

# Redovi

2008/2009



Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

gde je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz realnih brojeva, naziva se **red**. Tada se  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , naziva **opšti član** reda (1).

Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

gde je  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz realnih brojeva, naziva se **red**. Tada se  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , naziva **opšti član** reda (1).

Konvergenciju ćemo ispitivati samo za  $a_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , odnosno za redove sa pozitivnim članovima.

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

I Ako opšti član ne teži nuli, red divergira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

I Ako opšti član ne teži nuli, red divergira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

## Zadaci

Odrediti opšti član redova i ispitati konvergenciju:

1.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

I Ako opšti član ne teži nuli, red divergira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

## Zadaci

Odrediti opšti član redova i ispitati konvergenciju:

1.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$

2.  $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$



# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

I Ako opšti član ne teži nuli, red divergira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

## Zadaci

Odrediti opšti član redova i ispitati konvergenciju:

1.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$

2.  $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

I Ako opšti član ne teži nuli, red divergira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergira.}$$

## Zadaci

Odrediti opšti član redova i ispitati konvergenciju:

1.  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$

2.  $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

4.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  (naći sumu ako konvergira)

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## II Uoredni kriterijum

Uporedjujemo redove  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  na sledeći način:

- ako je  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  i red  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira tada i red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira,
- ako je  $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  i red  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira tada i red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

## II Upporedni kriterijum

Upporedjemo redove  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  na sledeći naćin:

- ako je  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  i red  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergira tada i red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergira,
- ako je  $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  i red  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergira tada i red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergira.

Najćešće uporedjemo sa redovima:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  (konvergira za  $\alpha > 1$ , divergira za  $\alpha \leq 1$ ) i
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$  (konvergira za  $|q| < 1$ , divergira za  $|q| \geq 1$ ),  $a_1 \in \mathbb{R}$ .

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## Zadaci

Odrediti konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

## Zadaci

Odrediti konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

2.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$



## Zadaci

Odrediti konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

2.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

3.  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$

## Zadaci

Odrediti konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

2.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

3.  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$

4.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$  (odrediti sumu niza ako konvergira)

## Zadaci

Odrediti konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots$

2.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$

3.  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots$

4.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$  (odrediti sumu niza ako konvergira)

5.  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## III Količnicki kriterijum

Ako za redove sa pozitivnim članovima  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  važi da je

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ , gde je  $L$  konačan broj različit od nule, tada ovi redovi zajedno konvergiraju ili divergiraju.

## III Količnicki kriterijum

Ako za redove sa pozitivnim članovima  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  važi da je

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ , gde je  $L$  konačan broj različit od nule, tada ovi redovi zajedno konvergiraju ili divergiraju.

Red  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_r(n)}{Q_s(n)}$  uporedjujemo sa redom  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-r}}$ .

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$



## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$$

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$$

6. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3}(1+n)^2}{\sqrt[6]{n}(1+n^3)}$$

# Redovi - zadaci za vežbu

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1.  $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$

2.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(1+n^2)^2}{(1+n^3)^2}$

4.  $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$  (naći sumu u slučaju konvergencije)

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju



## IV D'alamberov kriterijum

Za red sa pozitivnim članovima  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  odredimo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Ako je  $L < 1$  tada red **konvergira**, ako je  $L > 1$  red **divergira**, a u slučaju  $L = 1$  ne znamo da li konvergira ili divergira.

## IV D'alamberov kriterijum

Za red sa pozitivnim članovima  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  odredimo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Ako je  $L < 1$  tada red **konvergira**, ako je  $L > 1$  red **divergira**, a u slučaju  $L = 1$  ne znamo da li konvergira ili divergira.

Može se koristiti ako se u redu javlja faktorijel.

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju



## V Košijev kriterijum

Ako je za red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sa pozitivnim članovima  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , tada za  $L < 1$  ovaj red **konvergira**, za  $L > 1$  **divergira**, dok nam za  $L = 1$  ovaj kriterijum ne daje odgovor.

## V Košijev kriterijum

Ako je za red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sa pozitivnim članovima  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ , tada za  $L < 1$  ovaj red **konvergira**, za  $L > 1$  **divergira**, dok nam za  $L = 1$  ovaj kriterijum ne daje odgovor.

Može se koristiti ako se u redu javlja faktorijel.

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n$$

$$4. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \dots$$

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju



## VI Integralni kriterijum

Ako je  $a_n = f(n)$  i  $f(x)$  pozitivna, monotono opadajuća i neprekidna funkcija za  $x \geq a \geq 1$ , onda red  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i integral

$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx$  istovremeno konvergiraju ili divergiraju.

# Redovi - kriterijumi za konvergenciju

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$$

3. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$$

3. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

4. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} n e^{-n^2}$$

## Zadaci

Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$$

3. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

4. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} n e^{-n^2}$$

5. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

# Redovi - zadaci za vežbu



Ispitati konvergenciju sledećih redova:

1.  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$

4.  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 6n^2 + 11n - 6}$

# Redovi - zadaci za vežbu

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left( n + \frac{3}{n+1} \right) \frac{1}{3^n}$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{2^n}$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(2n-1)}}$$