LINEARNO PROGRAMIRANJE
- formule i zadaci -

Linearno programiranje (1)

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti sistema

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti sistema
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ - slobodni koeficijenti

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti sistema
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ - slobodni koeficijenti
- $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti funkcije cilja

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti sistema
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ - slobodni koeficijenti
- $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti funkcije cilja
- $\rho \in \{=, \leq, \geq\}$

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n$ - koeficijenti sistema
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$ - slobodni koeficijenti
- $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ - koeficijenti funkcije cilja
- $\rho \in \{=, \leq, \geq\}$
- f - funkcija cilja

Linearno programiranje (1)

Opšti oblik problema linearnog programiranja (LP) od m linearnih jednačina ili nejednačina sa n nepoznatih:

$$\min / \max(f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \rho & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \rho & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \rho & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

gde su:

- $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti sistema
- $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$ - slobodni koeficijenti
- $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ - koeficijenti funkcije cilja
- $\rho \in \{=, \leq, \geq\}$
- f - funkcija cilja
- $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ - trivijalna ograničenja

Linearno programiranje (2)

Linearno programiranje (2)

- Domen (ili dopustiv skup) linearnog programiranja $D \subset \mathbb{R}^n$ je skup svih tačaka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koje zadovoljavaju sve ograničavajuće uslove (jednačine i nejednačine sistema), kao i trivijalna ograničenja.

Linearno programiranje (2)

- Domen (ili dopustiv skup) linearnog programiranja $D \subset \mathbb{R}^n$ je skup svih tačaka $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koje zadovoljavaju sve ograničavajuće uslove (jednačine i nejednačine sistema), kao i trivijalna ograničenja.
- Optimalno rešenje je svaka tačka $(x_1^{opt}, x_2^{opt}, \dots, x_n^{opt}) \in D$ u kojoj funkcija cilja dostiže minimum, odnosno maksimum.

Linearno programiranje (2)

- Domen (ili dopustiv skup) linearnog programiranja $D \subset \mathbb{R}^n$ je skup svih tačaka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koje zadovoljavaju sve ograničavajuće uslove (jednačine i nejednačine sistema), kao i trivijalna ograničenja.
- Optimalno rešenje je svaka tačka $(x_1^{opt}, x_2^{opt}, \ldots, x_n^{opt}) \in D$ u kojoj funkcija cilja dostiže minimum, odnosno maksimum.
- Za rešavanje problema iz LP koristimo:
  - Geometrijsku metodu (kada u problemu LP figurišu dve promenljive)
  - Simpleks metodu (kada u problemu LP figurišu tri i više promenljivih)

Zadatak 2.

Zadatak 2.

U magacinu se nalazi 48 jelki i 2556 ukrasa za jelku, kojima treba ukrasiti prodavnice. Veću prodavnicu treba ukrasiti sa četiri jelke i 222 ukrasa, a manju sa dve jelke i 118 ukrasa. Koliko većih, a koliko manjih prodavnica može da se ukrasi jelkama i ukrasima iz magacina? Napisati matematički model.

Zadatak 2.

U magacinu se nalazi 48 jelki i 2556 ukrasa za jelku, kojima treba ukrasiti prodavnice. Veću prodavnicu treba ukrasiti sa četiri jelke i 222 ukrasa, a manju sa dve jelke i 118 ukrasa. Koliko većih, a koliko manjih prodavnica može da se ukrasi jelkama i ukrasima iz magacina? Napisati matematički model.

Rešenje: $\begin{array}{ll} x - & \text{broj većih prodavnica} \\ y - & \text{broj manjih prodavnica} \end{array} : \quad \begin{array}{rcrcr} 4x & + & 2y & = & 48 \\ 222x & + & 118y & = & 2556 \\ x & , & y & \geq & 0 \end{array}$

Zadatak 13.

Zadatak 13.

Napisati matematički model za sledeći problem LP. Tri porodice žele da naprave kolače od jaja (J), šećera (Š), oraha (O) i tajnih sastojaka. Jedan kilogram kolača porodice Krempitić košta 45 dinara, porodice Tulumbić 60 dinara, a porodice Rolatić 55 dinara. U 1 kg kolača porodice Krempitić treba da bude 6 (J), 100 g (Š) i 200 g (O); u 1 kg kolača porodice Tulumbić treba da bude 10 (J), 200 g (Š) i 250 g (O); u 1 kg kolača porodice Rolatić treba da bude 8 (J), 180 g (Š) i 300 g (O). Raspoložive količine jaja su 200 komada, šećera 5 kilograma, a oraha 4 kilograma. Po koliko kilograma kolača svaka porodica može da napravi, a da ukupna zarada bude maksimalna?

Zadatak 13.

