

# KOMBINATORIKA

- formule i zadaci -

# Osnovni pojmovi

- Faktorijel:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

# Osnovni pojmovi

- Faktorijel:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

- Binomni koeficijent:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

- Faktorijel:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

- Binomni koeficijent:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

- Osobine binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n - 1}{k - 1} + \binom{n - 1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n - 1} = n$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

# Zadaci (1)

# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .



# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .

**Zadatak 1.** Izračunati  $\binom{12}{5}$ .

# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .

**Zadatak 1.** Izračunati  $\binom{12}{5}$ .

**Zadatak 2.** Izračunati  $\binom{17}{0} - \binom{16}{2} + \binom{18}{3}$ .

# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .

**Zadatak 1.** Izračunati  $\binom{12}{5}$ .

**Zadatak 2.** Izračunati  $\binom{17}{0} - \binom{16}{2} + \binom{18}{3}$ .

**Zadatak 79.** Odrediti koeficijent uz  $x^{10}$  u razvoju binoma  $(1 - x^2)^{18}$ .  
Kog stepena je polinom  $(1 - x^2)^{18}$ ?

# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .

**Zadatak 1.** Izračunati  $\binom{12}{5}$ .

**Zadatak 2.** Izračunati  $\binom{17}{0} - \binom{16}{2} + \binom{18}{3}$ .

**Zadatak 79.** Odrediti koeficijent uz  $x^{10}$  u razvoju binoma  $(1 - x^2)^{18}$ .  
Kog stepena je polinom  $(1 - x^2)^{18}$ ?

**Zadatak 81.** Odrediti koeficijent uz  $x^{\frac{20}{3}}$  u razvoju binoma  $(\sqrt{2x} + x^{\frac{2}{3}})^{11}$ ,  
 $x > 0$ .

# Zadaci (1)

**Zadatak.** Izračunati  $5!$  i  $6!$ .

**Zadatak 1.** Izračunati  $\binom{12}{5}$ .

**Zadatak 2.** Izračunati  $\binom{17}{0} - \binom{16}{2} + \binom{18}{3}$ .

**Zadatak 79.** Odrediti koeficijent uz  $x^{10}$  u razvoju binoma  $(1 - x^2)^{18}$ .  
Kog stepena je polinom  $(1 - x^2)^{18}$ ?

**Zadatak 81.** Odrediti koeficijent uz  $x^{\frac{20}{3}}$  u razvoju binoma  $(\sqrt{2x} + x^{\frac{2}{3}})^{11}$ ,  
 $x > 0$ .

**Zadatak 86.** Odrediti slobodan član u razvoju binoma  $(\frac{\sqrt{3}}{2x} - x^{\frac{1}{2}})^{15}$ ,  
 $x > 0$ .

# Permutacije, varijacije, kombinacije

# Permutacije, varijacije, kombinacije

- Permutacije bez ponavljanja skupa od  $n$  elemenata:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

# Permutacije, varijacije, kombinacije

- Permutacije bez ponavljanja skupa od  $n$  elemenata:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Permutacije sa ponavljanjem familije od  $n$  elemenata od kojih je  $k$  različitih i redom se ponavljaju  $l_1, l_2, \dots, l_k$  puta,  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$ :

$$\bar{P}_n^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \dots \cdot l_k!}$$



# Permutacije, varijacije, kombinacije

- Permutacije bez ponavljanja skupa od  $n$  elemenata:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Permutacije sa ponavljenjem familije od  $n$  elemenata od kojih je  $k$  različitih i redom se ponavljaju  $l_1, l_2, \dots, l_k$  puta,  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$ :

$$\bar{P}_n^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \dots \cdot l_k!}$$

- Varijacije bez ponavljanja klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

# Permutacije, varijacije, kombinacije

- Permutacije bez ponavljanja skupa od  $n$  elemenata:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Permutacije sa ponavljanjem familije od  $n$  elemenata od kojih je  $k$  različitih i redom se ponavljaju  $l_1, l_2, \dots, l_k$  puta,  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$ :

$$\bar{P}_n^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \dots \cdot l_k!}$$

- Varijacije bez ponavljanja klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

- Varijacije sa ponavljanjem klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$\bar{V}_n^k = n^k$$

# Permutacije, varijacije, kombinacije

- Permutacije bez ponavljanja skupa od  $n$  elemenata:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Permutacije sa ponavljanjem familije od  $n$  elemenata od kojih je  $k$  različitih i redom se ponavljaju  $l_1, l_2, \dots, l_k$  puta,  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$ :

$$\bar{P}_n^{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \dots \cdot l_k!}$$

- Varijacije bez ponavljanja klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$V_n^k = \binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

- Varijacije sa ponavljanjem klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$\bar{V}_n^k = n^k$$

- Kombinacije bez ponavljanja klase  $k$  skupa od  $n$  elemenata:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

# Zadaci (2)

## Zadaci (2)

**Zadatak 4.** Koliko ima reči od slova  $D$ ,  $O$ ,  $K$ ,  $A$  i  $Z$ , ako se slova ne ponavljaju?

## Zadaci (2)

**Zadatak 4.** Koliko ima reči od slova  $D$ ,  $O$ ,  $K$ ,  $A$  i  $Z$ , ako se slova ne ponavljaju?

**Zadatak 6.** Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se:

- (i) cifre ne ponavljaju?
- (ii) cifre mogu ponavljati?

## Zadaci (2)

**Zadatak 4.** Koliko ima reči od slova  $D$ ,  $O$ ,  $K$ ,  $A$  i  $Z$ , ako se slova ne ponavljaju?

**Zadatak 6.** Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se:

(i) cifre ne ponavljaju?

(ii) cifre mogu ponavljati?

