

Zadaci za vežbu

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija:

Zadatak 1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Zadatak 2. $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$

Zadatak 3. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$

Zadatak 4. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Neka su date funkcije $u = u(x, y, z)$ i $g = g(x, y, z)$ koje imaju neprekidne prve parcijalne izvode na skupu

$$G = \{(x, y, z) | g(x, y, z) = 0\} .$$

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Neka su date funkcije $u = u(x, y, z)$ i $g = g(x, y, z)$ koje imaju neprekidne prve parcijalne izvode na skupu

$$G = \{(x, y, z) | g(x, y, z) = 0\} \ .$$

Za nalaženje uslovnog ekstrema funkcije u uz uslov $g(x, y, z) = 0$ formira se **Langranžova funkcija**

$$F(x, y, z, \lambda) = u(x, y, z) + \lambda \, g(x, y, z)$$

i određuju parcijalni izvodi $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ i $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Uslovni ekstremi funkcije u uz uslov $g(x,y,z) = 0$ se određuju iz sistema jednačina $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ i $F_\lambda = 0$, po nepoznatima x_0, y_0, z_0 i λ. Treba rešiti sistem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &+ \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &+ \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &+ \lambda\frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= 0\\
g(x_0,y_0,z_0) & &= 0
\end{aligned}$$

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Svako rešenja prethodnog sistema (x_0, y_0, z_0) se naziva stacionarna tačka za λ dobijeno takođe iz sistema. Sada se formira d^2F forma koja će, nakon određenih transformacija, biti oblika

$$\begin{aligned} d^2F = \;& \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(dz)^2 \\ + \;& 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dydz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy \end{aligned}$$

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Svako rešenja prethodnog sistema (x_0, y_0, z_0) se naziva stacionarna tačka za λ dobijeno takođe iz sistema. Sada se formira d^2F forma koja će, nakon određenih transformacija, biti oblika

$$\begin{aligned} d^2F = & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(dz)^2 \\ + & 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dydz + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dxdz + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy \end{aligned}$$

uz uslov $dg = 0$ ili

$$\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz = 0, \;\; (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \neq 0\,.$$

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Uslovni ekstremi funkcije tri promenljive

Ako je

- $d^2F(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$, tada u tački (x_0, y_0, z_0) funkcija u ima **uslovni maksimum** za $\lambda = \lambda_0$,
- $d^2F(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0$, tada u tački (x_0, y_0, z_0) funkcija u ima **uslovni minimum** za $\lambda = \lambda_0$.

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = x + 2y$ uz uslov $x^2 + y^2 = 5$

Uslovni ekstremi - zadaci

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = x + 2y$ uz uslov $x^2 + y^2 = 5$

Zadatak 2. $u = x - 2y + 3z$ uz uslov $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = x + 2y$ uz uslov $x^2 + y^2 = 5$

Zadatak 2. $u = x - 2y + 3z$ uz uslov $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Zadatak 3. $u = xy^2z^3$ uz uslov $x + y + z = 6, \quad x, y, z \neq 0$

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = x + 2y$ uz uslov $x^2 + y^2 = 5$

Zadatak 2. $u = x - 2y + 3z$ uz uslov $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Zadatak 3. $u = xy^2z^3$ uz uslov $x + y + z = 6, \quad x, y, z \neq 0$

Zadatak 4. $z = x^2y + xy^2$ uz uslov $x + y = 2, \quad x, y \neq 0$

Zadaci za vežbu

Zadaci za vežbu

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadaci za vežbu

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = xy$ uz uslov $x + y = 1$

Zadaci za vežbu

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = xy$ uz uslov $x + y = 1$

Zadatak 2. $z = x^2 + y^2$ uz uslov $x/2 + y/3 = 1$

Zadaci za vežbu

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = xy$ uz uslov $x + y = 1$

Zadatak 2. $z = x^2 + y^2$ uz uslov $x/2 + y/3 = 1$

Zadatak 3. $z = x^2 + y^2 + xy$ uz uslov $x + y + xy = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$

Zadaci za vežbu

Odrediti uslovne ekstremne sledećih funkcija:

Zadatak 1. $z = xy$ uz uslov $x + y = 1$

Zadatak 2. $z = x^2 + y^2$ uz uslov $x/2 + y/3 = 1$

Zadatak 3. $z = x^2 + y^2 + xy$ uz uslov $x + y + xy = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$

Zadatak 4. Naći kvadar maksimalne zapremine ako je površina kvadra jednaka 12. Formula za zapreminu je $V = xyz$, a za površinu $P = 2yz + 2xz + 2xy$.