Napisati matematički model za sledeći problem LP. Tri porodice žele da naprave kolače od jaja (J), šećera (Š), oraha (O) i tajnih sastojaka. Jedan kilogram kolača porodice Krempitić košta 45 dinara, porodice Tulumbić 60 dinara, a porodice Rolatić 55 dinara. U 1 kg kolača porodice Krempitić treba da bude 6 (J), 100 g (Š) i 200 g (O); u 1 kg kolača porodice Tulumbić treba da bude 10 (J), 200 g (Š) i 250 g (O); u 1 kg kolača porodice Rolatić treba da bude 8 (J), 180 g (Š) i 300 g (O). Raspoložive količine jaja su 200 komada, šećera 5 kilograma, a oraha 4 kilograma. Po koliko kilograma kolača svaka porodica može da napravi, a da ukupna zarada bude maksimalna?

Rešenje: $x/y/z$ – broj kg kolača porodice Krempitić/Tulumbić/Rolatić

$$\max(45x + 60y + 55z)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
6x & + & 10y & + & 8z & \leq & 200 \\
0,1x & + & 0,2y & + & 0,18z & \leq & 5 \\
0,2x & + & 0,25y & + & 0,3z & \leq & 4 \\
x & , & y & , & z & \geq & 0
\end{array}$$

Zadatak 30.

Zadatak 30.

Odrediti $\max(2005 + x + 2y)$ pod uslovima:
$-4x + y \leq -4, 3x + 4y \leq 24, x + y \geq 2, 3x - 5y \leq 15, x, y \geq 0.$

Zadatak 30.

Odrediti $\max(2005 + x + 2y)$ pod uslovima:
$-4x + y \leq -4, 3x + 4y \leq 24, x + y \geq 2, 3x - 5y \leq 15, x, y \geq 0.$

Rešenje: $\max(2005 + x + 2y) = 2015,95$

Zadatak 48.

Zadatak 48.

Data je funkcija $f(x, y) = x - y + 9$ i uslovi: $x + y \geq 1$, $-x + y \leq 2$, $x + y \leq 3$, $x, y \geq 0$. Nacrtati domen ovog LP problema, naći sve presečne tačke pravih koje ograničavaju domen LP problema i naći minimum funkcije $f(x, y)$.

Zadatak 48.

Data je funkcija $f(x,y) = x - y + 9$ i uslovi: $x + y \geq 1$, $-x + y \leq 2$, $x + y \leq 3$, $x, y \geq 0$. Nacrtati domen ovog LP problema, naći sve presečne tačke pravih koje ograničavaju domen LP problema i naći minimum funkcije $f(x,y)$.

Rešenje: $T_1(1,0)$, $T_2(3,0)$, $T_3(1/2, 5/2)$, $T_4(0,1)$, $T_5(0,2)$;
$\min f(x,y) = 7$.

Zadatak 43.

Zadatak 43.

Data je funkcija $f(x, y) = 2y + x$ i uslovi: $y \geq 2$, $y \leq 3$, $y \geq x$, $x, y \geq 0$.

(i) Nacrtati domen LP problema.

(ii) Koliki je maksimum date funkcije na datom domenu?

Zadatak 43.

Data je funkcija $f(x, y) = 2y + x$ i uslovi: $y \geq 2$, $y \leq 3$, $y \geq x$, $x, y \geq 0$.

(i) Nacrtati domen LP problema.

(ii) Koliki je maksimum date funkcije na datom domenu?

Rešenje: $\max f(x, y) = 9$

Zadatak 52.

Zadatak 52.

Napisati početnu simpleks tablicu za problem $\max(x_1 + 3x_2 - 2x_3)$ pod uslovima: $-2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -2$, $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1$, $-x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Zadatak 52.

Napisati početnu simpleks tablicu za problem $\max(x_1 + 3x_2 - 2x_3)$ pod uslovima: $-2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -2$, $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1$, $-x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -1$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Rešenje:
$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
-1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
-1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Zadatak 58.

Zadatak 58.

Data je simpleks tablica za minimum funkcije. Naći sledeću tablicu.

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 80 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \\
\hline
-2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Zadatak 58.

Data je simpleks tablica za minimum funkcije. Naći sledeću tablicu.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \\ \hline -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Rešenje: $\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 30 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 50 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 150 \end{array}$

Zadatak 54.

Zadatak 54.

Naći optimalnu simpleks tablicu za minimum funkcije ako je data tablica:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -4 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Zadatak 54.

Naći optimalnu simpleks tablicu za minimum funkcije ako je data tablica:

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
-4 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Rešenje:
$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 5/4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 13/2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 8 & 7/4 & 5/4 & 93/4
\end{array}$$

Zadatak 65.

Zadatak 65.

Data je simpleks tablica za minimum funkcije. Simpleks metodom naći tablicu za naredni korak.

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Zadatak 65.

Data je simpleks tablica za minimum funkcije. Simpleks metodom naći tablicu za naredni korak.

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Rešenje: $\begin{array}{rrrrrr|r} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$

Zadatak.

Zadatak.

Simpleks metodom naći rešenje datog problema:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \geq & -8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Zadatak.

Simpleks metodom naći rešenje datog problema:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \geq & -8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Rešenje: $\max(x_1 + 2x_2) = -6$