

GRANIČNE VREDNOSTI

1. Izračunati sledeće limese nizova:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+5}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{1}{n+1}}\right), \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_{10} n}, \\
 & \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}, \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}, \\
 & \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{2n+3} + \frac{1-3n^3}{3n^2+1}\right), \quad \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1} + \frac{1-6n^3}{1+4n^2}\right), \quad \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}, \\
 & \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)!}, \quad \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}, \quad \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}, \\
 & \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n+1}} + 3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}, \quad \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)^{3n^2}, \quad \text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \\
 & \text{p) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2+1}, \quad \text{q) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n, \quad \text{r) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}, \\
 & \text{s) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n-1}{n^2+1}\right), \quad \text{t) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.
 \end{aligned}$$

Rešenja:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } 2, \quad \text{b) } \frac{1}{3}, \quad \text{c) } 0, \quad \text{d) } 0, \quad \text{e) } \frac{3}{2}, \quad \text{f) } \frac{15}{17}, \quad \text{g) } -\frac{3}{2}, \quad \text{h) } -\frac{3}{4}, \quad \text{i) } 0, \quad \text{j) } 0, \\
 & \text{k) } 1, \quad \text{l) } 3, \quad \text{m) } 1, \quad \text{n) } e^3, \quad \text{o) } \frac{1}{e}, \quad \text{p) } 1, \quad \text{q) } 0, \quad \text{r) } \frac{1}{2}, \quad \text{s) } \frac{1}{2}, \quad \text{t) } 1.
 \end{aligned}$$

2. Odrediti sledeće granične vrednosti:

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{x^2+3}, \quad \text{2) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+3}, \quad \text{3) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2}, \quad \text{4) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-4x+3}{x^4-3x+2}, \\
 & \text{5) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad \text{6) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}, \quad \text{7) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-8x+7}, \quad \text{8) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4-4x^2+1}{x^3-x^2-x+1}, \\
 & \text{9) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{18x^4-12x^3+11x^2-6x+1}{27x^4-18x^3+12x^2-6x+1}, \quad \text{10) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^4-12x^3+11x^2-6x+1}{27x^4-18x^3+12x^2-6x+1}, \\
 & \text{11) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}, \quad \text{12) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}, \quad \text{13) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \\
 & \text{14) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \quad \text{15) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}, \quad \text{16) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}, \\
 & \text{17) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2+4x}}, \quad \text{18) } \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x), \quad \text{19) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{x^2-10x}), \\
 & \text{20) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}, \quad \text{21) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}, \quad \text{22) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}, \quad \text{23) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}, \\
 & \text{24) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+1)}{x+1}, \quad \text{25) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad \text{26) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}, \quad \text{27) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x},
 \end{aligned}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}, \quad 29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-2x} - 1}{x}, \quad 30) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x} - 1}{x}, \quad 31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x},$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad 33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}, \quad 34) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{x+2}, \quad 35) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2-3}.$$

Rešenja:

1) $\frac{1}{2}$, 2) 1, 3) 1, 4) ∞ , 5) 4, 6) $-\frac{8}{3}$, 7) 0, 8) ∞ , 9) $\frac{11}{12}$, 10) $\frac{2}{3}$,
 11) $\frac{2}{3}$, 12) ∞ , 13) 1, 14) 0, 15) $\frac{4}{3}$, 16) $\sqrt{2}$, 17) $\frac{1}{2}$, 18) $\frac{1}{2}$, 19) 5,
 20) $\frac{1}{8}$, 21) 4, 22) $\frac{1}{4}$, 23) $\frac{5}{2}$, 24) $\sin 1$, 25) 1, 26) 1, 27) 2, 28) -2,
 29) 0, 30) ∞ , 31) 1, 32) $\frac{3}{2}$, 33) 2, 34) e^{-2} , 35) e^2 .

3. Pronađi sledeće jednostrane granične vrednosti:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sqrt{x}), \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^3} - \ln x), \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -5^+} (\sqrt{x+5} + x), \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x},$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}, \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}, \quad \eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \theta) \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + \sqrt{-x}),$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{(-x)^5} + \ln(1+x)), \quad \kappa) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2},$$

$$\mu) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \quad \nu) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3-x}, \quad \xi) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \omicron) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}, \quad \pi) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}.$$

Rešenja:

$\alpha)$ 2, $\beta)$ $+\infty$, $\gamma)$ -5, $\delta)$ $+\infty$, $\varepsilon)$ $+\infty$, $\zeta)$ 0, $\eta)$ 0, $\theta)$ 2, $\iota)$ 0, $\kappa)$ 0,
 $\lambda)$ $+\infty$, $\mu)$ $-\infty$, $\nu)$ $+\infty$, $\xi)$ 1, $\omicron)$ 0, $\pi)$ 0.