**Zadatak 7.** Koliko ima parnih trocifrenih brojeva kod kojih se:

(i) cifre ne ponavljaju?

(ii) cifre mogu ponavljati?

## Zadaci (2)

**Zadatak 4.** Koliko ima reči od slova  $D$ ,  $O$ ,  $K$ ,  $A$  i  $Z$ , ako se slova ne ponavljaju?

**Zadatak 6.** Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se:  
(i) cifre ne ponavljaju?  
(ii) cifre mogu ponavljati?

**Zadatak 7.** Koliko ima parnih trocifrenih brojeva kod kojih se:  
(i) cifre ne ponavljaju?  
(ii) cifre mogu ponavljati?

**Zadatak 9.** Koliko se različitih reči može napisati od slova  $M$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $A$ ?



## Zadaci (2)

**Zadatak 4.** Koliko ima reči od slova  $D$ ,  $O$ ,  $K$ ,  $A$  i  $Z$ , ako se slova ne ponavljaju?

**Zadatak 6.** Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se:

(i) cifre ne ponavljaju?

(ii) cifre mogu ponavljati?

**Zadatak 7.** Koliko ima parnih trocifrenih brojeva kod kojih se:

(i) cifre ne ponavljaju?

(ii) cifre mogu ponavljati?

**Zadatak 9.** Koliko se različitih reči može napisati od slova  $M$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $A$ ,  $T$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $A$ ?

**Zadatak 11.** Koliko ima šestocifrenih brojeva u kojima se pojavljuju tri 4, dve 7 i jedna 9?

# Zadaci (3)

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

**Zadatak 14.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

**Zadatak 14.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

**Zadatak 15.** Očevidac saobraćajnog udesa nije zapamtio poslednje tri cifre registarske tablice automobila. Koliko najviše vozila može biti osumnjičeno?

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

**Zadatak 14.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

**Zadatak 15.** Očevidac saobraćajnog udesa nije zapamtio poslednje tri cifre registarske tablice automobila. Koliko najviše vozila može biti osumnjičeno?

**Zadatak 16.** Na koliko načina se iz špila od 32 karte mogu izvući 4 karte?

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

**Zadatak 14.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

**Zadatak 15.** Očevidac saobraćajnog udesa nije zapamtio poslednje tri cifre registarske tablice automobila. Koliko najviše vozila može biti osumnjičeno?

**Zadatak 16.** Na koliko načina se iz špila od 32 karte mogu izvući 4 karte?

**Zadatak 17.** Na koliko načina se iz špila od 52 karte mogu izvući 4, tako da među njima bude tačno 1 kralj?

## Zadaci (3)

**Zadatak 13.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju?

**Zadatak 14.** Na koliko načina grupa od 27 ljudi može da izabere tročlanu delegaciju u sastavu predsednik, zamenik predsednika i sekretar?

**Zadatak 15.** Očevidac saobraćajnog udesa nije zapamtio poslednje tri cifre registarske tablice automobila. Koliko najviše vozila može biti osumnjičeno?

**Zadatak 16.** Na koliko načina se iz špila od 32 karte mogu izvući 4 karte?

**Zadatak 17.** Na koliko načina se iz špila od 52 karte mogu izvući 4, tako da među njima bude tačno 1 kralj?

**Zadatak 20.** Na koliko načina se iz špila od 32 karte mogu izvući 4, tako da među njima budu bar dve devetke?



# Zadaci (4)

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

**Zadatak 22.** Koliko se reči može napisati od slova N, O, R, V, E, Š, K, A, u kojima slova Š, A, V stoje jedno do drugog u proizvoljnom poretku?

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

**Zadatak 22.** Koliko se reči može napisati od slova N, O, R, V, E, Š, K, A, u kojima slova Š, A, V stoje jedno do drugog u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 28.** Koliko ima permutacija brojeva 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u kojima brojevi 2, 4, 6, 8 stoje jedan pored drugog:

(i) u datom poretku?

(ii) u proizvoljnom poretku?

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

**Zadatak 22.** Koliko se reči može napisati od slova N, O, R, V, E, Š, K, A, u kojima slova Š, A, V stoje jedno do drugog u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 28.** Koliko ima permutacija brojeva 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u kojima brojevi 2, 4, 6, 8 stoje jedan pored drugog:

(i) u datom poretku?

(ii) u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 29.** Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima je bar jedna cifra 5?

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

**Zadatak 22.** Koliko se reči može napisati od slova N, O, R, V, E, Š, K, A, u kojima slova Š, A, V stoje jedno do drugog u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 28.** Koliko ima permutacija brojeva 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u kojima brojevi 2, 4, 6, 8 stoje jedan pored drugog:

(i) u datom poretku?

(ii) u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 29.** Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima je bar jedna cifra 5?

**Zadatak 30.** Koliko se reči može napisati od slova D, E, S, E, T, K, A u kojima dva slova E stoje jedno do drugog?

## Zadaci (4)

**Zadatak 19.** Koliko ima različitih kombinacija u igri na sreću LOTO 7 od 39?

**Zadatak 22.** Koliko se reči može napisati od slova N, O, R, V, E, Š, K, A, u kojima slova Š, A, V stoje jedno do drugog u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 28.** Koliko ima permutacija brojeva 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u kojima brojevi 2, 4, 6, 8 stoje jedan pored drugog:

(i) u datom poretku?

(ii) u proizvoljnom poretku?

**Zadatak 29.** Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima je bar jedna cifra 5?

**Zadatak 30.** Koliko se reči može napisati od slova D, E, S, E, T, K, A u kojima dva slova E stoje jedno do drugog?

**Zadatak 38.** Na koliko različitih načina je moguće izvaditi 4 knjige i 3 olovke iz kutije u kojoj se nalazi 10 različitih knjiga i 5 različitih olovaka?